Klasifikácia kužeľosečiek

- všeobecná rovnica kužeľosečky:

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

- Ako zistíme typ kužeľosečky?
- Čo už vieme?
    - úprava na stredový tvar (prednaska11.pdf)
- Doteraz sme pracovali s rovnicou bez člena $2bxy$.

Klasifikácia kuželosečiek

Rovnicu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

môžeme prepísať takto:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Našim cieľom je nájsť takú transformáciu, aby sme dostali kanonický tvar, teda

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

teda budeme sa snažiť zistiť, čo sa skrýva za otáznikmi.

Klasifikácia kuželosečiek

Na prednáške bolo vysvetlené ako sa postupne transformáciami dostaneme k výslednej matici, teda hľadáme vhodné posunutie, aby sme sa zbavili lineárnych členov (posúvame stred (ak existuje) do počiatku súr. systému) a na záver hľadáme vhodný uhol, aby po otočení boli hlavné osi rovnobežné s o_x, o_y.

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \overset{posunutie}{\rightarrow} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \overset{oto\check{c}enie}{\rightarrow} \begin{pmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Ešte stále nevieme, čo bude na diagonále výslednej matice.

Pomocné, ale veľmi dôležité výpočty

Vypočítame determinanty:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Klasifikácia kužeľosečiek-kanonické rovnice

Pri vhodnej zmene sústavy súradníc bude mať matica kužeľosečky tvar:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & m \\ t_{12} & t_{22} & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Po úpravách (oprášime vedomosti o vlastných číslach, podobných maticach a diagonalizácii):

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

po vynásobení:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Z takého tvaru rovnice už nebude problém určiť druh kužeľosečky. A λ_1, λ_2 vieme určiť aj z pôvodnej matice. **Pozor, δ môže byť aj nulová, potom má rovnica iný tvar!**

Klasifikácia kužeľosečiek

- stred kužeľosečky (čo to je a ako ho hľadať?)
- stredové a nestredové kužeľosečky (ako ich rozlíšiť?)
- singulárne body (čo to je?)
- regulárne a singulárne kužeľosečky (ako ich rozlíšiť?)

Definícia. Bod M nazveme **stredom kužeľosečky**, ak pre ľubovolný bod X_1 kužeľosečky existuje bod X_2 kužeľosečky tak, že bod M je stred úsečky X_1X_2.

Definícia. Bod M nazveme **stredom kužeľosečky**, ak pre ľubovolný bod X_1 kužeľosečky existuje bod X_2 kužeľosečky tak, že bod M je stred úsečky X_1X_2.

Veta. Bod $M = [m, n]$ je stredom kužeľosečky, ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Klasifikácia kužeľosečiek-stredové kužeľosečky

Definícia. Bod M nazveme **stredom kužeľosečky**, ak pre ľubovolný bod X_1 kužeľosečky existuje bod X_2 kužeľosečky tak, že bod M je stred úsečky X_1X_2.

Veta. Bod $M = [m, n]$ je stredom kužeľosečky, ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Definícia. Kužeľosečka, ktorá má jediný stred, sa nazýva **stredová**.

Klasifikácia kužeľosečiek-stredové kužeľosečky

Definícia. Bod M nazveme **stredom kužeľosečky**, ak pre ľubovolný bod X_1 kužeľosečky existuje bod X_2 kužeľosečky tak, že bod M je stred úsečky X_1X_2.
Veta. Bod $M = [m, n]$ je stredom kužeľosečky, ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Definícia. Kužeľosečka, ktorá má jediný stred, sa nazýva **stredová**.
Veta. Kužeľosečka je stredová práve vtedy, keď $\delta \neq 0$.

Klasifikácia kužeľosečiek-singulárne kužeľosečky

Definícia. Bod kužeľosečky $M = [m, n]$ nazveme jej **singulárnym bodom** ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Klasifikácia kužeľosečiek-singulárne kužeľosečky

Definícia. Bod kužeľosečky $M = [m, n]$ nazveme jej **singulárnym bodom** ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Veta. Bod M je singulárnym bodom kužeľosečky práve vtedy, keď na kužeľosečke leží a zároveň je jej stredom.

Klasifikácia kužeľosečiek-singulárne kužeľosečky

Definícia. Bod kužeľosečky $M = [m, n]$ nazveme jej **singulárnym bodom** ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Veta. Bod M je singulárnym bodom kužeľosečky práve vtedy, keď na kužeľosečke leží a zároveň je jej stredom.
Definícia. Kužeľosečka sa nazýva **singulárna** keď $\Delta = 0$.
Ak je $\Delta \neq 0$, potom hovoríme o **regulárnej** kužeľosečke.

Klasifikácia kužeľosečiek-singulárne kužeľosečky

Definícia. Bod kužeľosečky $M = [m, n]$ nazveme jej **singulárnym bodom** ak jeho súradnice vyhovujú sústave rovníc:

$$a.m + b.n + d = 0,$$

$$b.m + c.n + e = 0.$$

Veta. Bod M je singulárnym bodom kužeľosečky práve vtedy, keď na kužeľosečke leží a zároveň je jej stredom.
Definícia. Kužeľosečka sa nazýva **singulárna** keď $\Delta = 0$.
Ak je $\Delta \neq 0$, potom hovoríme o **regulárnej** kužeľosečke.
Veta. Ak kužeľosečka má singulárny bod, potom je singulárna.

Klasifikácia kuželosečiek

- Regulárne stredové ($\Delta \neq 0, \delta \neq 0.$)
- Regulárne nestredové ($\Delta \neq 0, \delta = 0.$)
- Singulárne ($\Delta = 0.$)

Klasifikácia kuželosečiek

Ako určíme typ kuželosečky?

- $\Delta \neq 0, \delta > 0 \Rightarrow$ kuželosečka je elipsa
- $\Delta \neq 0, \delta < 0 \Rightarrow$ kuželosečka je hyperbola
- $\Delta \neq 0, \delta = 0 \Rightarrow$ kuželosečka je parabola
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ je to nevlastná kuželosečka

Klasifikácia kuželosečiek-príklad

Vyšetrite kuželosečku:

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0.$$

Riešenie. Určíme determinanty Δ, δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -50 \neq 0,$$

teda sa jedná o regulárnu kuželosečku.

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -50 < 0,$$

kuželosečka je stredová a už vieme, že je to hyperbola.

Príklad

Nájdeme vlastné čísla "malej" matice:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Korene charakteristickej rovnice sú $-10, 5$. Číslo

$$\frac{\Delta}{\delta} = 1.$$

Potom kanonický tvar kuželosečky je

$$-10x^2 + 5y^2 + 1 = 0$$

teda

$$\frac{x^2}{\frac{1}{10}} - \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1.$$

Príklad

Nájdeme polohu tejto kužeľosečky. Začneme hľadaním súradníc stredu $S = [m, n]$. Zrejme súradnice stredu vyhovujú sústave:

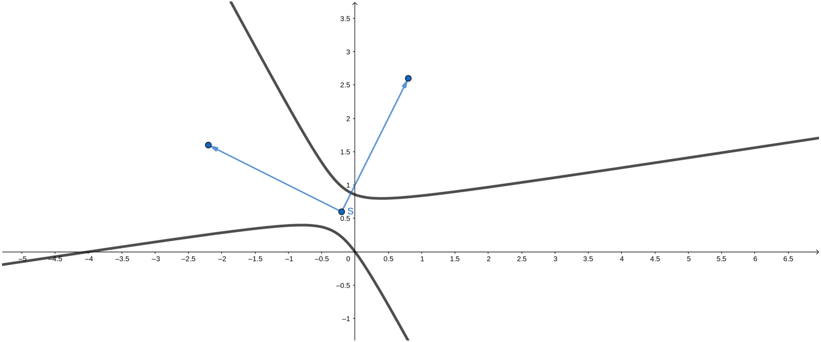
$$\begin{array}{rrl} 2m & -6n & = -4 \\ -6m & -7n & = -3 \end{array}$$

Stred S má súradnice $\left[-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$.
Hlavné smery sú smery vlastných vektorov $\overline{u_1}, \overline{u_2}$ postupne v rovnakom poradí, v akom sme λ_1, a λ_2 použili v rovnici kužeľosečky. Pre hlavné smery dostávame:

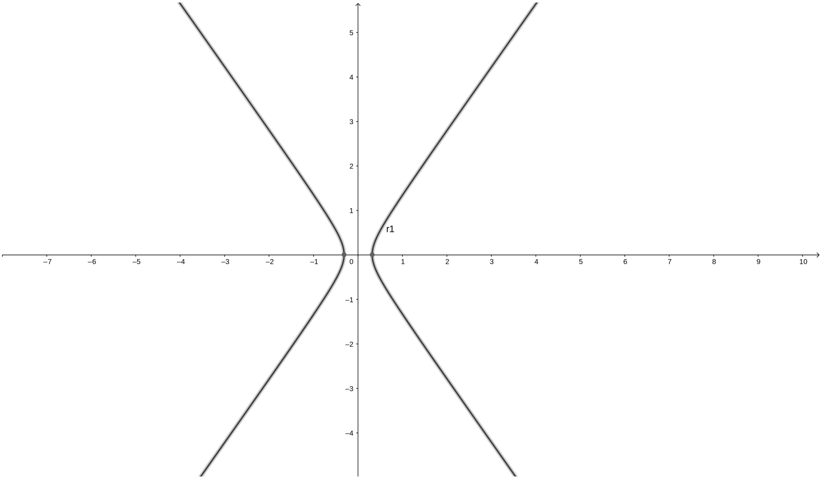
$$\overline{u_1} = [1, 2], \overline{u_2} = [-2, 1].$$

Matica bola symetrická, preto tieto vektory sú nielen lin. nezávislé, ale aj ortogonálne. Stredom a hlavnými smermi je poloha kvadriky určená. Obrázky pôvodnej a transformovanej kužeľosečky sú na ďalších stránkach.

Klasifikácia kužeľosečiek-príklad



Klasifikácia kuželosečiek-príklad



Nestredové regulárne kuželosečky-paraboly

$$\Delta \neq 0, \delta = 0.$$

Matica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ je symetrická, teda má reálne vlastné čísla, má nulový determinant, preto aj jedno z jej vlastných čísel bude nulove. Potom

$$\lambda_1 \neq 0, \overline{u} = [u_1, u_2] \text{ je jej vl. vektor}$$

$$\lambda_2 = 0, \overline{v} = [v_1, v_2] \text{ je jej vl. vektor.}$$

Kanonický tvar pre parabolu bude: $\lambda_1 . x^2 + 2p'y = 0$,
kde $p' > 0, p'^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1}$.
Os paraboly má rovnicu

$$(x, y, 1). \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Vrchol V je priesečník hl. osi a paraboly a $F = V + \frac{1}{2} p . \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||}, p = \frac{p'}{\lambda_1}$.

Klasifikácia kužeľosečiek-príklad

Vyšetrite kužeľosečku:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0.$$

Riešenie. Určíme determinanty Δ, δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

teda sa jedná o regulárnu kužeľosečku.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kužeľosečka nie je stredová, je to parabola.

Príklad

Nájdeme vlastné čísla "malej" matice:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Korene charakteristickej rovnice sú $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Keďže $\delta = 0$, tak sme jedno nulové vlastné číslo očakávali. Potom

$$p'^2 = \frac{-\Delta}{\lambda_1} = \frac{-(-4)}{2} = 2,$$

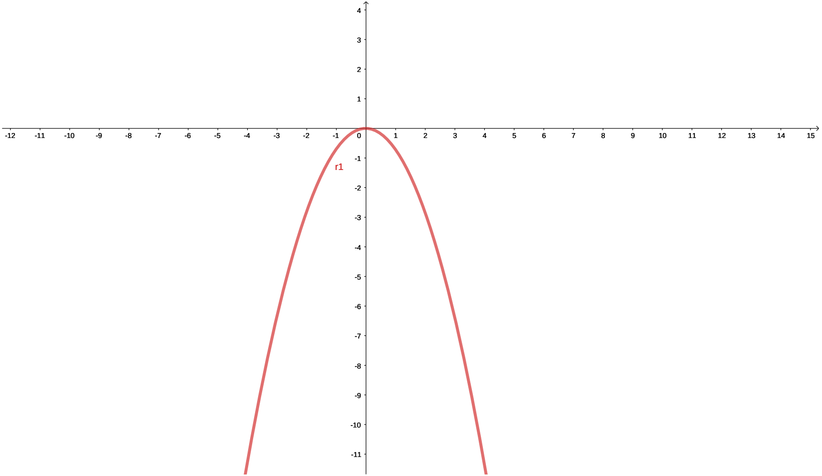
keďže p' je vzdialenosť, tak $p' > 0$, preto $p' = \sqrt{2}$. Kanonický tvar kužeľosečky je

$$\lambda_1 x'^2 + 2p'y' = 0,$$

po dosadení dostaneme

$$2x'^2 + 2\sqrt{2}y' = 0.$$

Parabola pred posunutím a otočením:



Príklad

Ešte nájdeme polohu tejto kužeľosečky, teda jej vrchol a hlavnú os. Hlavné smery sú smery vlastných vektorov $\overline{u}, \overline{v}$. Pre hlavné smery dostávame:

$$\overline{u} = [1, -1], \overline{v} = [1, 1].$$

Teda hlavná os bude rovnobežná s vektorom $\overline{u}$ (je to hl. vektor pre λ_1) a dotyčnica paraboly bude rovnobežná s vektorom $\overline{v}$ (je to hl. vektor pre λ_2). Matica bola symetrická, preto tieto vektory sú nielen lin. nezávislé, ale aj ortogonálne. Rovnica hlavnej osi je

$$(x, y, 1). \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

teda

$$(x, y, 1) \ . \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

potom pre hlavnú os dostávame rovnicu

$$y = x + 1.$$

Príklad

Vrchol V je priesečník paraboly a jej osi, teda riešime sústavu

$$x - y = 1 \wedge x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0.$$

Pre súradnice vrcholu V dostaneme

$$y = \frac{9}{4}, x = \frac{5}{4}.$$

Pre ohnisko F máme vzťah

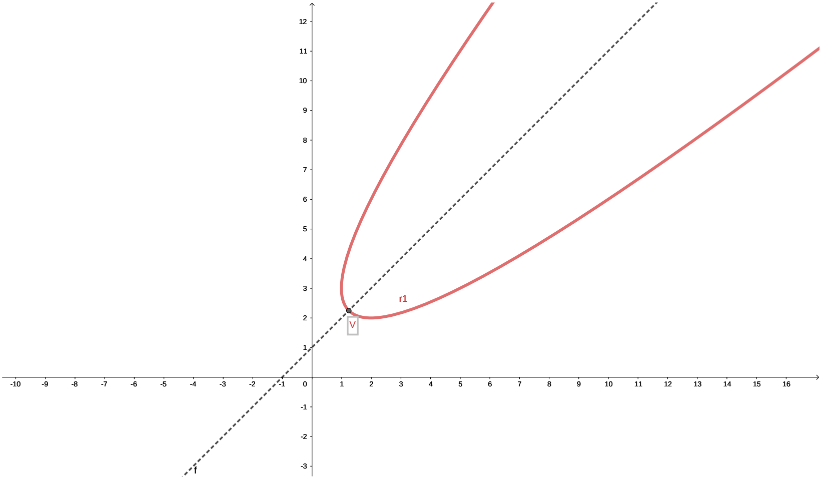
$$F = V + \frac{1}{2} . \frac{p'}{\lambda_1} . \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||},$$

po dosadení je

$$F = \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] + \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{[1, 1]}{\sqrt{2}} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Klasifikácia kuželosečiek-príklad

Parabola posunutá a otočená:



Klasifikácia kvadrík-kanonické rovnice

Prechádzame k do priestoru $V_3(\mathbb{R})$.

- všeobecná rovnica kvadriky:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

- Ako zistíme typ kvadriky?
- Čo už vieme?
  - prieseky (prednaska12.pdf)
- Doteraz sme pracovali s rovnicou bez členov

$$2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz.$$

- Budeme postupovať podobne ako pri kužeľosečkách.

Klasifikácia kvadrík

- Regulárne stredové kvadriky: elipsoid, jednodielny a dvojdielny hyperboloid
- Regulárne nestredové kvadriky: eliptický a hyperbolický paraboloid
- Singulárne stredové kvadriky: kuželové plochy
- Singulárne nestredové kvadriky: valcové plochy

Klasifikácia kvadrík-kanonické rovnice

Rovnicu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

prepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Označíme si determinanty:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Klasifikácia kvadrík-kanonické rovnice

Pri vhodnej zmene sústavy súradníc bude mať matica kvadriky tvar:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ m & n & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & m \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & n \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Po úpravách:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{A_{44}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0$$

Klasifikácia kvadrík-kanonické rovnice

- Regulárne stredové kvadriky: $A_{44} \neq 0, \Delta \neq 0$
- Regulárne nestredové kvadriky: $A_{44} = 0, \Delta \neq 0$
- Singulárne stredové kvadriky: $A_{44} \neq 0, \Delta = 0$
- Singulárne nestredové kvadriky: $A_{44} = 0, \Delta = 0$

Stredové regulárne kvadriky

- $A_{44} \neq 0, \Delta \neq 0$
- $A_{44} = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$
- Trojosový elipsoid:
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \frac{\Delta}{A_{44}} < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Imaginárný elipsoid:
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \frac{\Delta}{A_{44}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
- Dvojdielny hyperboloid:
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \frac{\Delta}{A_{44}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
- Jednodielny hyperboloid:
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \frac{\Delta}{A_{44}} < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Stredové singulárne kvadriky

- $A_{44} \neq 0, \Delta = 0$
- Imaginárna kuželová plocha:
  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ majú rovnaké znamienka:
  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$
- Kuželová plocha:
  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Nestredové regulárne kvadriky

- $A_{44} = 0, \Delta \neq 0$
- $\Delta = det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 G^2$
- Eliptický paraboloid:
  λ_1, λ_2 majú rovnaké znamienka a $\lambda_3 = 0, G < 0 \quad (G > 0)$:
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z$
- hyperbolický paraboloid:
  λ_1, λ_2 majú rôzne znamienka a $\lambda_3 = 0, G < 0 \quad (G > 0)$:
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$

Nestredové singulárne kvadriky

- $A_{44} = 0, \Delta = 0$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$
- Eliptická valcová plocha:
  $\lambda_1, \lambda_2,$ majú rovnaké znamienka, $\lambda_3 = 0, k < 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Imaginárna eliptická valcová plocha:
  $\lambda_1, \lambda_2,$ majú rovnaké znamienka, $\lambda_3 = 0, k > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Nestredové singulárne kvadriky

- Hyperbolické valcové plochy:
  $\lambda_1, \lambda_2,$ majú rôzne znamienka, $\lambda_3 = 0, k \neq 0$:
  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- priamka:
  $\lambda_1, \lambda_2,$ majú rovnaké znamienka, $\lambda_3 = 0, k = 0$:
  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$
- imaginárne rôznobežné roviny:
  $\lambda_1, \lambda_2,$ majú rôzne znamienka, $\lambda_3 = 0, k = 0$:
  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Nestredové singulárne kvadriky

- $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$
- Dve rovnobežné roviny:
  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, k\lambda_1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1$
- Imaginárne rovnobežné roviny:
  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, k\lambda_1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = -1$
- Dvojnásobné roviny:
  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, k = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 0$

Nestredové singulárne kvadriky

- $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$
- Parabolická valcová plocha:
  $k \neq 0, k\lambda_1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 2kz$ $k \neq 0, k\lambda_1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = -2kz$

Príklad

Vyšetrite kvadriku:
$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0.$

Riešenie. Určíme determinanty Δ, A_{44} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -11 \\ -2 & 6 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -11 & 12 & 1 & 30 \end{vmatrix} = -2^2.3^5 \neq 0,$$

teda sa jedná o regulárnu kvadriku.

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.3^4 \neq 0,$$

kvadrika je regulárna a stredová.

Príklad

Nájdeme vlastné čísla "malej" matice:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Korene charakteristickej rovnice sú $3, 6, 9$. Číslo

$$\frac{\Delta}{A_{44}} = \frac{-2^2.3^5}{2.3^4} = -6.$$

Potom kanonický tvar kvadriky je

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0$$

teda

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = 1.$$

Jedná sa o trojosový elipsoid.

Príklad

Nájdeme polohu tejto kvadriky. Začneme hľadaním súradníc stredu $S = [m, n, p]$ Zrejme súradnice stredu vyhovujú sústave:

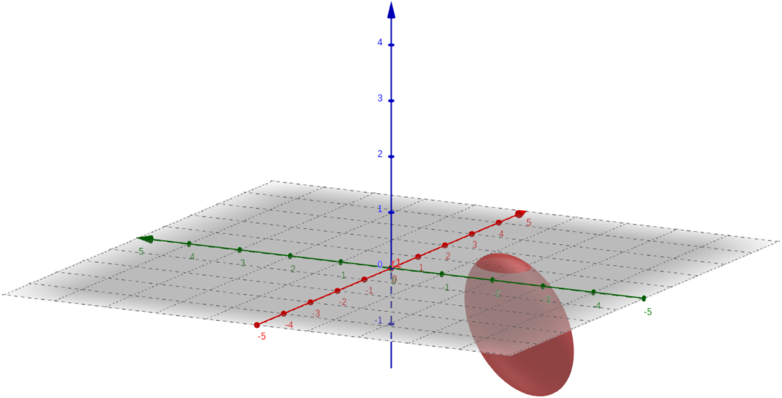
$$\begin{array}{ccccc} 7m & -2n & + & -11 & = 0 \\ -2m & +6n & -2p & +12 & = 0. \\ & -2n & +5p & +1 & = 0 \end{array}$$

Stred S má súradnice $[1, -2, -1]$.
Hlavné smery sú smery vlastných vektorov $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ postupne v rovnakom poradí, v akom sme λ_1, λ_2 a λ_3 použili v rovnici kvadriky. Pre hlavné smery dostávame:

$$\overline{u_1} = [1, 2, 2], \overline{u_2} = [2, 1, -2], \overline{u_3} = [-2, 2, -1].$$

Stredom a hlavnými smermi je poloha kvadriky určená. Obrázky pôvodnej a transformovanej kvadriky sú na ďalších stránkach.

Príklad



Príklad