Matice-užitočný pomocník nielen pri riešení sústav

- **Definícia.** Nech $I = \{1, 2, \cdots, m\}$, $J = \{1, 2, \cdots, n\}$. Maticou typu $m \times n$ nad množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ nazývame zobrazenie $A : I \times J \to \mathbb{R}$. Obraz usporiadanej dvojice $[i, j]$ označujeme a_{ij} a hovoríme, že je prvok matice. Schématicky zapisujeme maticu v tvare tabuľky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ak $m = n$, hovoríme o štvorcovej matici, ak $m \neq n$, tak sa jedná o obdĺžnikovú maticu.

Matice, základné pojmy

- **vedúci prvok - pivot** -prvý nenulový prvok v riadku (nemusí vždy existovať)
- **nulová matica** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- **diagonálna matica** $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$
- **jednotková matica** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Zrejme diagonálna aj jednotková matica sú štvorcové.

Súčet matíc

- **súčet matíc:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

Súčet matíc

- **súčet matíc:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \end{pmatrix}$$

Súčet matíc

- **súčet matíc:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \end{pmatrix}$$

- Zrejme $A + B = B + A$

Súčet matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Súčet matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+3 & 0+0 & 3-2 \\ -2+2 & 0+1 & 2+1 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Násobok matice

- $c-$**násobok matice,** $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} & c.a_{13} & c.a_{14} \\ c.a_{21} & c.a_{22} & c.a_{23} & c.a_{24} \end{pmatrix}$$

Násobok matice, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Násobok matice, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3.2 & 3.(-1) & 3.0 & 3.3 \\ 3.(-2) & 3.0 & 3.2 & 3.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 9 \\ -6 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

- **transponovaná matica**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica, príklad

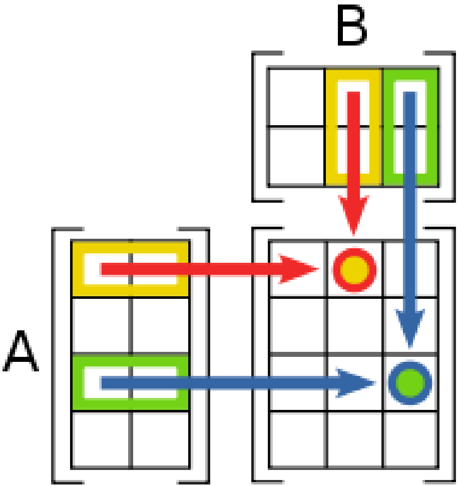
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc



Súčin matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Súčin matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 0.1 & 1.1 + 2.0 + 0.1 \\ 0.0 + 1.1 + 0.1 & 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 0.1 & 1.1 + 2.0 + 0.1 \\ 0.0 + 1.1 + 0.1 & 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.1 + 1.0 & 0.2 + 1.1 & 0.0 + 1.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.2 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 1.1 + 1.0 & 1.2 + 1.1 & 1.0 + 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 0.1 & 1.1 + 2.0 + 0.1 \\ 0.0 + 1.1 + 0.1 & 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.1 + 1.0 & 0.2 + 1.1 & 0.0 + 1.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.2 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 1.1 + 1.0 & 1.2 + 1.1 & 1.0 + 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.0 & 1.0 + 2.1 \\ 3.1 + 4.0 & 3.0 + 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C$$

Súčin matíc, príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 0.1 & 1.1 + 2.0 + 0.1 \\ 0.0 + 1.1 + 0.1 & 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.1 + 1.0 & 0.2 + 1.1 & 0.0 + 1.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.2 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 1.1 + 1.0 & 1.2 + 1.1 & 1.0 + 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.0 & 1.0 + 2.1 \\ 3.1 + 4.0 & 3.0 + 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.3 & 1.2 + 0.4 \\ 0.1 + 1.3 & 0.2 + 1.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C$$

Súčin matíc

Definícia.

- Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Súčin matíc

Definícia.

- Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Tvrdenia.

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne.

Súčin matíc

Definícia.

- Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Tvrdenia.

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne.
- Násobenie matíc **je** asociatívne $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Súčin matíc

Definícia.

- Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Tvrdenia.

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne.
- Násobenie matíc **je** asociatívne $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- Násobenie matíc **je** distributívne vzhľadom na sčítanie

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Súčin matíc

Definícia.

- Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Tvrdenia.

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne.
- Násobenie matíc **je** asociatívne $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- Násobenie matíc **je** distributívne vzhľadom na sčítanie

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica.