Skalárny súčin

Definícia.

- Nech $V(\mathbb{R})$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Operáciu $\cdot$ z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ nazveme **skalárny súčin** na $V(\mathbb{R})$ ak pre každé $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ a $r \in \mathbb{R}$ sú splnené tieto podmienky:
  - $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
  - $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
  - $(r \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = r \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$
  - pre každý vektor $\overline{a} \neq \overline{0}$ je $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$.

Skalárny súčin

Definícia.

- Nech $V(\mathbb{R})$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Operáciu $\cdot$ z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ nazveme **skalárny súčin** na $V(\mathbb{R})$ ak pre každé $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ a $r \in \mathbb{R}$ sú splnené tieto podmienky:
  - $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
  - $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
  - $(r \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = r \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$
  - pre každý vektor $\overline{a} \neq \overline{0}$ je $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$.
- Na $V_n(\mathbb{R})$ sa skalárny súčin zvyčajne definuje takto: ak $\overline{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n], \overline{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, tak

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n.$$

Skalárny súčin

Definícia.

- Nech $V(\mathbb{R})$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Operáciu $\cdot$ z $V \times V$ do $\mathbb{R}$ nazveme **skalárny súčin** na $V(\mathbb{R})$ ak pre každé $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ a $r \in \mathbb{R}$ sú splnené tieto podmienky:
  - $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
  - $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
  - $(r \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = r \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$
  - pre každý vektor $\overline{a} \neq \overline{0}$ je $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$.
- Na $V_n(\mathbb{R})$ sa skalárny súčin zvyčajne definuje takto: ak $\overline{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n], \overline{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, tak

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n.$$

- dĺžka vektora $\overline{a}$ je nezáporné reálne číslo: $||\overline{a}|| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Skalárny súčin, príklad

Zistite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *dané predpisom:* $f([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = a_1.b_1 + a_1.b_2 + a_2.b_1$ *je skalárny súčin na* $V_2(\mathbb{R})$.

Skalárny súčin, príklad

Zistite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dané predpisom:* $f([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = a_1.b_1 + a_1.b_2 + a_2.b_1$ *je skalárny súčin na* $V_2(\mathbb{R})$.

Riešenie. Nejedná sa o skalárny súčin, lebo napr. $[-1, 1].[-1, 1] = -1 < 0$, čo je v spore s podmienkou 4 z definície skalárneho súčinu.

Skalárny súčin, príklad

Zistite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dané predpisom:*
$f([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = a_1b_1 + 6a_2b_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$ *je skalárny súčin na* $V_2(\mathbb{R})$.

Skalárny súčin, príklad

Zistite, či zobrazenie $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *dané predpisom:* $f([a_1,a_2],[b_1,b_2]) = a_1b_1 + 6a_2b_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$ *je skalárny súčin na* $V_2(\mathbb{R})$.

Riešenie. Budeme postupovať podľa definície sk.súčinu.

- Ak budú súradnice vektorov $([a_1,a_2],[b_1,b_2])$ reálne čísla, tak evidentne výsledok $a_1b_1+6a_2b_2+2a_1b_2+2a_2b_1\in\mathbb{R}$, teda sa jedná o operáciu **z** $V\times V$ **do** $\mathbb{R}$.
- Skalárny súčin musí byť **komutatívny**, teda

$$f([a_1,a_2],[b_1,b_2]) = a_1b_1+6a_2b_2+2a_1b_2+2a_2b_1 =$$

$$= b_1a_1+6b_2a_2+2b_1a_2+2b_2a_1 = f([b_1,b_2],[a_1,a_2]).$$

Skalárny súčin, príklad

- Skalárny súčin musí byť **distributívny** vzhľadom na sčítanie, teda
$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = ([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) \cdot [c_1, c_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \cdot [c_1, c_2] =$
$= (a_1 + b_1) \cdot c_1 + 6 \cdot (a_2 + b_2) \cdot c_2 + 2 \cdot (a_1 + b_1) \cdot c_2 + 2 \cdot (a_2 + b_2) \cdot c_1 =$
$a_1 c_1 + 6 a_2 c_2 + 2 a_1 c_2 + 2 a_2 c_1 + b_1 c_1 + 6 b_2 c_2 + 2 b_1 c_2 + 2 b_2 c_1 =$
$= \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
- Skontrolujeme, či správne funguje aj násobenie skalárom:
$(r \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = (r \cdot [a_1, a_2]) \cdot [b_1, b_2] = [r \cdot a_1, r \cdot a_2] \cdot [b_1, b_2] =$
$= r \cdot a_1 b_1 + 6 \cdot r \cdot a_2 b_2 + 2 \cdot r \cdot a_1 b_2 + 2 \cdot r \cdot a_2 b_1 =$
$= r \cdot (a_1 b_1 + 6 a_2 b_2 + 2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1) = r \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$

Skalárny súčin, príklad

- A na záver skontrolujeme nezápornosť sk. súčinu, teda potrebujeme zistiť, či pre každý vektor $\overline{a} \neq \overline{0}$ je $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$. Zrejme
  $\overline{a} \cdot \overline{a} = a_1 a_1 + 6a_2 a_2 + 2a_1 a_2 + 2a_2 a_1 = a_1^2 + 6a_2^2 + 4a_1 a_2 =$
  $= a_1^2 + +4a_1 a_2 + 4a_2^2 + 2a_2^2 = (a_1 + 2a_2)^2 + a_2^2.$
  Zrejme $(a_1 + 2a_2)^2 + a_2^2 \geq 0$ pre ľubovolné a_1, a_2. Rovnosť platí práve vtedy, keď $(a_1 + 2a_2)^2 = 0 \wedge a_2^2 = 0$. Ale $(a_1 + 2a_2)^2 = 0 \wedge a_2^2 = 0 \iff a_1 + 2a_2 = 0 \wedge a_2 = 0$. Z tohto už priamo vyplýva, že $a_1 = a_2 = 0$. Teda $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$ platí jedine pre nulový vektor.
- Zobrazenie f spĺňa všetky požadované vlastnosti, teda sa jedná o sk. súčin.

Dĺžka vektora, príklad

Určte veľkosť vektora $[1, 2, 0, -1, 3]$ *euklidovského priestoru* $V_5(\mathbb{R})$ *s obvyklým skalárnym súčinom.*

Dĺžka vektora, príklad

Určte veľkosť vektora $[1, 2, 0, -1, 3]$ *euklidovského priestoru* $V_5(\mathbb{R})$ *s obvyklým skalárnym súčinom.*

Riešenie. Zrejme

$$||[1, 2, 0, -1, 3]|| = \sqrt{1.1 + 2.2 + 0.0 + (-1).(-1) + 3.3} = \sqrt{15}.$$

Definícia. Vektorový priestor nad poľom reálnych čísel, na ktorom je definovaný skalárny súčin, nazývame **euklidovským priestorom.**

Lema. Nech $V(\mathbb{R})$ je euklidovský priestor. Ak $\overline{a} \in V$, tak $\overline{0} \cdot \overline{a} = 0$.

Skalárny súčin

Tvrdenie. V euklidovskom priestore $V(\mathbb{R})$ platí pre každé $\overline{x}, \overline{y} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

- $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$,
- $|x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y||$, (Schwarzova nerovnosť)
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, (trojuholníkova nerovnosť)
- $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
  (Pythagorova rovnosť pre x ortogonálne na y)

Odchýlka vektorov

Definícia. Ak $\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$, tak **odchýlkou vektorov** $\overline{a}, \overline{b}$ nazývame uhol x, o ktorom platí

$$\cos x = \frac{\overline{a}.\overline{b}}{||\overline{a}||.||\overline{b}||}$$

a zároveň $0 \leq x \leq \pi$.

Odchýlka vektorov

Definícia. Ak $\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$, tak **odchýlkou vektorov** $\overline{a}, \overline{b}$ nazývame uhol x, o ktorom platí

$$\cos x = \frac{\overline{a}.\overline{b}}{||\overline{a}||.||\overline{b}||}$$

a zároveň $0 \leq x \leq \pi$.

Poznámka. Ak $\cos x = 0$, teda ak $\overline{a}.\overline{b} = 0$, budeme hovoriť, že vektory $\overline{a}, \overline{b}$ sú **kolmé (ortogonálne)**.

Odchýlka vektorov

Definícia. Ak $\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$, tak **odchýlkou vektorov** $\overline{a}, \overline{b}$ nazývame uhol x, o ktorom platí

$$\cos x = \frac{\overline{a}.\overline{b}}{||\overline{a}||.||\overline{b}||}$$

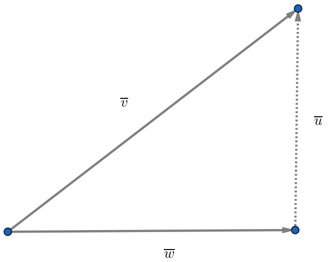
a zároveň $0 \leq x \leq \pi$.

Poznámka. Ak $\cos x = 0$, teda ak $\overline{a}.\overline{b} = 0$, budeme hovoriť, že vektory $\overline{a}, \overline{b}$ sú **kolmé (ortogonálne)**.

Veta. Nech $W = \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n} \rangle$ je podpriestor euklidovského priestoru $V(\mathbb{R})$. Ak $\overline{a} \in W$ a $\overline{b}.\overline{a_i} = 0$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tak $\overline{a}, \overline{b}$ sú kolmé.

Ortogonálny priemet

- $\overline{u}$ je ortogonálny k priestoru $W \iff \forall \overline{x} \in W; \overline{x} \cdot \overline{u} = 0$.
- ortogonálny priemet $\overline{v}$ do W je $\overline{w} \in W; \overline{v} = \overline{w} + \overline{u}$ a $\overline{u}$ je ortogonálny k W.



Ortogonálny priemet, príklad

V priestore $W = \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle, \overline{a} = [-1, 1, 1], \overline{b} = [1, 1, 1]$ *nájdite ortogonálny priemet vektora* $\overline{v} = [1, 2, 3]$.

Ortogonálny priemet, príklad

V priestore $W = \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle, \overline{a} = [-1, 1, 1], \overline{b} = [1, 1, 1]$ *nájdite ortogonálny priemet vektora* $\overline{v} = [1, 2, 3]$.

Riešenie. Zrejme $\overline{w} \in W$, preto $\overline{w} = r \cdot \overline{a} + s \cdot \overline{b}$. Ďalej vieme, že $\overline{v} = \overline{w} + \overline{u}$ a teda $\overline{v} = r \cdot \overline{a} + s \cdot \overline{b} + \overline{u}$. Poslednú rovnicu vynásobíme postupne $\overline{a}$ a $\overline{b}$ a využijeme to, že $\overline{u}$ je ortogonálny k W (teda $\overline{u} \cdot \overline{a} = \overline{u} \cdot \overline{b} = 0$). Dostaneme:

$$\overline{v} \cdot \overline{a} = r \cdot \overline{a} \cdot \overline{a} + s \cdot \overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{u} \cdot \overline{a}$$

a

$$\overline{v} \cdot \overline{b} = r \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} + s \cdot \overline{b} \cdot \overline{b} + \overline{u} \cdot \overline{b}$$

Upravíme

$$\overline{v} \cdot \overline{a} = r \cdot \overline{a} \cdot \overline{a} + s \cdot \overline{b} \cdot \overline{a}$$

a

$$\overline{v} \cdot \overline{b} = r \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} + s \cdot \overline{b} \cdot \overline{b}.$$

Ortogonálny priemet, príklad-pokračovanie

Dosadíme

$$4 = 3 \cdot r + s$$

$$6 = r + 3 \cdot s$$

a pre r, s máme:

$$r = \frac{3}{4}, s = \frac{7}{4}$$

teda

$$\overline{w} = \frac{3}{4} \cdot [-1, 1, 1] + \frac{7}{4} \cdot [1, 1, 1] = \left[1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Definícia. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ sú vektory euklidovského priestoru. Hovoríme, že vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ sú (navzájom) ortogonálne, ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$, je $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$.

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Definícia. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú vektory euklidovského priestoru. Hovoríme, že vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú (navzájom) ortogonálne, ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, je $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$.

Veta. Nenulové ortogonálne vektory euklidovského priestoru sú lineárne nezávislé.

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Definícia. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú vektory euklidovského priestoru. Hovoríme, že vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú (navzájom) ortogonálne, ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, je $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$.

Veta. Nenulové ortogonálne vektory euklidovského priestoru sú lineárne nezávislé.

Definícia. Vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ euklidovského priestoru nazývame **ortonormálne**, keď

- $||\overline{a_i}|| = 1$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$ pre ľubovoľné $i \neq j$.

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Definícia. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú vektory euklidovského priestoru. Hovoríme, že vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sú (navzájom) ortogonálne, ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, je $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$.

Veta. Nenulové ortogonálne vektory euklidovského priestoru sú lineárne nezávislé.

Definícia. Vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ euklidovského priestoru nazývame **ortonormálne**, keď

- $||\overline{a_i}|| = 1$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$ pre ľubovoľné $i \neq j$.

Dôsledok. Ortonormálne vektory, ktoré generujú euklidovský priestor $V(\mathbb{R})$, tvoria bázu $V(\mathbb{R})$.

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Lema. Nech $\overline{a}, \overline{b}$ sú ortogonálne vektory euklidovského priestoru. Potom vektory $\frac{\overline{a}}{||\overline{a}||}, \frac{\overline{b}}{||\overline{b}||}$ sú ortonormálne vektory.

Lema. Nech $\overline{a}, \overline{b}$ sú ortogonálne vektory euklidovského priestoru. Potom vektory $\frac{\overline{a}}{||\overline{a}||}, \frac{\overline{b}}{||\overline{b}||}$ sú ortonormálne vektory.

Veta. Nech W je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru $V(\mathbb{R})$. Potom existuje ortonormálna báza podpriestoru W.

Ortogonálne a ortonormálne vektory

Lema. Nech $\overline{a}, \overline{b}$ sú ortogonálne vektory euklidovského priestoru. Potom vektory $\frac{\overline{a}}{||\overline{a}||}, \frac{\overline{b}}{||\overline{b}||}$ sú ortonormálne vektory.

Veta. Nech W je podpriestor konečnorozmerného euklidovského priestoru $V(\mathbb{R})$. Potom existuje ortonormálna báza podpriestoru W.

Dôkaz vety je konštruktívny, teda dáva návod, ako bázu hľadať. My si to vyskúšame na konkrétnej úlohe.

Ortonormálna báza, príklad

Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru $S = \langle [1,0,1,0],[1,1,3,0],[1,0,2,2],[3,1,6,2] \rangle$ *euklidovského priestoru* $V_4(\mathbb{R})$ *s obvyklým skalárnym súčinom.*

Ortonormálna báza, príklad

Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru $S = \langle [1,0,1,0],[1,1,3,0],[1,0,2,2],[3,1,6,2] \rangle$ euklidovského priestoru $V_4(\mathbb{R})$ s obvyklým skalárnym súčinom.

Riešenie. Úlohu budeme riešiť v troch hlavých krokoch:

- Nájdeme bázu podpriestoru S.
- Nájdeme ortogonálnu bázu podpriestoru S.
- Nájdeme ortonormálnu bázu podpriestoru S.

- Úpravou matice podpriestoru na trojuholníkovy tvar dostaneme vektory bázy podpriestoru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Teda $S = \langle [1, 0, 1, 0], [0, 1, 2, 0], [0, 0, 1, 2] \rangle$.

- Označme:

$$\overline{a_1} = [1, 0, 1, 0], \overline{a_2} = [0, 1, 2, 0], \overline{a_3} = [0, 0, 1, 2].$$

- Potom

$$\overline{b_1} = \overline{a_1}, \overline{b_2} = a_2 + x.\overline{b_1}, \overline{b_3} = \overline{a_3} + y.\overline{b_1} + z.\overline{b_2}.$$

Treba si uvedomiť, že vektory $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}$ vznikli ako lin. kombinácie vektorov $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, generujú teda ten istý priestor.

- Určíme vektor $\overline{b_2}$. Rovnicu pre $\overline{b_2}$ vynásobíme vektorom $\overline{b_1}$, pritom myslíme na to, že chceme, aby $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ boli ortogonálne a preto

$$\overline{b_2}.\overline{b_1} = \overline{a_2}.\overline{b_1} + x.\overline{b_1}.\overline{b_1},$$

$$0 = a_2.\overline{b_1} + x.\overline{b_1}.\overline{b_1}.$$

- Po dosadení:

$0 = [0,1,2,0].[1,0,1,0] + x[1,0,1,0].[1,0,1,0] \iff 0 = 2 + 2x \iff x = -1.$

Potom

$$\overline{b_2} = [0,1,2,0] + (-1) \cdot [1,0,1,0] = [-1,1,1,0].$$

2. krok-ortogonálna báza

- V rovnici pre $\overline{b_3}$ sú dve neznáme, budeme ich určovať v dvoch krokoch.

(1) rovnicu vynásobíme vektorom $\overline{b_1}$,

$$\overline{b_3}.\overline{b_1} = \overline{a_3}.\overline{b_1} + y.\overline{b_1}.\overline{b_1} + z.\overline{b_2}.\overline{b_1}.$$

Vektory $\overline{b_3}, \overline{b_1}$ *aj* $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ *majú byť navzájom ortogonálne, teda dostaneme:*

$$0 = \overline{a_3}.\overline{b_1} + y.\overline{b_1}.\overline{b_1}.$$

Po dosadení:

$$0 = [0,0,1,2].[1,0,1,0] + .y[1,0,1,0].[1,0,1,0] \iff 0 = 1 + 2 \cdot y \iff y = -\frac{1}{2}.$$

(2) rovnicu vynásobíme vektorom $\overline{b_2}$,

$$\overline{b_3}.\overline{b_2} = \overline{a_3}.\overline{b_2} + y.\overline{b_1}.\overline{b_2} + z.\overline{b_2}.\overline{b_2}.$$

Vektory $\overline{b_3}, \overline{b_1}$ *aj* $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ *majú byť navzájom ortogonálne, teda dostaneme:*

$$0 = \overline{a_3}.\overline{b_2} + z.\overline{b_2}.\overline{b_2}.$$

Po dosadení:

$$0 = [0,0,1,2].[-1,1,1,0] + .z[-1,1,1,0].[-1,1,1,0] \iff$$

$$\iff 0 = 1 + 3 \cdot z \iff z = -\frac{1}{3}.$$

Potom

$$\overline{b_3} = [0,0,1,2] + \left(-\frac{1}{2}\right)[1,0,1,0] + \left(-\frac{1}{3}\right)[-1,1,1,0] = \left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 2\right].$$

Teda ortogonálna báza je $[\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}]$, kde

$$\overline{b_1} = [1,0,1,0],$$
$$\overline{b_2} = [-1,1,1,0],$$
$$\overline{b_3} = \left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 2\right].$$

3. krok-ortonormálna báza

Z ortogonálnej bázy jednoducho dostaneme **ortonormálnu bázu**:

$$\overline{c_1} = \frac{\overline{b_1}}{||\overline{b_1}||} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 0, 1, 0],$$

$$\overline{c_2} = \frac{\overline{b_2}}{||\overline{b_2}||} = \frac{\sqrt{3}}{3}[-1, 1, 1, 0],$$

$$\overline{c_3} = \frac{\overline{b_3}}{||\overline{b_3}||} = \frac{\sqrt{6}}{5}\left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 2\right].$$

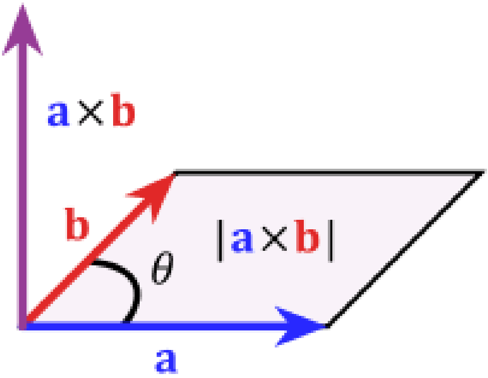
Bolo nutné na začiatku zisťovať, či je S báza?
Aký by bol výsledok, keby sme 1. krok vynechali?

Vektorový súčin

Vektorový súčin je binárna operácia $\times$ z $V \times V \to V$, teda výsledkom je vektor, o ktorom platí:

- $||\overline{c}|| = ||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}|| \cdot \sin\theta$, kde θ je odchýlka vektorov $\overline{a}, \overline{b}$.
- smer vektora $\overline{c}$ je kolmý na smery vektorov $\overline{a}, \overline{b}$.
- vektor $\overline{c}$ je orientovaný tak, že usporiadaná trojica vektorov $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ tvorí pravotočivú sústavu vektorov.

Vektorový súčin, geometrický význam



Vektorový súčin, výpočet

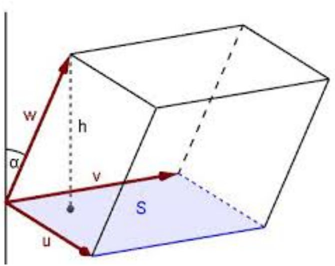
- $\overline{a} \times \overline{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$
- $\overline{b} \times \overline{a} =?$

Zmiešaný súčin

Zmiešaný súčin vektorov $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ je súčin $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}$, teda výsledkom je číslo.

- Čo toto číslo predstavuje?
- Ako ho vypočítať?

Zmiešaný súčin, geometrický význam



$$V = S \cdot h = |\overline{u} \times \overline{v}| \cdot h = |\overline{u} \times \overline{v}| \cdot ||\overline{w}||. \cos\alpha = (\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}.$$

Zmiešaný súčin, prekvapenie?

$$V = (\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) = ?$$