

# POTENČNÁ MNOŽINA, PRINCÍP INKLÚZIE A EXKLÚZIE A DIRICHLETOV PRINCÍP

1. Vymenujte prvky množín:

a)  $\mathcal{P}(\{1\})$ , b)  $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ , c)  $\mathcal{P}(\{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\})$ .

Výsledky: a)  $\{\emptyset, \{1\}\}$ , b)  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ,

c)  $\{\emptyset, \{\{\star\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}\}, \{\{\star\}, \Delta\}, \{\{1, 2\}, \Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\}\}$ .

2. O množine  $M$  vieme, že:  $|\mathcal{P}(M)| = 4$ ,  $\{\{5\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ,  $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(M)$ . Určte množinu  $M$ .

Výsledky:  $M = \{0, 5\}$ .

3. Koľko prvkov má množina  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ ?

Výsledky:  $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 4$ .

4. Zistite, či pre ľubovoľné množiny  $A, B$  platí nasledujúca rovnosť, prípadne, či sa rovnosť dá nahradiť inklúziou.

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

Výsledky: Rovnosť neplatí, neplatí ani jedna z inklúzií, všimnite si napr. takéto množiny  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2\}$ .

5. Koľko čísel zostane z čísel  $1, 2, \dots, 1000$  po vyškrtaní všetkých násobkov čísel

(a) 2, 6, 18 ?

(b) 4, 6, 32 ?

(c) 5, 18, 30 ?

(d) 2, 6, 15 ?

(e) 2, 3, 5, 7 ?

Výsledky: a) 500, b) 667, c) 756, d) 467, e) 228.

6. Určte počet prirodzených čísel  $n < 100$ , ktoré nie sú deliteľné druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.

Výsledky: 61.

7. Určte počet prirodzených čísel  $n < 100$ , ktoré nie sú deliteľné treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.

Výsledky: 84.

8. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov DEN, NOC?

Výsledky:  $16! - 2 \cdot \frac{16!}{3!} + \frac{16!}{5!}$ .

9. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HOP, PONK?

Výsledky:  $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!}$ .

10. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov BOK, MONK?

Výsledky:  $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$ .

11. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HLOD, HOP?

Výsledky:  $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$ .

12. Daná je množina obsahujúca 10 prirodzených čísel medzi 1 a 99 (vrátane). Dokážte, že existujú dve disjunktné neprázdne podmnožiny tejto množiny s rovnakým súčtom svojich prvkov.
13. Nech  $A$  je množina 19 navzájom rôznych prirodzených čísel, vybraných z aritmetickej postupnosti  $1, 4, 7, \dots, 100$ . Dokážte, že  $A$  musí obsahovať dve rôzne čísla, ktorých súčet je 104.
14. Nech  $A$  je množina obsahujúca 100 prirodzených čísel. Je možné vždy vybrať niekoľko prvkov z množiny  $A$  tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom 100?
15. Je daných 33 prirodzených čísel. Dokážte, že medzi nimi existujú aspoň 2 také čísla, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 32.