První domácí úkol

Krteček.

Krteček se svými přáteli chce uzdravit myšku a proto potřebuje získat zázračnou rostlinku chamomilu. Chytrá sova mu prozradila, že pokud vyřeší jeden těžký příklad (v rámečku), tak mu ukáže, kde chamomilla roste. Zvířátka studují učebnici matematiky, ale zatím řešení úlohy nevymysleli.

> Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost
>
> $$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2025,$$
>
> kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

Pomozte krtečkovi s úkolem, neví si rady, protože nechodil do školy, ale silně touží myšku uzdravit.

Za vyřešení úkolu můžete získat 6 *bodů, řešení posílejte na můj e-mail do 14.4.2025.*

Řešení. Nechť $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, kde p_i jsou prvočísla a

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \cdots \geq p_k.$$

Potom

$$n+d(n)+d(d(n))+\cdots = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_1 + 1 + 0 = 2025.$$

Proto

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} + p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_1 = 2024,$$

potom

$$p_1 \left(p_2 \cdots p_k + p_2 \cdots p_{k-1} + p_2 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_2 + 1\right) = 2024.$$

Vzhledem k tomu, že $2024 = 2^3.11.23$ a p_1 je prvočíslo, tak

$$p_1 = 2 \ \vee \ p_1 = 11 \ \vee \ p_1 = 23.$$

Nechť $p_1 = 23$. Potom

$$23 \left(p_2 \cdots p_k + p_2 \cdots p_{k-1} + p_2 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_2 + 1\right) = 2024,$$

potom

$$\left(p_2 \cdots p_k + p_2 \cdots p_{k-1} + p_2 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_2 + 1\right) = 88.$$

$$p_2 \left(p_3 \cdots p_k + p_3 \cdots p_{k-1} + p_3 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_3 + 1\right) = 87.$$

Vzhledem k tomu, že $87 = 3 \cdot 29$ a p_2 je prvočíslo, tak $p_2 = 3 \ \vee \ p_2 = 29$. Ale $p_1 \geq p_2$, proto $p_2 = 3$. Potom

$$3 \left(p_3 \cdots p_k + p_3 \cdots p_{k-1} + p_3 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_3 + 1\right) = 87,$$

$$\left(p_3 \cdots p_k + p_3 \cdots p_{k-1} + p_3 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_3 + 1\right) = 29,$$

$$p_3 \left(p_4 \cdots p_k + p_4 \cdots p_{k-1} + p_4 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_4 + 1\right) = 28.$$

Vzhledem k tomu, že $28 = 2^2 \cdot 7$ a p_3 je prvočíslo, tak $p_3 = 2 \ \vee \ p_3 = 7$. Ale $p_2 \geq p_3$, proto $p_3 = 2$. Potom

$$2 \left(p_4 \cdots p_k + p_4 \cdots p_{k-1} + p_4 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_4 + 1\right) = 28,$$

$$\left(p_4 \cdots p_k + p_4 \cdots p_{k-1} + p_4 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_4 + 1\right) = 14,$$

$$p_4 \left(p_5 \cdots p_k + p_5 \cdots p_{k-1} + p_5 \cdots p_{k-2} + \cdots + p_5 + 1\right) = 13,$$

To by znamenalo, že $p_4 = 13$, ale $p_4 \leq p_3$. Proto pro $p_1 = 23$ úloha řešení nemá a podobnou úvahou zjistíme, že ani zbylé dvě možnosti k řešení nevedou.