

MATEMATICKÁ INDUKCIA

1. Dokážte, že pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

- (i) $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
- (ii) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- (iii) $2 + 3 + 4 + \dots + (3k + 2) = \frac{1}{2} \cdot (3k + 1) \cdot (3k + 4)$
- (iv) $2 + 4 + 6 + \dots + (4n + 2) = (2n + 1) \cdot (2n + 2)$
- (v) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
- (vi) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$
- (vii) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$
- (viii) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$
- (ix) $1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$
- (x) $2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$
- (xi) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n + 1)$
- (xii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$
- (xiii) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = \frac{1}{4}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$
- (xiv) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (3n - 1) = n^2(n + 1)$
- (xv) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n - 1) \cdot (2n + 1) = \frac{1}{3}n(4n^2 + 6n - 1)$
- (xvi) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2$
- (xvii) $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$
- (xviii) $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$
- (xix) $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 1)$
- (xx) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + n(n + 1)^2 = \frac{1}{12}n(n + 1)(n + 2)(3n + 5)$
- (xxi) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (xxii) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$
- (xxiii) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$
- (xxiv) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
- (xxv) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$
- (xxvi) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$
- (xxvii) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
- (xxviii) $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n - 1)$
- (xxix) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

$$(xxx) \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{3(2n+1)}{2n+3}$$

$$(xxxii) \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$(xxxiii) \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí:

$$(i) \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

$$(ii) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

$$(iii) \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

$$(iv) \frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n$$

$$(v) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

$$(vi) \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(vii) \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

3. Dokážte, že platí:

$$(i) 2^n > n^2, \quad n \geq 5, n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) 2^n \geq n + 1, \quad n \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

$$(iii) 3^n \geq 2(n + 1)^2, \quad n \geq 4, n \in \mathbb{N},$$

$$(iv) 5^n \geq 5n^3 + 2, \quad n \geq 4, n \in \mathbb{N},$$

$$(v) 2^{n+2} > 2n + 5, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N},$$

$$(vi) \sqrt{(2n)!} < 2^n \cdot n!, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

4. Dokážte, že pre každé reálne číslo $a \geq -1$ a pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

5. Dokážte, že pre rôzne kladné reálne čísla a, b a pre prirodzené číslo $n > 1$ platí:

$$2^{n-1} (a^n + b^n) > (a + b)^n$$

6. Ak pre nezáporná reálne čísla x_1, x_2, \dots, x_n platí $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$, tak

$$(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \dots \cdot (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Dokážte.

7. Dokážte, že pre prirodzená čísla platí:

$$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

8. Dokážte, že pre každé nepárne (liché) prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2013$ deliteľný číslom 96.

DÔKAZY

1. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

- (a) $A \cap (A \cup B) = A$,
- (b) $A \cup (A \cap B) = A$,
- (c) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,
- (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,
- (e) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
- (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
- (g) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Výsledky: a) platí, b) platí, c) neplatí, d) neplatí, e) platí, f) neplatí, g) platí.

2. Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

- (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- (b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
- (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- (e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$
- (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- (g) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- (h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- (i) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
- (j) $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$
- (k) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$
- (l) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

Výsledky: a) platí, b) platí, c) platí, d) platí, e) platí, f) platí, g) platí, h) platí, i) platí, j) platí, k) neplatí, l) neplatí.