Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & - & 2y & + & 6z & = & 7 \end{array}$$

Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x &+ y = 2 \\ x &- y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & - & 2y & + & 6z & = & 7 \end{array}$$

- *Čo je sústava rovníc?*
- *Čo vyjadruje sústava rovníc?*
- *Ako ju riešiť?*
- *Čo môže byť výsledkom sústavy rovníc?*

Typy sústav:

Sústavy lineárnych rovníc

Typy sústav:

- homogénne (na pravých stranách rovníc sú iba nuly)
- nehomogénne (na pravých stranách rovníc je aspoň jedna nenulová hodnota)

- **Definícia.** Nech $I = \{1, 2, \cdots, m\}, J = \{1, 2, \cdots, n\}$. Maticou typu $m \times n$ nad množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ nazývame zobrazenie $A : I \times J \to \mathbb{R}$. Obraz usporiadanej dvojice $[i, j]$ označujeme a_{ij} a hovoríme, že je prvok matice. Schématicky zapisujeme maticu v tvare tabuľky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ak $m = n$, hovoríme o štvorcovej matici, ak $m \neq n$, tak sa jedná o obdĺžnikovú maticu.

Matice, základné pojmy

- **vedúci prvok - pivot** -prvý nenulový prvok v riadku (nemusí vždy existovať)
- **nulová matica** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- **diagonálna matica** $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$
- **jednotková matica** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Zrejme diagonálna aj jednotková matica sú štvorcové.

Matice, základné pojmy

Schodovitý tvar matice:

Matica je v schodovitom tvare ak:

- *nulové riadky (ak existujú) sú vždy umiestnené na konci,*
- *v dvoch po sebe idúcich riadkoch je vždy pivot na nižšom riadku viac vpravo ako pivot na vyššom riadku.*

Homogénne sústavy lineárnych rovníc, príklad

Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

Homogénne sústavy lineárnych rovníc, príklad

Riešte sústavu rovníc:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}
$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť pomocou matice sústavy-každý riadok odpovedá jednej rovnici sústavy. Budeme využívať **elementárne riadkové operácie (ero):**

- výmena dvoch riadkov,
- vynásobenie rovnice nenulovým číslom,
- pripočítanie ľubovolného násobku jednej rovnice k inej rovnici.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc, príklad

Riešte sústavu rovníc:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}
$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť pomocou matice sústavy-každý riadok odpovedá jednej rovnici sústavy. Budeme využívať **elementárne riadkové operácie (ero):**

- výmena dvoch riadkov,
- vynásobenie rovnice nenulovým číslom,
- pripočítanie ľubovolného násobku jednej rovnice k inej rovnici.

Našou snahou je upraviť maticu na jej schodovitý (trojuholníkový) tvar.

- Sústavu prepíšeme do matice:
  - koeficienty sústavy sú prvky matice (nezabudnite na nulové koeficienty)
  - pravú stranu sústavy píšeme za čiaru

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Pomocou elementárych riadkových operácií upravíme maticu na schodovitý tvar.
Najskôr vynásobením prvého riadku vhodným číslom a následným pripočítaním k druhému riadku dosiahneme nulu na prvom mieste druhého riadku. Zrejme, to vhodné číslo bude -1.
Podobným spôsobom dostaneme nuly na prvom mieste aj v treťom a štvrtom riadku. Teda pod pivotom prvého riadku dostaneme nulový stĺpec:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Teraz sa zameriame na pivota v druhom až štvrtom riadku. Pre príjemnejšie počítanie by bolo vhodné mať ako pivota v druhom riadku číslo 1, v našom prípade stačí vymeniť riadky a ďalej pokračujeme tak, ako v predchádzajúcom kroku-budeme sa snažit stĺpec pod pivotom druhého riadku vynulovať. A takto pokračujeme, kým matica nie je v schodovitom tvare.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Posledná matica odpovedá sústave:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\
 & & & & & & x_4 & & & = & 0
\end{array}
$$

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

- Začneme od poslednej rovnice. Z nej dostaneme $x_4 = 0$.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

- Začneme od poslednej rovnice. Z nej dostaneme $x_4 = 0$.
- Posunieme sa o riadok vyššie. Z druhej rovnice (po dosadení za x_4) vidíme, že $x_2 = x_3$.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

- Začneme od poslednej rovnice. Z nej dostaneme $x_4 = 0$.
- Posunieme sa o riadok vyššie. Z druhej rovnice (po dosadení za x_4) vidíme, že $x_2 = x_3$.
- Treba si uvedomiť, že máme 5 neznámych a iba tri rovnice, preto si musíme zvoliť dva (dostaneme z rozdielu $5 - 3$) parametre a ostatné neznáme pomocou nich vyjadríme.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

- Začneme od poslednej rovnice. Z nej dostaneme $x_4 = 0$.
- Posunieme sa o riadok vyššie. Z druhej rovnice (po dosadení za x_4) vidíme, že $x_2 = x_3$.
- Treba si uvedomiť, že máme 5 neznámych a iba tri rovnice, preto si musíme zvoliť dva (dostaneme z rozdielu $5 - 3$) parametre a ostatné neznáme pomocou nich vyjadríme.
- Zvolíme napr. $x_2 = t$, potom si musíme uvedomiť, že aj $x_3 = t$. Takže ďalší parameter môže byť napr. $x_5 = s$, podobne dobrý výber by bol aj $x_1 = s$, naopak $x_3 = s$ by zmysel nemal. Toto si dobre premyslite.

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

- Začneme od poslednej rovnice. Z nej dostaneme $x_4 = 0$.
- Posunieme sa o riadok vyššie. Z druhej rovnice (po dosadení za x_4) vidíme, že $x_2 = x_3$.
- Treba si uvedomiť, že máme 5 neznámych a iba tri rovnice, preto si musíme zvoliť dva (dostaneme z rozdielu $5 - 3$) parametre a ostatné neznáme pomocou nich vyjadríme.
- Zvolíme napr. $x_2 = t$, potom si musíme uvedomiť, že aj $x_3 = t$. Takže ďalší parameter môže byť napr. $x_5 = s$, podobne dobrý výber by bol aj $x_1 = s$, naopak $x_3 = s$ by zmysel nemal. Toto si dobre premyslite.
- Z prvej rovnice potom dostaneme $x_1 = s - t$ (ak sme predtým dali $x_5 = s$). Riešením je množina $\{[s-t, t, t, 0, s]; s, t \in \mathbb{R}\}$.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

- Všimnite si, že $[0, 0, 0, 0, 0]$ je riešením sústavy.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

- Všimnite si, že $[0, 0, 0, 0, 0]$ je riešením sústavy.
- Vyskúšajte si, že ak $[a, b, c, d, e]$ je riešením sústavy, tak aj $[p.a, p.b, p.c, p.d, p.e]$, kde $p \in \mathbb{R}$, je riešením sústavy.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

- Všimnite si, že $[0, 0, 0, 0, 0]$ je riešením sústavy.
- Vyskúšajte si, že ak $[a, b, c, d, e]$ je riešením sústavy, tak aj $[p.a, p.b, p.c, p.d, p.e]$, kde $p \in \mathbb{R}$, je riešením sústavy.
- Ďalej, ak $[a, b, c, d, e]$ a $[k, l, m, n, o]$ sú riešenia sústavy, tak potom aj $[a + k, b + l, c + m, d + n, e + o]$ je riešením sústavy.

Homogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

- Všimnite si, že $[0, 0, 0, 0, 0]$ je riešením sústavy.
- Vyskúšajte si, že ak $[a, b, c, d, e]$ je riešením sústavy, tak aj $[p.a, p.b, p.c, p.d, p.e]$, kde $p \in \mathbb{R}$, je riešením sústavy.
- Ďalej, ak $[a, b, c, d, e]$ a $[k, l, m, n, o]$ sú riešenia sústavy, tak potom aj $[a + k, b + l, c + m, d + n, e + o]$ je riešením sústavy.
- Tieto tri pekné vlastnosti majú všetky **homogénne** sústavy lin. rovníc.

Nehomogénne sústavy lineárnych rovníc, príklad

Riešte sústavu rovníc:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\
2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\
5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12
\end{array}
$$

Riešte sústavu rovníc:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\
2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\
5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12
\end{array}
$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť podobne ako homogénnu sústavu.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\
2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\
1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\
5 & 18 & 4 & 5 & 12
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\
0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\
0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\
0 & 3 & -21 & 15 & -3
\end{array}\right) \sim
$$

Nehomogénne sústavy lin. rovníc, príklad-pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \end{array}$$

Znovu postupujeme ako pri riešení homogénnej sústavy. Teraz máme 4 neznáme a iba dve rovnice, preto si dve (dostaneme z rozdielu $4-2$) neznáme zvolíme a ostatné pomocou nich vyjadríme. Nech teda $x_3 = s, x_4 = t$, potom z druhej rovnice dostaneme $x_2 = 7s - 5t - 1$ a z prvej rovnice je $x_1 = 17t - 26s + 6$. Riešením je množina $\{[17t - 26s + 6, 7s - 5t - 1, s, t]; s, t \in \mathbb{R}\}$. Pekné vlastnosti, ktoré platili pri homogénnych sústavách, neplatia pri nehomogénnych.

Sústavy s parametrom, príklad

V $\mathbb{R}$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Sústavy s parametrom, príklad

V $\mathbb{R}$ *riešte sústavu rovníc s parametrom* a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Riešenie. Najprv vymeníme riadky tak, aby v prvom riadku na prvom mieste nebol parameter, potom upravujeme maticu na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \end{array}\right) \sim$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & 1-a^3+a-a^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & (2+a).(1-a) & (1-a).(1+a)^2 \end{array}\right).$$

Z posledného riadku dostávame, že

$$(a+2).(1-a) \cdot z = (1-a) \cdot (a+1)^2.$$

Čo to znamená?

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Ak $(a+2).(1-a) \neq 0$, tak potom $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Ak $(a+2).(1-a) \neq 0$, tak potom $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

- Z posledného riadku dostaneme

$$z = \frac{(1-a)\cdot(a+1)^2}{(a+2).(1-a)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Ak $(a+2).(1-a) \neq 0$, tak potom $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

- Z posledného riadku dostaneme

$$z = \frac{(1-a)\cdot(a+1)^2}{(a+2).(1-a)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

- Po dosadení do druhého riadku dostaneme

$$y = \frac{1}{a+2}.$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Ak $(a+2).(1-a) \neq 0$, tak potom $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

- Z posledného riadku dostaneme
$$z = \frac{(1-a)\cdot(a+1)^2}{(a+2).(1-a)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$
- Po dosadení do druhého riadku dostaneme
$$y = \frac{1}{a+2}.$$
- Po dosadení do prvého riadku dostaneme
$$x = -\frac{a+1}{a+2}.$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Ak $(a+2).(1-a) \neq 0$, tak potom $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

- Z posledného riadku dostaneme
$$z = \frac{(1-a) \cdot (a+1)^2}{(a+2).(1-a)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$
- Po dosadení do druhého riadku dostaneme
$$y = \frac{1}{a+2}.$$
- Po dosadení do prvého riadku dostaneme
$$x = -\frac{a+1}{a+2}.$$

Teda pre $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ je riešením sústavy trojica $\left[-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right]$.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Čo ak je $(a+2).(1-a)=0$? Teda, čo ak je $a=-2$ alebo $a=1$? Pre tieto dva prípady musíme sústavu vyriešiť, aby sme dostali úplné riešenie sústavy s parametrom. Teda postupne dosadíme za parameter a a vyriešime sústavy, teraz už bez parametra.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

- Pre $a = -2$, dostaneme sústavu

$$\begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & -2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & -2z & = & 4 \end{array}$$

matica prislúchajúca tejto sústave je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

- Maticu upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Pokračujeme:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sústava prislúchajúca takejto matici nemá riešenie -poslednému riadku prislúcha rovnica: $0.x + 0.y + 0.z = 1$ a taká trojica, ktorá by vyhovovala, neexistuje.
Porovnajte si to s homogénnymi sústavami. Môže tam nastať takáto situácia? Čo sa pri úpravách na schodovitý tvar deje s pravou stranou homogénnych sústav?

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

- Pre $a = 1$, dostaneme sústavu

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

matica prislúchajúca tejto sústave je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Maticu upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Teda sústava má nekonečne veľa riešení, máme tri neznáme a len jeden nenulový riadok. Môžeme si napr. zvoliť $y = p$ a $z = q$ a x dopočítame z rovnice prislúchajúcej jedinému nenulovému riadku ($x + y + z = 1$), teda vyhovuje každá trojica $[1 - p - q, p, q]$, kde $p, q \in \mathbb{R}$.