# Súčin matíc

**Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

# Súčin matíc

**Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

**Tvrdenie.**

- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica

# Súčin matíc

**Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

**Tvrdenie.**

- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica
- K niektorým štvorcovým maticiam existujú inverzné matice, teda:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# Inverzná matica, príklad

*Nájdite inverznú maticu k matici*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

# Inverzná matica, príklad

*Nájdite inverznú maticu k matici*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Riešenie.** Zrejme má platiť:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

# Inverzná matica, príklad

*Nájdite inverznú maticu k matici*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Riešenie.** Zrejme má platiť:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resp. po vynásobení:

$$\begin{pmatrix} a.x_1 + b.y_1 & a.x_2 + b.y_2 \\ c.x_1 + d.y_1 & c.x_2 + d.y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Inverzná matica, príklad-pokračovanie

Teda potrebujeme vyriešiť sústavy rovníc:

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_1 & + & b.y_1 & = & 1 \\ c.x_1 & + & d.y_1 & = & 0 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_2 & + & b.y_2 & = & 0 \\ c.x_2 & + & d.y_2 & = & 1 \end{array}$$

# Inverzná matica, príklad-pokračovanie

Teda potrebujeme vyriešiť sústavy rovníc:

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_1 & + & b.y_1 & = & 1 \\ c.x_1 & + & d.y_1 & = & 0 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcrcl} a.x_2 & + & b.y_2 & = & 0 \\ c.x_2 & + & d.y_2 & = & 1 \end{array}$$

Použitím Cramerovho pravidla dostaneme:

- pre $x_1$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{|A|}$$

- pre $y_1$ :

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{|A|}$$

# Inverzná matica, príklad

- pre $x_2$ :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-b}{|A|}$$

- pre $y_2$ :

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a}{|A|}$$

# Inverzná matica, príklad

Potom inverzná matica je:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Zrejme platí aj:

$$A^{-1}.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Pozor, toto všetko sa dá jedine vtedy, ak** $|A| \neq 0$!

# Inverzná matica, príklad

*Nájdite inverznú maticu k matici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Inverzná matica, príklad

*Nájdite inverznú maticu k matici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Riešenie.** Zrejme má platiť:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha by sa dala riešiť tak, že zostavíme sústavu deviatich rovníc s deviatimi neznámymi, pri zostavení rovníc vychádzame z definície súčinu matíc. My však inverznú maticu budeme hľadať inak.

# Inverzná matica, príklad - pokračovanie

- Zatiaľ budeme postupovať bez zdôvodnenia-naučíme sa iba postup, zdôvodnenie bude až pri lineárnych transformáciách. Zapíšeme si maticu a hneď vedľa nej jednotkovú rovnakého typu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Teraz ich budeme upravovať pomocou GEM tak, aby ľavá časť bola jednotková. Keď sa nám to podarí, tak pravá časť bude inverzná.
*Pozor, vo všeobecnosti sa nám to nemusí podariť, lebo nie každá matica má aj inverznú maticu.*
*Kedy sa nám to podarí?*

# Inverzná matica, príklad-pokračovanie

- Upravujeme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

- Teda

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

je hľadaná inverzná matica. Overte si to! Ako?

**Ako nájsť inverznú maticu pomocou determinantu?**

- inšpirujeme sa v úplne prvom príklade tejto prednášky.
- Určíme postupne algebraické doplnky $\mathcal{A}_{ij}$ k prvkom $a_{ij}$.
- Vytvoríme **adjungovanú maticu** $A^* = \mathcal{A}_{ij}^T$.
- ak $|A| \neq 0$, tak $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

# Determinanty a inverzné matice, príklad

*Vypočítajte* $|A|$, *nájdite* $A^*, A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Vypočítajte* $|A|$, *nájdite* $A^*, A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Riešenie.** Použitím Sarrusovho pravidla vypočítame determinant:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{3} \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{blue}{-2} \\ 2 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{3} \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{blue}{-2} \end{pmatrix}.$$

Po diagonálach dostaneme
$|A| = 1.1.0 + 1.1.3 + 2.0.(-2) - 3.1.2 - (-2).1.1. - 0.0.1 = -1$

# Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- Postupne si vypočítame algebraické doplnky $\mathcal{A}_{ij}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

kde $M_{ij}$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice $A$ vynechaním $i-$teho riadku a $j-$teho stĺpca. Potom prvý stĺpec adjungovanej matice $A^*$ bude:

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

# Determinanty a inverzné matice, príklad-pokračovanie

- Druhý stĺpec bude:

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

- A posledný stĺpec bude:

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- Potom
$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -4 & -6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
- A keďže $|A| = -1$, potom $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

# Príklad

*Dané sú matice* $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

*Určte maticu* $X$ *tak, aby platilo:*

$$C \cdot X = D.$$

**Riešenie.** Využijeme vedomosti o inverznej matici, asociativite násobenia a neutralite jednotkovej matice, teda:

$$C \cdot X = D \iff C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot D \iff$$

$$\iff (C^{-1} \cdot C) \cdot X = C^{-1} \cdot B \iff X = C^{-1} \cdot D.$$

**Pozor, násobenie matíc nie je komutatívne!**

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$?

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$? Správne, potom $C^{-1} = A$, teda sme ušetrení od hľadania inverznej matice. Toto si dobre premyslite. Potom:

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$? Správne, potom $C^{-1} = A$, teda sme ušetrení od hľadania inverznej matice. Toto si dobre premyslite. Potom:

$$X = C^{-1} \cdot D$$

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$? Správne, potom $C^{-1} = A$, teda sme ušetrení od hľadania inverznej matice. Toto si dobre premyslite. Potom:

$$X = C^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$? Správne, potom $C^{-1} = A$, teda sme ušetrení od hľadania inverznej matice. Toto si dobre premyslite. Potom:

$$X = C^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

# Príklad, pokračovanie

Všimnime si maticu $C$. Je to presne tá istá matica, s ktorou sme sa už stretli v predchádzajúcej úlohe. Zrejme $C = A^{-1}$. Čo bude $C^{-1}$? Správne, potom $C^{-1} = A$, teda sme ušetrení od hľadania inverznej matice. Toto si dobre premyslite. Potom:

$$X = C^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Ako by to bolo s riešením takejto úlohy, keby $C^{-1}$ neexistovala?*