Návrat k sústavám rovníc

Sústavy dvoch rovníc a · · ·

- Máme danú sústavu lin. rovníc:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & c_2 \end{array}$$

Sústavy dvoch rovníc a $\cdots$

- Máme danú sústavu lin. rovníc:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & c_2
\end{array}
$$

- Z prvej rovnice si vyjadríme x_1

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (c_1 - a_{12} \cdot x_2)$$

Sústavy dvoch rovníc a · · ·

- Máme danú sústavu lin. rovníc:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & c_2 \end{array}$$

- Z prvej rovnice si vyjadríme x_1

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (c_1 - a_{12} \cdot x_2)$$

- dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme si x_2

$$x_2 = \frac{c_2 \cdot a_{11} - c_1 \cdot a_{21}}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Sústavy dvoch rovníc a ⋯

- Máme danú sústavu lin. rovníc:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & c_2 \end{array}$$

- Z prvej rovnice si vyjadríme x_1

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (c_1 - a_{12} \cdot x_2)$$

- dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme si x_2

$$x_2 = \frac{c_2 \cdot a_{11} - c_1 \cdot a_{21}}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

- Podobne si vyjadríme aj x_1

$$x_1 = \frac{c_1 \cdot a_{22} - c_2 \cdot a_{12}}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Sústavy dvoch rovníc a $\cdots$

Všimnite si, že menovatele sú v oboch prípadoch rovnaké a na ich zapamätanie nám poslúži táto schéma:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & & a_{12} \\ & {}^{+}_{-}\times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{array}$$

Výsledok označíme $|A|$.

- Podobne si schematicky vieme zapísať aj čitatele, pre x_1 si prvý stĺpec nahradíme pravou stranou:

$$\text{pre} \quad x_1 : \quad \begin{matrix} c_1 & & a_{12} \\ & \pm \times & \\ c_2 & & a_{22} \end{matrix}$$

Výsledok označíme $|A_1|$.

- Podobne si schematicky vieme zapísať aj čitatele, pre x_1 si prvý stĺpec nahradíme pravou stranou:

$$\text{pre} \quad x_1 : \quad \begin{matrix} c_1 & & a_{12} \\ & {}^{+}_{-}\times & \\ c_2 & & a_{22} \end{matrix}$$

  Výsledok označíme $|A_1|$.

- pre x_2 druhý stĺpec nahradíme pravou stranou:

$$\text{pre} \quad x_2 : \quad \begin{matrix} a_{11} & & c_1 \\ & {}^{+}_{-}\times & \\ a_{21} & & c_2 \end{matrix}$$

  Výsledok označíme $|A_2|$.

- Teda ak $|A| \neq 0$, tak **jediné** riešenie sústavy dvoch lin. rovníc vieme zapísať ako

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}.$$

Sústavy troch rovníc a $\cdots$

- Všimnite si teraz takúto sústavu:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & c_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & c_3 \end{array}$$

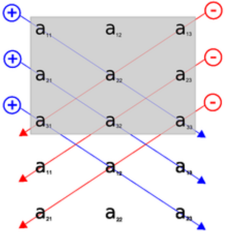
- Keby sme zopakovali postup na vyjadrenie x_1, tak dostaneme:

$$x_1 = \frac{c_1(a_{22}a_{33} - a_{23}.a_{32}) - c_2(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}) + c_3(a_{12}.{}_{23} - a_{13}.a_{22})}{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}}$$

- Keby sme vyjadrili x_2, x_3 menovatele by boli rovnaké.

Sústavy troch rovníc a · · ·

- Pri výpočte menovateľa nám pomôže schéma-tzv. Sarrusovo pravidlo:



Sústavy troch rovníc a $\cdots$

- Budeme postupovať rovnako ako pri sústave dvoch rovníc, teda nahradíme prvý stĺpec pravými stranami rovníc a dostaneme čitateľ pre x_1, ak takto nahradíme druhý stĺpec, dostaneme čitateľ pre x_2 a nakoniec, ak takto nahradíme tretí stĺpec, tak dostaneme čitateľ pre x_3. Ak si znovu označíme menovateľ ako $|A|$, čitateľ pre x_i ako $|A_i|$ a $|A| \neq 0$, tak potom
$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}.$$

Sústavy troch rovníc a $\cdots$ (príklad)

Riešte sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -9x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešte sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -9x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešenie. Pomocou Sarrusovho pravidla vypočítame postupne

$$|A| = \begin{vmatrix} -9 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ -9 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27 - 20 + 15 - 15 + 18 + 30 = 1 \neq 0$$

Riešte sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -9x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešenie. Pomocou Sarrusovho pravidla vypočítame postupne

$$|A| = \begin{vmatrix} -9 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \\ -9 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27 - 20 + 15 - 15 + 18 + 30 = 1 \neq 0$$

Vzhľadom k tomu, že $|A| \neq 0$, sústava bude mať práve jedno riešenie.

Sústavy troch rovníc a $\cdots$ (príklad)

Pokračujeme výpočtom $|A_1|, |A_2|, |A_3|$.

Pokračujeme výpočtom $|A_1|, |A_2|, |A_3|$.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

Sústavy troch rovníc a $\cdots$ (príklad)

Pokračujeme výpočtom $|A_1|, |A_2|, |A_3|$.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

Sústavy troch rovníc a $\cdots$ (príklad)

Pokračujeme výpočtom $|A_1|, |A_2|, |A_3|$.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Sústavy troch rovníc a $\cdots$ (príklad)

Pokračujeme výpočtom $|A_1|, |A_2|, |A_3|$.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Potom

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 7, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -5.$$

Definícia.

- Nech $A = (a_{ij})$ je štvorcová matica stupňa n nad množinou $\mathbb{R}$. Determinantom matice A nazývame číslo $|A|$ definované rovnosťou:

$$|A| = \sum_{h_1,h_2,\cdots,h_n} (-1)^{J(h_1,h_2,\cdots,h_n)} a_{1h_1}.a_{2h_2}\cdots a_{nh_n},$$

  kde $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ je permutácia množiny $\{1, 2, \cdots, n\}$, $J(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ je počet inverzií v danej permutácii a na pravej strane rovnosti je pre každé poradie $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ práve jeden sčítanec $(-1)^{J(h_1,h_2,\cdots,h_n)} a_{1h_1}.a_{2h_2}\cdots a_{nh_n}$.
- Počet všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \cdots, n\}$ je $n!$.
- Ak o usporiadanej dvojici $[h_i, h_j]$ platí $i < j$ ale $h_i > h_j$, tak hovoríme, že h_i, h_j je inverzia v danej permutácii.

Determinant, výpočet pomocou definície

Vypočítajte determinat matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$

Vypočítajte determinat matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Riešenie.

- Počet permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$ je $3! = 6$.
- Určíme počet inverzií pre jednotlivé permutácie.

$$J(1,2,3) = 0, J(1,3,2) = 1, J(2,1,3) = 1,$$

$$J(2,3,1) = 2, J(3,1,2) = 2, J(3,2,1) = 3.$$

- Preto

$$|A| = (-1)^0.a_{11}.a_{22}.a_{33}+(-1)^1.a_{11}.a_{23}.a_{32}+(-1)^1.a_{12}.a_{21}.a_{33}+$$

$$(-1)^2.a_{12}.a_{23}.a_{31} + (-1)^2.a_{13}.a_{21}.a_{32} + (-1)^3.a_{13}.a_{22}.a_{31} =$$

- Preto

$$|A| = (-1)^0.a_{11}.a_{22}.a_{33} + (-1)^1.a_{11}.a_{23}.a_{32} + (-1)^1.a_{12}.a_{21}.a_{33} +$$

$$(-1)^2.a_{12}.a_{23}.a_{31} + (-1)^2.a_{13}.a_{21}.a_{32} + (-1)^3.a_{13}.a_{22}.a_{31} =$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} -$$

$$-a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31}.$$

Aplikácie determinantu

Cramerovo pravidlo

Veta. Nech je daná sústava rovníc:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

Označme A sústavu matice. Ak determinant matice A je nenulový, tak sústava má **jediné** riešenie: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \ldots x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$, kde A_i je matica, ktorá vznikne z matice A tak, že v nej nahradíme prvky $i-$teho stĺpca prvkami $c_1, c_2, \ldots c_n$.

- *Čo vieme o sústave lin. rovníc, ak determinant matice A je nulový?*
- *Ako vypočítame determinant pre "väčšie" matice?*

Determinant

Vyplatilo sa nám zmúdrieť?

Sústavy s parametrom, príklad

V $\mathbb{R}$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Sústavy s parametrom, príklad

V $\mathbb{R}$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Úlohu môžeme vyriešit pomocou Cramerovho pravidla. Najskôr si určíme determinant matice:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a+2)\cdot(a-1)^2.$$

Ak je determinant nenulový, sústava bude mať jedno riešenie. Teda pre $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ nájdeme toto riešenie pomocou Cramerovho pravidla.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Zrejme

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 + a - 1 = (1 - a^2) \cdot (a - 1).$$

Potom $x = \frac{(1-a^2)\cdot(a-1)}{(a+2)\cdot(a-1)^2} = -\frac{a+1}{a+2}$.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Podobne

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2.$$

Potom $y = \frac{(a-1)^2}{(a+2)\cdot(a-1)^2} = \frac{1}{a+2}$.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

A podobne aj

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2-1)^2 = (a-1)^2 \cdot (a+1)^2.$$

Potom $z = \frac{(a-1)^2 \cdot (a+1)^2}{(a+2) \cdot (a-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$.
Teda riešenie je $\left\{ \left[-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right];\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \right\}$.

Porovnajte si náročnosť výpočtu teraz a na prvej prednáške.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

Teraz ešte musíme sústavu vyriešiť postupne pre $a \in \{-2, 1\}$ (teda pre také prípady, keď determinant matice je nulový).

- $a = -2$, potom sústava má takúto maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

- Maticu upravíme na trojuholníkový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sústava prislúchajúca takejto matici nemá riešenie -poslednému riadku prislúcha rovnica: $0.x + 0.y + 0.z = 1$ a taká trojica, ktorá by vyhovovala, neexistuje.

Sústavy s parametrom, príklad-pokračovanie

- $a = 1$, potom sústava má takúto maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Maticu upravíme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sústava prislúchajúca takejto matici je: $x + y + z = 1$ a má nekonečne veľa riešení. Napr. si y a z zvolím a x dopočítam, teda vyhovuje trojica $[1 - p - q, p, q]$, kde $p, q \in \mathbb{R}$.

Ďalšie možnosti výpočtu determinantu

- Ako vypočítať determinant matice 4×4?
- Použijeme definíciu a vypíšeme si permutácie štvorprvkovej množiny:
  - na prvom mieste je 1:
    $\{1,2,3,4\},\{1,2,4,3\},\{1,3,2,4\},\{1,3,4,2\},\{1,4,2,3\},\{1,4,3,2\}$.
  - počet týchto permutácií je rovnaký ako počet permutácií trojprvkovej množiny $\{2,3,4\}$.
  - podobne by to dopadlo, keby na prvom mieste boli postupne $2,3,4$.
- Teda determinant matice 4×4 vieme určiť pomocou štyroch determinantov tretieho rádu, len si musíme dať pozor na striedanie znamienok.

Laplaceov rozvoj

Definícia.

- Nech $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a nech a_{ij} je prvok matice A. V matici A vynecháme $i-$ty riadok a $j-$ty stĺpec, dostaneme maticu prislúchajúcu k prvku a_ij. Jej determinant $|A_{ij}|$ nazývame **subdeterminant** matice A prislúchajúci prvku a_{ij}.
- Prvok
$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$
nazývame **algebraický doplnok** prislúchajúci k prvku a_{ij}.

Veta.(Laplaceov rozvoj) Pre determinant štvorcovej matice stupňa n platí:

- $|A| = a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{in}$,
- $|A| = a_{1j}\mathcal{A}_{1j} + a_{2j}\mathcal{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathcal{A}_{nj}$.

Determinanty, Laplaceov rozvoj, príklad

Pomocou Laplaceovho rozvoja vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- *rozvoj urobte podľa 2. riadku*
- *rozvoj urobte podľa 3. stĺpca*

Determinanty, Laplaceov rozvoj, príklad

Pomocou Laplaceovho rozvoja vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- *rozvoj urobte podľa 2. riadku*
- *rozvoj urobte podľa 3. stĺpca*

Riešenie.

- rozvoj podľa 2. riadku:
  $|A| =$
  $$(-1).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
  $$(-1).(-1).(2.3 - 1.0) + 2.1.(1.3 - 0.0) = 12.$$

Determinanty, Laplaceov rozvoj, príklad-pokračovanie

- rozvoj podľa 3. stĺpca:

$$|A| = 0.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$3.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.(1.2 - (-2)) = 12.$$

Vlastnosti determinantov

- Ak B vznikne z A výmenou dvoch riadkov, potom $|B| = -|A|$.
- Ak A má dva rovnaké riadky, potom $|A| = 0$.
- Ak B vznikne z A vynásobením jedného riadku číslom λ, potom $|B| = \lambda|A|$.
- Determinant jednotkovej matice je rovný 1.
- $|A| = |A^T|$.

Vlastnosti determinantov

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1}+b_{j1} & a_{j2}+b_{j2} & \cdot & a_{jn}+b_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdot & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdot & b_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vlastnosti determinantov

- Ak A obsahuje nulový riadok, potom $|A| = 0$.
- Determinant sa nezmení, ak k ľub. riadku pripočítame násobok iného riadku.
- Determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu prvkov na hlavnej diagonále.
- $|A.B| = |A|.|B|$
- **Zhrnutie: Pri výpočte determinantu je vhodné upraviť maticu na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových operácií (treba si pamätať počet výmen riadkov) a na záver stačí vynásobiť prvky na diagonále.**

Determinanty, príklad

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinanty, príklad

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Na prvý pohľad by sa zdalo, že najvýhodnejšie je urobiť rozvoj podľa druhého stĺpca. Ak však pripočítame dvojnásobok druhého riadku k prvému, tak dostaneme maticu:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Na základe vlastností determinantov vieme, že $|A| = |A'|$.

Determinanty, príklad-pokračovanie

- Preto urobíme rozvoj podľa prvého riadku:

$$|A| = |A'| = 7.(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7.\left((-2).3.(-1) + 1.1.1 + 2.0.(-4) - (-1).3.2 - (-4).1.(-2) - (-1).0.1\right) =$$

$$= (-7).(-7) = 49.$$

Bez priameho výpočtu dokážte:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Vlastnosti determinantov, príklad-riešenie

Determinant na ľavej strane postupne zapisujeme ako súčet determinantov (využívame vlastnosti determinantov):

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

Teraz postupne rozpíšeme na súčty červený a modrý determinant.

Vlastnosti determinantov, príklad-riešenie

Najskôr červený-rozpíšeme prostredný stĺpec:

$$\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ b_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ b_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

Teraz v oboch determinantoch rozpíšeme posledný stĺpec:

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & b \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

Posledné tri determinanty sú nulové (majú dva rovnaké stĺpce), teda už stačí vhodne vymeniť riadky a nezabudnúť na znamienka:

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Vlastnosti determinantov, príklad-riešenie

Podobne upravíme aj modrý determinant:

$$\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} c & c & a \\ c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & b \\ c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Vlastnosti determinantov, príklad-riešenie

Teda

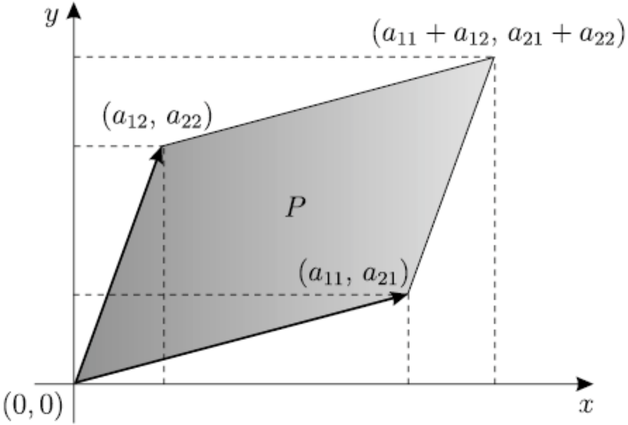
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ďalšie aplikácie determinantu

Obsah



Objem (dôkaz o pár týždňov)