

PRVNÍ DOMÁCÍ ÚKOL

Shrek.

Shrek s oslíkem se vydali zachránit princeznu Fionu, která byla zakletá ve věži. Věž strážila dračice, která Shrekovi zadala následující úkol:

Pro jaká přirozená čísla n platí

$$11 \mid (3^{2024} + 2^{2023} + n)?$$

Pomozte Shrekovi s úkolem, neví si rady, protože nechodil do školy, ale silně touží Fionu vysvobodit.



Za vyřešení úkolu můžete získat 6 bodů, řešení pošlete na můj e-mail do 11.4.2024.

Řešení. Čísla 2, 3, 11 jsou prvočísla, tudíž jsou nesoudělná a proto platí:

$$3^{\varphi(11)} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{2020} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$3^{2020} \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 3^4 \pmod{11} \Rightarrow 3^{2024} \equiv 81 \pmod{11} \Rightarrow 3^{2024} \equiv 4 \pmod{11}.$$

Podobně zjistíme, že

$$2^{2023} \equiv 8 \pmod{11}.$$

Potom

$$3^{2024} + 2^{2023} + n \equiv 4 + 8 + n \pmod{11} \Rightarrow 3^{2024} + 2^{2023} + n \equiv 12 + n \pmod{11}$$

Proto

$$n = 11k - 1, k \in \mathbb{N} \text{ resp. } n = 11k + 10, k \in \mathbb{N}_0.$$