

# Lineární algebra - II. část (determinanty a jejich využití, soustavy lineárních rovníc)

Michal Fusek

Ústav matematiky FEKT VUT, fusekmi@feec.vutbr.cz

Matematika (ESMAT)

- 1 Determinanty
- 2 Soustavy lineárních rovnic
- 3 Využití determinantů při řešení lineárních rovnic

# Determinant

**Permutací**  $p$  množiny  $M$  rozumíme libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení  $p : M \rightarrow M$  (tedy přerovnání prvků množiny).

Je-li  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  (množina indexů), permutaci  $p$  zapisujeme obvykle ve tvaru  $p = (p(1), p(2), \dots, p(n))$ .

Počet permutací  $n$ -prvkové množiny je  $n!$

## Příklad

Bud'  $M = \{1, 2, 3\}$ . Určete všechny permutace množiny  $M$ .

### Řešení:

Počet permutací je  $3! = 6$ .

Jsou to trojice:  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ .

**Inverzí** v permutaci  $p = (p(1), p(2), \dots, p(n))$  nazýváme dvojici  $(p(i), p(j))$  takovou, že  $i < j$  a  $p(i) > p(j)$ .

Permutace  $p$  je sudá (resp. lichá), má-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

### Příklad

Bud'  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ . Najdi všechny inverze permutace  $p = (3, 4, 2, 1)$ .

### Řešení:

$(3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1), (2, 1) \Rightarrow$  lichá.

Nechť **A** je čtvercová matice řádu  $n$ . **Determinant** matice **A** je reálné číslo

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_p (-1)^k a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace  $p$  množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Číslo  $k$  značí počet inverzí příslušné permutace.

Jinými slovy:

- (1) Vezmeme po jednom prvku z každého řádku tak, aby žádné dva nebyly ze stejného sloupce.
- (2) Tyto prvky mezi sebou vynásobíme.
- (3) Determinant je dán součtem všech těchto možných součinů.

# Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – **křížové pravidlo**:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

## Geometrický význam:

Plocha rovnoběžníku ohraničeného vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  a  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  je rovna absolutní hodnotě z determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

- Determinant řádu 3 – **Sarrusovo pravidlo**:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

### Geometrický význam:

Objem rovnoběžnostěnu ohraničeného vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  a  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  je roven absolutní hodnotě z determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

## Příklad

Vypočtěte determinanty matic:

$$\mathbf{A} = (-2), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = -2, \quad |\mathbf{B}| = -6, \quad |\mathbf{C}| = 8$$



# Laplaceův rozvoj

Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice řádu  $n$ . **Algebraický doplněk** prvku  $a_{ij}$  je číslo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

kde  $\mathbf{A}_{ij}$  je matice vzniklá z matice  $\mathbf{A}$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce.

Laplaceův rozvoj podle  $i$ -tého řádku:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{in}$$

Laplaceův rozvoj podle  $j$ -tého sloupce:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathcal{A}_{1j} + a_{2j}\mathcal{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathcal{A}_{nj}$$

Je vhodné vybírat pro rozvoj řádek, nebo sloupec obsahující co největší počet nulových prvků.

## Příklad

Pomocí Laplaceova rozvoje spočtete determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

## Řešení:

Zvolíme rozvoj podle druhého řádku:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = 4, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |\mathbf{A}_{21}| = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |\mathbf{A}_{22}| = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad a_{23} = 0, \quad \mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |\mathbf{A}_{23}| = (-1) \cdot [2 - 9] = 7.$$

Odtud

$$\det(\mathbf{A}) = a_{21}\mathcal{A}_{21} + a_{22}\mathcal{A}_{22} + a_{23}\mathcal{A}_{23} = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 69.$$

# Operace nemění hodnotu determinantu

- Přičtení lineární kombinace jiných řádků (sloupců) k danému řádku (sloupci).

## Příklad

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2I + II, \quad 3I + III} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32 + 40) = 8.$$

# Operace měnící hodnotu determinantu

- Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.
- Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem  $\alpha$  zvětší hodnotu determinantu  $\alpha$ -krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)

## Příklad

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad I \leftrightarrow II \quad = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

# Vlastnosti determinantu

Jsou dány čtvercové matice  $A, B$  řádu  $n$ .

- (1)  $|A| = 0 \Leftrightarrow$  řádky nebo sloupce matice  $A$  jsou lineárně závislé.
- (2) Pokud matice  $A$  obsahuje nulový řádek či sloupec, tak  $|A| = 0$ .
- (3)  $|A^T| = |A|$
- (4) Pokud platí  $|A| \neq 0$ , tak  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .
- (5)  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- (6) Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na její hlavní diagonále.

**Příklad**

Pomocí Laplaceova rozvoje spočtěte determinant:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

**Řešení:**

25

**Příklad**

Převodem matice na schodovitý tvar spočtete determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

**Řešení:**

$$-16$$



**Příklad**

Vypočtěte determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Řešení:**

28.

# Soustavy lineárních rovnic

Nechť  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . **Soustavou  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{SLR}$$

**Řešením** soustavy lineárních rovnic (SLR) rozumíme uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , po jejichž dosazení za neznámé  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (v tomto pořadí) do soustavy lineárních rovnic dostaneme ve všech rovnicích identity.

Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí soustavy** (SLR).

Matici

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

nazýváme **rozšířenou maticí soustavy** (SLR).

Soustavu (SLR) můžeme zapsat v maticové formě jako:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Po příslušném označení lze psát jednoduše  **$Ax = b$** .

# Homogenní soustava lineárních rovnic

Jestliže v soustavě (SLR) platí

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0,$$

nazýváme tuto soustavu **homogenní**.

V opačném případě se nazývá soustava **nehomogenní**.

Homogenní soustava lineárních rovnic (SLR) má vždy řešení a to:

- pouze triviální (nulové) řešení  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ,  
jestliže  $h(\mathbf{A}) = n$ .
- nekonečně mnoho řešení, jestliže  $h(\mathbf{A}) < n$ . Tato řešení lze vyjádřit pomocí  $n - h(\mathbf{A})$  nezávislých parametrů.

# Geometrická interpretace

Řešíme SLR o 2 neznámých = hledáme průsečík přímek.

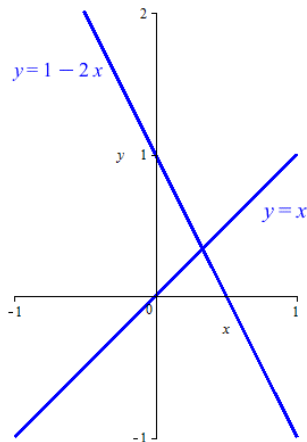
- SLR má právě jedno řešení:

$$2x + y = 1$$

$$x - y = 0$$

Řešení:  $x = y = \frac{1}{3}$

Průsečík:  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

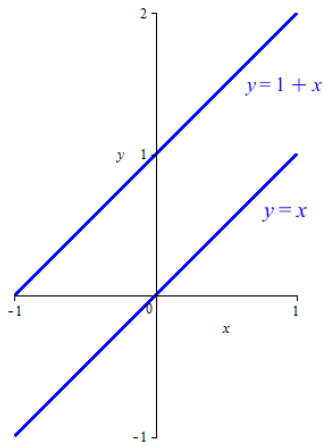


- SLR nemá řešení:

$$x - y = -1$$

$$x - y = 0$$

Přímky se neprotínají.

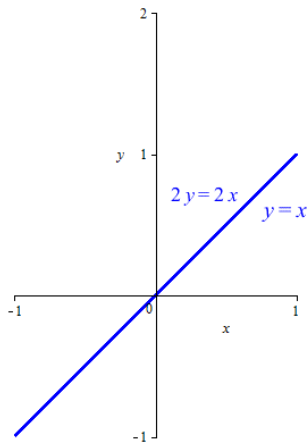


- SLR má nekonečně mnoho řešení:

$$2x - 2y = 0$$

$$x - y = 0$$

Přímky splynou.





Řešíme SLR o 3 neznámých = hledáme průsečík rovin.

- SLR má právě jedno řešení:

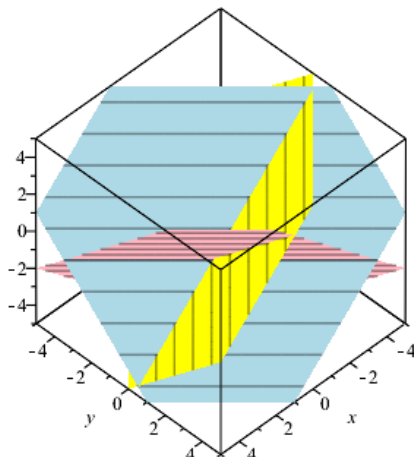
$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 0$$

$$x + y - z = 2$$

Řešení:  $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

Průsečík:  $[1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$



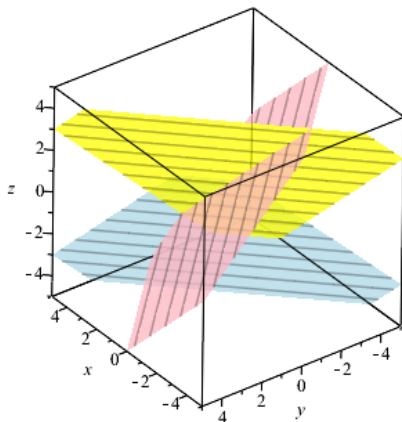
- SLR nemá řešení (roviny nemají právě 1 společný bod):

$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 3$$

$$x - y + z = -3$$

Druhá a třetí rovina jsou rovnoběžné (mají stejný normálový vektor).



- SLR nemá řešení (roviny se po dvou protínají ve 3 rovnoběžných přímkách):

$$x - y + z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + z = 2$$

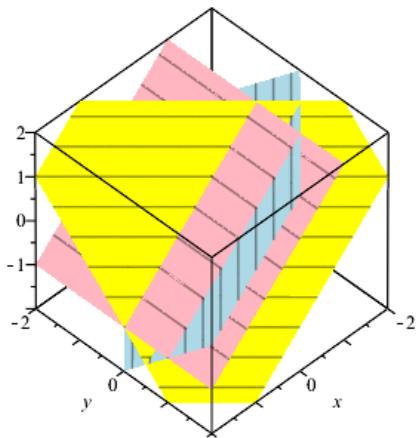
Pro normálové vektory

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$$

$$\vec{n}_3 = (1, 0, 1)$$

platí  $\vec{n}_2 = 2 \cdot \vec{n}_3 - \vec{n}_1$ .



- SLR má nekonečně mnoho řešení (rovnoběžné přímky splynou):

$$x - y + z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + z = \frac{1}{2}$$

Řešení:  $\left[t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - t\right]$

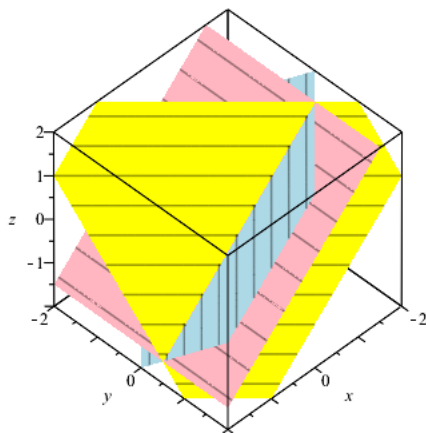
Pro normálové vektory

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$$

$$\vec{n}_3 = (1, 0, 1)$$

platí  $\vec{n}_2 = 2 \cdot \vec{n}_3 - \vec{n}_1$ .



# Frobeniova věta o řešitelnosti SLR

Soustava lineárních rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  je řešitelná právě tehdy, když

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Jestliže

- $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ , soustava **nemá řešení**.
- Jestliže  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$ , soustava má **právě jedno řešení**.
- Jestliže  $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ , soustava má **nekonečně mnoho řešení**, která lze vyjádřit pomocí  $n - h(\mathbf{A})$  nezávislých parametrů.

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají **ekvivalentní**, jestliže mají shodné řešení.

# Postup při řešení SLR

- (1) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy ( $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ) na schodovitý tvar.
- (2) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.
- (3) Je-li soustava řešitelná, přiřadíme schodovité matici soustavu lineárních rovnic (je ekvivalentní s původní soustavou).
- (4) Postupně řešíme rovnice od poslední a získané výsledky dosazujeme do následujících rovnic. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, zvolíme vhodné proměnné za nezávislé parametry.

**Příklad**

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y - z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8.\end{aligned}$$

**Řešení:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Příklad**

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$x + 3y + z = 2,$$

$$2x + 2y + 6z = -1,$$

$$2x + 5y + 3z = 8.$$

**Řešení:**

SLR nemá řešení.



**Příklad**

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$x + 3y + z = 2,$$

$$2x + 2y + 6z = 20,$$

$$2x + 5y + 3z = 8.$$

**Řešení:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 4p \\ p - 4 \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}$$

**Příklad**

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$x + 2y - 2z + 11u = -28,$$

$$2y - 3z + 17u = -43,$$

$$2x + 2y - z + 5u = -13,$$

$$8x + 6y - z + 3u = -9.$$

**Řešení:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - p_2 + 6p_1 \\ \frac{3}{2}p_2 - \frac{17}{2}p_1 - \frac{43}{2} \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}$$

Je-li matice  $\mathbf{A}$  soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení.

- Řešení je možné získat použitím inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad / \mathbf{A}^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

- Postup je zdlouhavý kvůli výpočtu inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$ .

## Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3, \\ 2x + 7y + z &= -2, \\ x + 2y + z &= 4.\end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

# Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Jestliže  $\mathbf{A}$  je regulární matice řádu  $n$ , pak má soustava lineárních rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  jediné řešení  $\mathbf{x}$ , pro jehož  $i$ -tou složku platí

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|},$$

kde  $\mathbf{A}_i$  je matice vzniklá z matice  $\mathbf{A}$  náhradou jejího  $i$ -tého sloupce za sloupec pravých stran  $\mathbf{b}$ .

- Lze spočítat jednotlivé neznáme bez nutnosti znát hodnoty ostatních neznámých.
- Pro velké soustavy nutnost počítat determinanty vysokých řádů.

## Příklad

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3.$$

**Řešení:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Určíme determinanty matic **A** a **A**<sub>1</sub>, **A**<sub>2</sub>, **A**<sub>3</sub>:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Protože je  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , lze použít Cramerovo pravidlo.

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

Tedy

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5},$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{20}{-5} = -4.$$

**Příklad**

Určete neznámou  $x_2$  ze SLR.

$$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3,$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 1.$$

**Řešení:**

$$x_2 = 2$$