- predmetový jazyk a bežný jazyk
- množina-primitívny pojem, ktorý nedefinujeme
    - súhrn (skupina, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.
    - je určená vtedy, ak o každom objekte možno rozhodnúť, či je jej prvkom, alebo nie je jej prvkom.

Základné množinové pojmy

Množina môže byť zadaná:

- vymenovaním prvkov
- obor pravdivosti nejakej výrokovej formy

Základné množinové pojmy

- prázdna množina

Základné množinové pojmy

- prázdna množina
- $\emptyset, \{\}$

Základné množinové pojmy

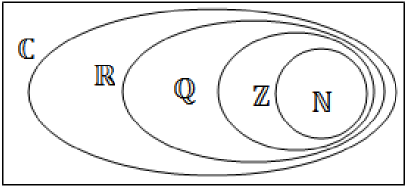
- prázdna množina
- $\emptyset, \{\}$
- Pozor!!!! Toto $\{\emptyset\}$ nie je prázdna množina.

Číselné množiny

- $\mathbb{N}$ – množina prirodzených čísel,
- $\mathbb{Z}$ – množina celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ – množina racionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ – množina reálnych čísel,
- $\mathbb{C}$ – množina komplexných čísel.

Číselné množiny

- $\mathbb{N}$ – množina prirodzených čísel,
- $\mathbb{Z}$ – množina celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ – množina racionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ – množina reálnych čísel,
- $\mathbb{C}$ – množina komplexných čísel.



Mohutnosti množín

- konečné množiny

Mohutnosti množín

- konečné množiny
- nekonečné množiny

Mohutnosti množín

- konečné množiny
- nekonečné množiny
  - spočítateľné
  - nespočítateľné

Definícia

Hovoríme, že množina A je podmnožinou množiny B a píšeme $A \subseteq B$, ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B. Ak chceme zdôrazniť, že $A \subseteq B$ a $A \neq B$, tak píšeme $A \subset B$ a hovoríme, že A je vlastná podmnožina množiny B.

Množiny, základné pojmy

Definícia

Hovoríme, že množina A *je podmnožinou množiny* B *a píšeme* $A \subseteq B$, *ak každý prvok množiny* A *je prvkom množiny* B. *Ak chceme zdôrazniť, že* $A \subseteq B$ *a* $A \neq B$, *tak píšeme* $A \subset B$ *a hovoríme, že* A *je vlastná podmnožina množiny* B.

Pre každú množinu A *platí:* $\emptyset \subseteq A, \; A \subseteq A$.

Množiny, základné pojmy

Definícia

Hovoríme, že množina A *je podmnožinou množiny* B *a píšeme* $A \subseteq B$, *ak každý prvok množiny* A *je prvkom množiny* B. *Ak chceme zdôrazniť, že* $A \subseteq B$ *a* $A \neq B$, *tak píšeme* $A \subset B$ *a hovoríme, že* A *je vlastná podmnožina množiny* B.

Pre každú množinu A *platí:* $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Definícia

Hovoríme, že množiny A, B *sa rovnajú, ak je splnené, že* $A \subseteq B$ *a zároveň aj* $B \subseteq A$.

Výrokový počet

- základné logické spojky

Výrokový počet

- základné logické spojky
-

$ph(p)$	$ph(q)$	$ph(\neg p)$	$ph(p \wedge q)$	$ph(p \vee q)$	$ph(p \Rightarrow q)$	$ph(p \iff q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Definícia

(Zápis výrokových formúl)

1. *Každá výroková premenná je výroková formula.*
2. *Ak* φ, ψ *sú výrokové formuly, tak aj* $\neg(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \Rightarrow (\psi), (\varphi) \iff (\psi)$ *sú výrokové formuly.*

Výrokový počet

1. $A \iff \neg(\neg A)$,
2. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$,
   $(A \vee B) \iff (B \vee A)$,
3. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$,
   $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$,
4. $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
   $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
5. $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$,
   $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$,
6. $(A \iff B) \iff ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$,
7. $\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B$,
8. $A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$.

Definícia

Nech A je množina. Term nad A je definovaný takto:

1. *Každá premenná, ktorej oborom je množina A, je term nad A.*
2. *Symbol každého prvku z A je term nad A.*
3. *Ak f je n–árna operácia, o ktorej platí $D(f) \subseteq A^n, H(f) \subseteq A$ a ak $t_1, \cdots, t_n$ sú termy nad A, tak $f(t_1, \cdots, t_n)$ je term nad A.*

Predikátový počet

Definícia

Nech A je množina. Ak t_1, t_2 sú termy, R je relácia definovaná na A, tak $t_1 R t_2$ je atomická formula predikátového počtu nad A.

- *Každá atomická formula predikátového počtu nad A je formula predikátového počtu nad A.*
- *Ak φ, ψ sú formuly predikátového počtu nad A, tak aj*

  $$\neg(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \Rightarrow (\psi), (\varphi) \Leftrightarrow (\psi),$$

  sú formuly predikátového počtu nad A.
- *Ak x je premenná a $\varphi(x)$ je formula s premennou x, ktorá neobsahuje $\forall x$ ani $\exists x$, tak $\forall x, \varphi(x)$ aj $\exists x, \varphi(x)$ sú formuly predikátového počtu.*

Predikátový počet

Definícia

nech Ψ, Φ *sú formuly predikátového počtu. Hovoríme, že* Ψ *je podformulou formuly* Φ*, ak formulu* Ψ *môžeme získať z formuly* Φ *vynechaním niekoľkých symbolov na začiatku a na konci (niekoľko môže znamenať aj* 0*).*

Definícia

Ak $\forall x\colon V$*, resp.* $\exists x\colon (V)$ *je podformula formuly* Ψ*, tak* V *nazývame dosahom príslušného výskytu kvantifikátora* $\forall x$*, resp.* $\exists x$ *vo formule* Ψ*.*

Predikátový počet

Definícia

Výskyt premennej vo formule sa nazýva

- *viazaným, ak nasleduje bezprostredne po znaku* $\forall$ *alebo* $\exists$, *alebo sa nachádza v dosahu kvantifikátora* $\forall x$ *alebo* $\exists x$.
- *voľným, ak nie je viazaný.*

Definícia

- *Premenná sa nazýva voľnou vo formule V, ak má aspoň jeden voľný výskyt vo formule V.*
- *Premenná sa nazýva viazanou vo formule V, ak má všetky výskyty vo formule V viazané.*
- *Formulu predikátového počtu nazývame uzavretou formulou, ak všetky jej premenné sú viazané.*
- *Formulu predikátového počtu nazývame výrokovou formou, ak aspoň jedna jej premenná je voľná.*

Základné množinové pojmy

Množina môže byť zadaná:

- vymenovaním prvkov
- obor pravdivosti nejakej výrokovej formy

(Reálne čísla)

Intervaly

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Pozor: $a < b$ **!!!**

(Reálne čísla)

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Pozor: $a < b$ **!!!**

Nevlastné body:

(Reálne čísla)

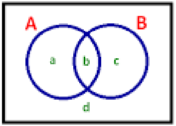
Intervaly

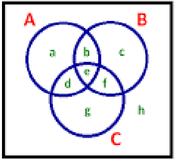
- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

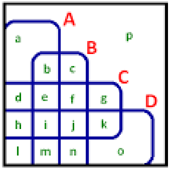
Pozor: $a < b$ **!!!**

Nevlastné body: $-\infty, \infty$

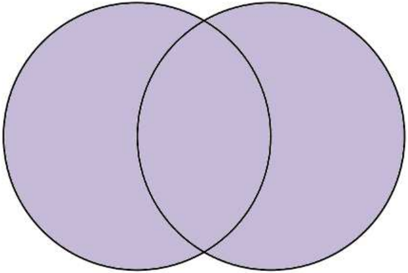
Vennove diagramy







Zjednotenie množín



Zjednotenie množín

- zjednotenie
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset =$
- $A \cup A =$
- $A \cup B =$
- $A \cup (B \cup C) =$

Zjednotenie množín

- zjednotenie

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset =$
- $A \cup A =$
- $A \cup B =$
- $A \cup (B \cup C) =$

Zjednotenie množín

- zjednotenie

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A =$
- $A \cup B =$
- $A \cup (B \cup C) =$

Zjednotenie množín

- zjednotenie

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = \ A$
- $A \cup B =$
- $A \cup (B \cup C) =$

Zjednotenie množín

- zjednotenie

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) =$

Zjednotenie množín

- zjednotenie

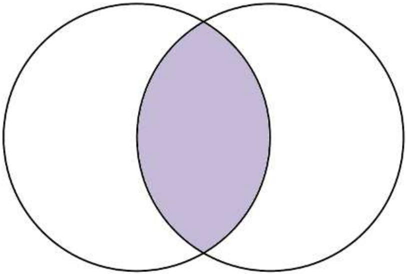
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Prienik množín



Prienik množín

- prienik

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset =$
- $A \cap A =$
- $A \cap B =$
- $A \cap (B \cap C) =$

Prienik množín

- prienik

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset =$
- $A \cap A =$
- $A \cap B =$
- $A \cap (B \cap C) =$

Prienik množín

- prienik

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset = \ \emptyset$
- $A \cap A =$
- $A \cap B =$
- $A \cap (B \cap C) =$

Prienik množín

- prienik

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset = \ \emptyset$
- $A \cap A = \ A$
- $A \cap B =$
- $A \cap (B \cap C) =$

Prienik množín

- prienik

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) =$

Prienik množín

- prienik

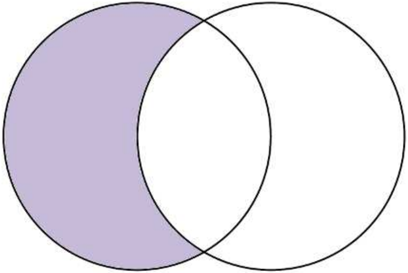
$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Vlastnosti:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Rozdiel množín



Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset =$
- $A \setminus A =$
- $A \setminus B$
- $A \setminus (B \setminus C)$

Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset =$
- $A \setminus A =$
- $A \setminus B$
- $A \setminus (B \setminus C)$

Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset = \ \ A$
- $A \setminus A =$
- $A \setminus B$
- $A \setminus (B \setminus C)$

Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset = \ A$
- $A \setminus A = \ \emptyset$
- $A \setminus B$
- $A \setminus (B \setminus C)$

Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset = \ A$
- $A \setminus A = \ \emptyset$
- $A \setminus B \ \neq B \setminus A$
- $A \setminus (B \setminus C)$

Rozdiel množín

- rozdiel

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

Vlastnosti:

- $A \setminus \emptyset = \ A$
- $A \setminus A = \ \emptyset$
- $A \setminus B \ \neq B \setminus A$
- $A \setminus (B \setminus C) \ \neq (A \setminus B) \setminus C$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$

  - $(A'_M)'_M =$
  - $(A \cup B)'_M =$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
  - $(A'_M)'_M =$
  - $(A \cup B)'_M =$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M =$
  - $(A \cup B)'_M =$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M = \ A$
  - $(A \cup B)'_M =$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M = \ A$
  - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M = \ A$
  - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
  - $x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$
  - $(A \cap B)'_M =$
  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M = \ A$
  - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
  - $x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$
  - $(A \cap B)'_M = \ A'_M \cup B'_M$

  - $(A \setminus B)'_M =$

Doplnok množiny

- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
  - $(A'_M)'_M = \ A$
  - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
  - $x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$
  - $(A \cap B)'_M = \ A'_M \cup B'_M$
  - $x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$
  - $(A \setminus B)'_M =$

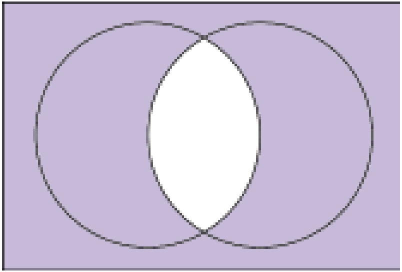
Doplnok množiny

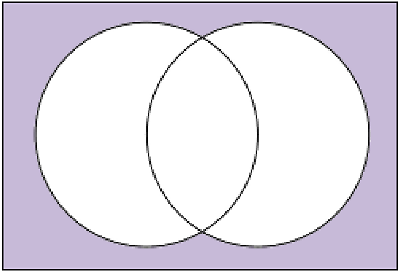
- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
    - $(A'_M)'_M = \ A$
    - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
    - $x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$
    - $(A \cap B)'_M = \ A'_M \cup B'_M$
    - $x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$
    - $(A \setminus B)'_M = A'_M \cup B$

Doplnok množiny

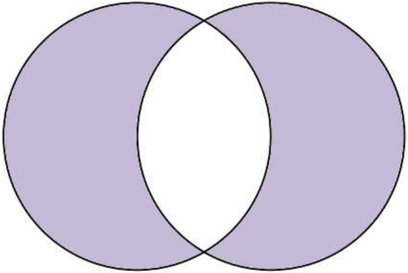
- $M-$ základná množina, $A \subseteq M$
- $A'_M = M \setminus A$
- $x \in A'_M \iff x \in M \wedge x \notin A$
    - $(A'_M)'_M = \; A$
    - $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$
    - $x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$
    - $(A \cap B)'_M = \; A'_M \cup B'_M$
    - $x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$
    - $(A \setminus B)'_M = A'_M \cup B$
    - $x \notin A \setminus B \iff x \notin A \vee x \in B$

Doplnok prieniku a zjednotenia





Symetrický rozdiel množín



Symetrický rozdiel množín

- symetrický rozdiel

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vlastnosti:

  - $A \Delta B = B \Delta A$

Symetrický rozdiel množín

- symetrický rozdiel

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vlastnosti:

- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

Symetrický rozdiel množín

- symetrický rozdiel

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vlastnosti:

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Kartézsky súčin množín

- kartézsky súčin

$$A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}$$

$$[x, y] \in A \times B \iff x \in A \wedge y \in B$$

$$[x, y] \notin A \times B \iff x \notin A \vee y \notin B$$

Vlastnosti:

- $$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
- $$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
- $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
- $$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Distributívnosť operácií

- $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
- **Pre rozdiel množín distributívnosť vzhľadom k zjednoteniu ani k prieniku neplatí!**

Rozdiel, zjednotenie a prienik

- $$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
- $$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Dôkazy

Dôkazy

- priamy dôkaz,
- nepriamy dôkaz,
- dôkaz sporom,
- dôkaz matematickou indukciou.

Potenčná množina

Definícia

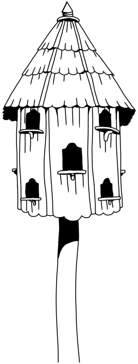
Nech X je ľubovolná množina univerza. Potom množinu, ktorá obsahuje ako svoje prvky všetky podmnožiny množiny X, nazývame **potenčnou množinou množiny X**. *Označujeme ju zvyčajne $\mathcal{P}(X)$, alebo 2^X. Teda*

$$\mathcal{P}(X) = \{B \colon B \subseteq X\}.$$

Princíp inklúzie a exklúzie

- Dve množiny
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
- Tri množiny
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
- $n-$ množín
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j;i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k;i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$
$$+ \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|$$

Dirichletov princíp



Dirichletov princíp: Ak máme utriediť $kn + 1$ $(k \geq 1)$ objektov do n tried, potom existuje aspoň jedna taká trieda, v ktorej je aspoň $k + 1$ objektov.