

VÝROKOVÝ A PREDIKÁTOVÝ POČET

1. Zistite, či nasledujúce formuly sú tautológie:

- (i) $(A \Leftrightarrow C) \implies ((B \Leftrightarrow C) \implies (A \Leftrightarrow B))$
- (ii) $(A \Leftrightarrow B) \implies (A \wedge C \Leftrightarrow C \wedge B)$
- (iii) $(A \Leftrightarrow B) \implies (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
- (iv) $(A \Leftrightarrow B) \implies (B \implies A)$
- (v) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (vi) $(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- (vii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$
- (viii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- (ix) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
- (x) $(A \wedge \neg A) \wedge B \Leftrightarrow A \wedge \neg A$
- (xi) $(A \wedge \neg A) \vee B \Leftrightarrow B$
- (xii) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

Výsledky: Tautológie sú: (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (viii), (ix), (x).

2. V dielni sú tri stroje, ktoré pracujú podľa týchto podmienok: Ak pracuje prvý stroj, pracuje i druhý stroj. Ak nepracuje prvý stroj, nepracuje ani tretí stroj. Aké sú možnosti pre prácu tejto trojice strojov?

Výsledky: Buď pracujú všetky tri stroje, alebo ani jeden z nich, alebo iba 2. stroj, alebo 1. a 2. stroj zároveň.

3. Pred sudcom stáli traja obžalovaní. Vyšetovaním sa zistilo, že:

- a) Ak je A nevinný alebo B vinný, tak C je vinný.
- b) Ak A je nevinný, tak nevinný je aj C .

Koho z nich má sudca odsúdiť?

Výsledky: Sudca môže obviniť A .

4. Detektív Sherlock Holmes zistil:

- a) Ak A je vinný a B je nevinný, tak C je vinný.
- b) C nikdy nie je v akcii sám.
- c) A nikdy nespolupracuje s C .
- d) Mimo A, B, C nie sú do prípadu zapletené ďalšie osoby.

Koho obvinil Sherlock Holmes? Koho môže s istotou prepustiť?

Výsledky: Sudca môže obviniť B , prepustiť nemôže nikoho.

5. Nech x, y, z sú reálne premenné. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zápisov sú termy, ktoré výroková forma a ktoré výrok nad množinou \mathbb{R} .

- (a) 3,
- (b) $3x$,
- (c) $3x - y$,
- (d) $3x > y$,
- (e) $\sqrt{|x + z|} - 3x$,
- (f) $\forall x \forall y: (x \cdot z = y \cdot z) \Rightarrow x = y$,
- (g) $\forall x: x - y < y$,
- (h) $\exists x \forall y: x + y = 0$,
- (i) $\forall x \exists y: x + y = 0$.

Výsledky: Termy sú a), b), c), e); výrokové formy sú d), f), g); výroky sú h), i).

6. Formuly predikátového počtu znegujte, potom prepíšte do bežneho jazyka aj pôvodnú formulu, aj jej negáciu:

- (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x + y = 0$,
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$,
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \neq -1$,
- (d) $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 = -1$,
- (e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: y > x$,
- (f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: y \geq x$,
- (g) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x > y$,
- (h) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x \geq y$.

7. Formulami predikátového počtu zapíšte:

- (a) Rovnica $x^2 + 1 = 0$ nemá na množine reálnych čísel riešenie.
- (b) Rovnica $x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$ má na množine reálnych čísel aspoň jedno riešenie.
- (c) Pre niektoré reálne čísla platí $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.
- (d) Pre sčítanie reálnych čísel platí komutatívny zákon.
- (e) Pre násobenie reálnych čísel platí asociatívny zákon.
- (f) Množina prirodzených čísel nie je zhora ohraničená.
- (g) Neexistuje najväčšie reálne číslo.
- (h) Prirodzené číslo je deliteľné šiestimi, práve vtedy, keď je deliteľné dvomi a tromi.

Výsledky: a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0$, b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$, c) $\exists a, b \in \mathbb{R}: (a + b)^3 = a^3 + b^3$, d) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$, e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, f) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: m > n$, g) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: y > x$, h) $\forall n \in \mathbb{N}: 6|n \iff 2|n \wedge 3|n$.