

RELÁCIE

1. Relácie R, S sú dané vymenovaním takto:

$$R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2]\}, S = \{[2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [4, 1]\}.$$

Určte: $R \circ S, S \circ R, R^{-1}, S^{-1}, R^{-1} \circ S^{-1}, (R \circ S)^{-1}, (S \circ R)^{-1}$.

Výsledky: $R \circ S = \{[2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 2], [4, 3]\},$
 $S \circ R = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3]\}, R^{-1} = \{[1, 1], [2, 1], [3, 1], [1, 2], [2, 2]\},$
 $S^{-1} = \{[1, 2], [2, 2], [3, 2], [1, 3], [2, 3], [1, 4]\},$
 $(R \circ S)^{-1} = \{[1, 2], [2, 2], [3, 2], [1, 3], [2, 3], [3, 3], [1, 4], [2, 4], [3, 4]\},$
 $(S \circ R)^{-1} = \{[1, 1], [2, 1], [3, 1], [1, 2], [2, 2], [3, 2]\}, R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}.$

2. Nech $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}, B = \{m \in \mathbb{N} : m \leq 12\}, R = \{[m, n] \in A \times B : n = 3m\},$
 $S = \{[m, n] \in B \times A : m - n = 2\}.$ Zapište relácie R, S vymenovaním prvkov. Zostrojte grafy relácií $R, S.$ Určte relácie $R \circ S, S \circ R, R^{-1}, S^{-1}.$

Výsledky: $R = \{[1, 3], [2, 6], [3, 9], [4, 12]\}, S = \{[3, 1], [4, 2], [5, 3] \dots [11, 9], [12, 10]\},$
 $R \circ S = \{[3, 3], [4, 6], [5, 9], [6, 12]\}, S \circ R = \{[1, 1], [2, 4], [3, 7], [4, 10]\},$
 $R^{-1} = \{[3, 1], [6, 2], [9, 3], [12, 4]\}, S^{-1} = \{[1, 3], [2, 4], [3, 5] \dots [9, 11], [10, 12]\}.$

3. Nech $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}, S = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}, T = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}\}.$
Zostrojte karteziánske grafy relácií $R, S, T.$ Určte relácie $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S.$
Zostrojte grafy relácií $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S.$

Výsledky: $R \circ S = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2x^2\}, S \circ R = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 4x^2\}, S \circ T = \{[x, y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = x\}, T \circ S =$
 $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = |x|\}, T \circ R = \{[x, y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = \sqrt{2x}\}, R \circ T = \{[x, y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2\sqrt{x}\}$

4. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ určte vymenovaním reláciu, ktorá je

- (a) symetrická, reflexívna, ale nie je tranzitívna,
- (b) reflexívna a tranzitívna, ale nie je symetrická,
- (c) tranzitívna, ale nie je reflexívna, ani ireflexívna,
- (d) tranzitívna, ale nie je symetrická, ani antisymetrická.

Výsledky:

- a) napr. $R_a = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [1, 2], [2, 1], [1, 3], [3, 1]\},$
- b) napr. $R_b = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [1, 2]\},$
- c) napr. $R_c = \{[1, 1]\},$
- d) napr. $R_d = \{[1, 1], [2, 2], [1, 2], [2, 1], [4, 3]\}.$

5. Nech $R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 1), (4, 2)\}.$ Nájdite $R^+.$

Výsledky: $R^+ = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}.$

6. Nájdite reláciu $S,$ pre ktorú platí $S^+ \neq S.$

Výsledky: napr. $S = \{[1, 2], [2, 1]\}.$

7. Nájdite reláciu $S,$ pre ktorú platí $S^+ = S.$

Výsledky: napr. $S = \{[1, 2]\}.$

8. Nájdite tranzitívnu reláciu $R,$ pre ktorú platí $R \circ R \neq R.$

Výsledky: napr. $R = \{[1, 2]\}.$

9. Nájdite neprázdnu tranzitívnu reláciu $R,$ pre ktorú platí $R \circ R = \emptyset.$

Výsledky: napr. $R = \{[1, 2]\}.$

10. Dokážte, že pre ľubovoľné relácie platí:

- (a) $R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2$,
- (b) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$,
- (c) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$,
- (d) $(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}, (R^{-1})^{-1} = R$,
- (e) $* R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} R \circ S_i, (\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.

11. Dokážte, že pre ľubovoľné relácie platí:

- (a) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2$,
- (b) $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq S_1 \circ R \cap S_2 \circ R$,
- (c) $R \circ S_1 \setminus R \circ S_2 \subseteq R \circ (S_1 \setminus S_2)$.

Dokážte, že v uvedených vzťahoch nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

12. Určte vymenovaním všetky rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

Výsledky: Všetkých možností je 15, treba si ich systematicky vypísať.

Sú to napr. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \dots, \{\{1, 2, 3, 4\}\}$,

13. Nájdite aspoň tri rôzne rozklady množiny \mathbb{Z} .

Výsledky: Napr. $\{\{0\}, \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}, \{m \in \mathbb{Z} : m < 0\}\}, \{\{2m : m \in \mathbb{Z}\}, \{2m + 1 : m \in \mathbb{Z}\}\}, \{\{3m : m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 1 : m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 2 : m \in \mathbb{Z}\}\}$.

14. Napíšte relácie ekvivalencie k nasledujúcim rozkladom

- (a) $S_1 = \{\{a, b, c, d\}\}$,
- (b) $S_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$,
- (c) $S_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

Výsledky:

a) $R_1 = \{a, b, c, d\}^2$,

b) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, b]\}$,

c) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$.

15. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ je daná relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3]\}$. Je relácia R reláciou ekvivalencie? V prípade kladnej odpovede nájdite rozklad, ktorý ekvivalencia určuje. V prípade zápornej odpovede určte jej reflexívny, symetrický a tranzitívny uzáver.

Výsledky: R nie je relácia ekvivalencie, nie je reflexívna ani tranzitívna.

$e(R) = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 4]\}$,

$R^+ = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [1, 3], [3, 1]\}$,

symetrický uzáver je totožný s R .

16. Zistite, ktoré z nasledujúcich relácií sú ekvivalencie na množině \mathbb{R} .

- (a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} = 1\}$,
- (b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\}$,
- (c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$,
- (d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^3\}$.

Výsledky:

- a) nie je relácia ekvivalencie, je porušená reflexívnosť,
- b) nie je relácia ekvivalencie, je porušená tranzitívnosť,
- c) je relácia ekvivalencie,
- d) je relácia ekvivalencie.

17. Na množine $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ je daná relácia \sim nasledovne:

$$a \sim b \iff 10a + b \text{ je prvočíslo.}$$

Zistite, či \sim je reláciou ekvivalencie na množine $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, v prípade kladnej odpovede nájdite jej rozklad.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená napr. reflexívnosť. Doporučujem nájsť prvok, pre ktorý reflexívnosť neplatí a zistiť, či zvyšné dve vlastnosti platia.

18. Nech X je ľubovoľná neprázdna množina. Na jej potenčnej množine $P(X)$ je daná relácia \sim nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Zistite, či \sim je reláciou ekvivalencie alebo usporiadania na množine $P(X)$.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená symetria. Je to relácia usporiadania.

19. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech E je relácia ekvivalencie. Potom relácia E^{-1} je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie platí.

20. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech E_1, E_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine. Potom relácia $E_1 \circ E_2$ je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušená napr. symetria.

21. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech R_1, R_2 sú relácie usporiadania na tej istej množine. Potom relácia $R_1 \circ R_2$ je tiež relácia usporiadania. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušená napr. antisymetria.

22. Nech $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Na množine $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$ je daná relácia \sim nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Ukážte, že relácia \sim je na množine $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$ reláciou usporiadania.

23. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich relácií sú zobrazenia:

- (a) $R_1 = \{[*], [\circ], [\circ, *], [\heartsuit, *], [\spadesuit, \heartsuit], [\circ, \heartsuit]\}$,
- (b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
- (c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y^4 = 1\}$,
- (d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y = 1\}$.

Výsledky: a)-c) nie sú zobrazenia (treba zdôvodniť), d) je zobrazenie (treba dokázať.)

24. Nech f je zobrazenie na množine \mathbb{R} dané predpisom $y = x^2 - 1$. Určte $f(\langle -1, 2 \rangle), f(\langle -1, 1 \rangle), f(\mathbb{R}), f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle), f^{-1}(\langle 0, 2 \rangle)$.

Výsledky: $f(\langle -1, 2 \rangle) = \langle -1, 3 \rangle, f(\langle -1, 1 \rangle) = \langle -1, 0 \rangle, f(\mathbb{R}) = \langle -1, \infty \rangle, f^{-1}(\langle -1, 1 \rangle) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle,$
 $f^{-1}(\langle 0, 2 \rangle) = \langle -\sqrt{3}, -1 \rangle \cup \langle 1, \sqrt{3} \rangle.$

25. Určte všetky bijekcie množiny $A = \{1, 2, 3\}$ na množinu $\{a, b, c\}$. Výsledky: všetkých bijekcií je $3! = 6$, jedna z ich je napr. $\{[1, a], [2, b], [3, c]\}$, ostatné si skúste systematicky vypísať.