Báza vektorového priestoru-opakovanie

Definícia. Nech $V(F)$ je konečnorozmerný vektorový priestor. Hovoríme, že $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}]$ je **báza** $V(F)$ ak

- $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ sú lin. nezávislé,
- $\langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \rangle = V(F)$.

Tvrdenie. Nech $V(F)$ je konečnorozmerný vektorový priestor, všetky jeho bázy majú rovnaký počet prvkov.

Poznámka. Počet prvkov bázy sa nazýva **dimenzia**.

Báza vektorového priestoru, príklady

- jednotková báza
- ortogonálna báza
- ortonormálna báza
- . . . .

Koľko existuje báz napr. priestoru $V_3(\mathbb{R})$?

Súradnice v báze

Tvrdenie. Nech vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ tvoria bázu vektorového priestoru V_n. Každý vektor $\overline{x} \in V_n$ možno vyjadriť jediným spôsobom ako lineárnu kombináciu vektorov bázy, teda ku každému vektoru $\overline{x} \in V_n$ existuje jediná usporiadaná $n-$tica čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že platí

$$\overline{x} = x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overline{a_n}.$$

Súradnice v báze

Tvrdenie. Nech vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ tvoria bázu vektorového priestoru V_n. Každý vektor $\overline{x} \in V_n$ možno vyjadriť jediným spôsobom ako lineárnu kombináciu vektorov bázy, teda ku každému vektoru $\overline{x} \in V_n$ existuje jediná usporiadaná $n-$tica čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, že platí

$$\overline{x} = x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overline{a_n}.$$

Definícia. Číslo $x_i; i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ nazývame $i-$**tou súradnicou vektora** $\overline{x}$ v báze $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$, súčin $x_i \cdot a_i$ nazývame $i-$**tou zložkou vektora** $\overline{x}$. Zapisujeme

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})}.$$

Súradnice v báze

Tvrdenie. Nech vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ tvoria bázu vektorového priestoru V_n. Každý vektor $\overline{x} \in V_n$ možno vyjadriť jediným spôsobom ako lineárnu kombináciu vektorov bázy, teda ku každému vektoru $\overline{x} \in V_n$ existuje jediná usporiadaná $n-$tica čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že platí

$$\overline{x} = x_1 \cdot \overline{a_1} + x_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overline{a_n}.$$

Definícia. Číslo $x_i; i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ nazývame $i-$**tou súradnicou vektora** $\overline{x}$ v báze $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$, súčin $x_i \cdot a_i$ nazývame $i-$**tou zložkou vektora** $\overline{x}$**.** Zapisujeme

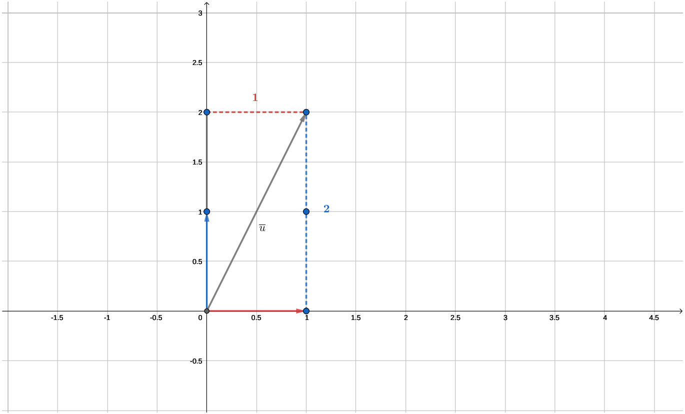
$$\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})}.$$

Poznámka. Pri jednotkovej báze zapisujeme

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

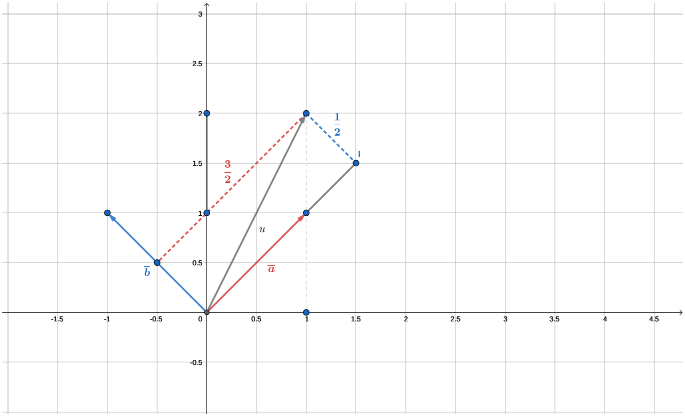
Súradnice v báze, príklad

V jednotkovej báze priestoru $V_2(\mathbb{R})$ má vektor $\overline{u}$ súradnice $[1, 2]$:



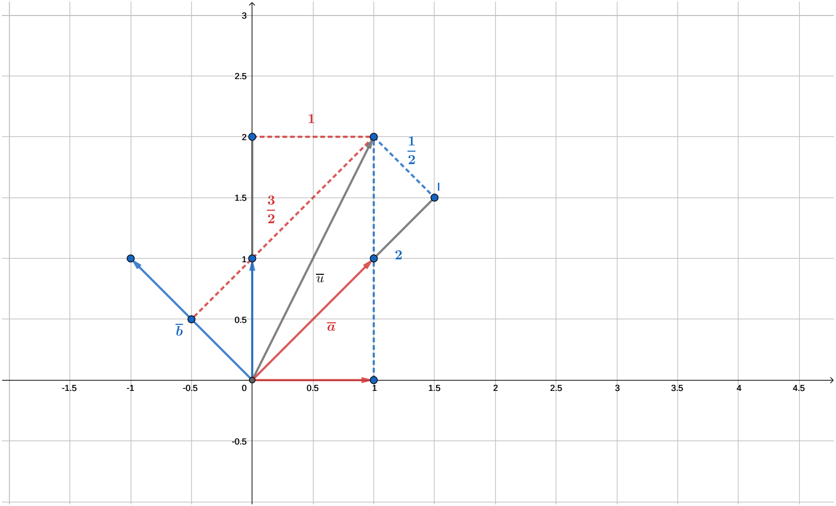
Súradnice v báze, príklad

Bázou priestoru $V_2(\mathbb{R})$ je napr. aj $([1,1],[-1,1])$ a vektor $\overline{u}$ má v tejto báze súradnice $\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$:



Súradnice v báze, príklad

Ešte pohľad na obe bázy v jednom obrázku:



Súradnice v báze, príklad

Ako zistíme súradnice vektora $\overline{u}$ v jednej báze, ak poznáme jeho súradnice v nejakej inej báze? Graficky sme si to už vyskúšali.

- Ak má vektor $\overline{u}$ v jednotkovej báze súradnice $[1,2]$ a chceme zistiť jeho súradnice v báze $([1,1],[-1,1])$ (pozor na poradie vektorov!), tak ho potrebujeme zapísať ako lin. kombináciu týchto vektorov, teda:

$$[1,2] = r \cdot [1,1] + s \cdot [-1,1],$$

teda

$$(1 = r - s \ \wedge \ 2 = r + s) \Rightarrow \left(r = \frac{3}{2} \ \wedge \ s = \frac{1}{2}\right).$$

Súradnice vektora $\overline{u}$ v báze $([1,1],[-1,1])$ sú $\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, teda sa potvrdilo to, čo sme zistili graficky.

Súradnice v báze, príklad

A teraz naopak-ako zistíme súradnice vektora $\overline{u}$ v jednotkovej báze, ak poznáme jeho súradnice v báze $([1,1],[-1,1])$? Táto časť úlohy bude jednoduchšia.

- Vieme, že $[\overline{u}]_{([1,1],[-1,1])} = \left[\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$. Čo to znamená?

$$\overline{u} = \frac{3}{2}\cdot[1,1] + \frac{1}{2}\cdot[-1,1],$$

potom

$$\overline{u} = \left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2},\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right],$$

$$\overline{u} = [1,2].$$

Súradnice vektora $[\overline{u}]_{([1,1],[-1,1])}$ v jednotkovej báze sú $[1,2]$, teda sa opäť potvrdilo to, čo sme zistili graficky.

Súradnice v báze, príklad

Nech $S = ([1,1,2],[2,3,4],[1,2,3])$ *je báza priestoru* $V_3(\mathbb{R})$.

- *Nájdite vektor vo* $V_3(\mathbb{R})$, *ktorého súradnice vzhľadom k báze* S *sú* $(\overline{v})_S = [-1,3,2]$.
- *Nájdite súradnice vektora* $\overline{u} = [5,-1,9]$ *vzhľadom k báze* S.

Riešenie. Prvá časť úlohy je jednoduchá:

- Zrejme

$$\overline{v} = (-1).[1,1,2] + 3[2,3,4] + 2.[1,2,3] = [7,12,16].$$

Toto sú teda súradnice vektora $\overline{v}$ vzhľadom k jednotkovej báze. **Je dôležité dodržať poradie prvkov bázy *S*.**

Súradnice v báze, príklad, pokračovanie

- Teraz potrebujeme zistiť súradnice vzhľadom k báze S, teda potrebujeme vektor $\overline{u}$ vyjadriť ako lin. kombináciu prvkov bázy S. Opäť treba dať pozor na poradie prvkov bázy. Musíme nájsť $r, s, t \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí:

$$\overline{u} = r.([1,1,2] + s.[2,3,4] + t.[1,2,3],$$

$$[5,-1,9] = r.[1,1,2] + s.[2,3,4] + t.[1,2,3].$$

- Úlohu môžeme riešiť ako sústavu rovníc, tak ako sme to robili pri lin. kombináciách, alebo pri predchádzajúcej úlohe.

Súradnice v báze, príklad, pokračovanie

Túto rovnicu vieme prepísať aj takto:

$$5.[1,0,0]+(-1).[0,1,0]+9.[0,0,1] = r.[1,1,2]+s.[2,3,4]+t.[1,2,3],$$

čo je vlastne toto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

- **Pozor, vektory bázy vpisujeme do stĺpcov!**
- *Ako vypočítame trojicu* $[r,s,t]^T$ *?*

Súradnice v báze, príklad, pokračovanie

Z rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

potrebujeme vyjadriť vektor $(r, s, t)^T$. To sa nám podarí tak, že obe strany rovnice vynásobíme zľava maticou, ktorá je inverzná k matici na pravej strane rovnice. Podobné úlohy sme už riešili, takže myšlienka nie je nová. Najskôr nájdeme inverznú maticu. Postup nájdete v prednaska4.pdf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Súradnice v báze, príklad, pokračovanie

Násobíme:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ s\\ t\end{pmatrix}.$$

Potom

$$(r, s, t)^T = (16, -5, -1)^T.$$

Ako si overíme správnosť svojho riešenia?

Súradnice v báze, zhrnutie

Namiesto jednotkovej bázy môžeme mať ľubovolnú inú, napr. $A = [\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}]$, namiesto bázy S napr. bázu $B = [\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_n}]$ a potom dostaneme

$$x_1.\overline{a_1} + x_2.\overline{a_2} + \cdots + x_n.\overline{a_n} = c_1.\overline{b_1} + c_2.\overline{b_2} + \cdots + c_n.\overline{b_n},$$

pričom x_i sú súradnice vektora v báze A, c_i sú jeho súradnice v báze B. Ak $\overline{a_i} = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ a $\overline{b_i} = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni})$, potom

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ako z predchádzajúcej rovnice určíme napr. vektor $(x_1, \ldots, x_n)$*?* *Návod hľadajte v predch. úlohe.*

Transformácie, príklad

Zobrazenie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *je dané nasledovne:*

$$T\big([x, y, z, t]\big) = [2x - 3y + z - 5t, 4x + y - 2z + t, 5x - y + 4z].$$

Nájdite obraz vektora $[1, -2, 3, 4]$.

Riešenie. Zrejme

$$T\big([1, -2, 3, 4]\big) = [2.1 - 3.(-2) + 3 - 5.4, 4.1 + (-2) - 2.3 + 4, 5.1 - (-2) + 4.3] =$$

$$= [-9, 0, 19].$$

Transformácie, príklad-pokračovanie

Na túto úlohu sa môžeme pozrieť aj trochu inak:

Zobrazenie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *je dané nasledovne:*

$$T([x, y, z, t]^T) = [2x - 3y + z - 5t, 4x + y - 2z + t, 5x - y + 4z]^T.$$

Toto zobrazenie môžeme vyjadriť aj nasledovne:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & - & 5t & = & a \\ 4x & + & y & - & 2z & + & t & = & b \\ 5x & - & y & + & 4z & & & = & c \end{array}$$

kde $[a, b, c]^T$ je obraz vektora $[x, y, z, t]^T$ v zobrazení T.

Ale môžeme to zapísať aj takto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Teda obraz vektora $(1, -2, 3, 4)^T$ vieme nájsť takto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Transformácie, príklad-pokračovanie

Zobrazenie T je **lineárna transformácia** a matica

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

je **štandardná matica** tohto zobrazenia.

Lineárne transformácie

Definícia. Nech $V(F), W(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Zobrazenie $f : V \to W$ nazývame **lineárnou transformáciou** vektorového priestoru $V(F)$ do vektorového priestoru $W(F)$, ak pre každé dva vektory $\overline{a}, \overline{b} \in V$ a pre ľubovoľný skalár $r \in F$ platí

- $f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b})$,
- $f(r \cdot \overline{a}) = r \cdot f(\overline{a})$.

O lin. transformácii sme už počuli v súvislosti so sústavou lin. rovníc. Ako súvisia vlastnosti lin. transformácie so sústavami lin. rovníc?

Vlastnosti lineárnej transformácie

Tvrdenie. Pre lineárne transformácie platí:

- $$f(r_1 \cdot \overline{a_1} + r_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + r_n \cdot \overline{a_n}) = r_1 f(\overline{a_1}) + r_2 f(\overline{a_2}) + \cdots + r_n f(\overline{a_n}),$$
- $$f(\overline{0}) = \overline{0}, -f(\overline{a}) = f(-\overline{a}).$$

Lineárne transformácie, príklady

Ukážte, že transformácie $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

- $f_1(\overline{v}) = \overline{0}$,
- $f_2(\overline{v}) = \overline{v}$,
- $f_3(\overline{v}) = k\overline{v}$,
- $f_4([x, y]^T) = [x, 0]^T$,

sú lineárne.

Riešenie. Vo všetkých štyroch prípadoch musíme overiť obidve vlastnosti z definície lin. transformácie.

Lineárne transformácie, príklady

Transformácia f_1 :

1. vlastnosť

$$f_1(\overline{a}+\overline{b}) = f_1([a_1,a_2]^T + [b_1,b_2]^T) = f_1([a_1+b_1, a_2+b_2]^T) = \overline{0},$$

$$f_1(\overline{a}) + f_1(\overline{b}) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0},$$

2. vlastnosť

$$f_1(r\cdot\overline{a}) = f_1([r\cdot a_1, r\cdot a_2]^T) = \overline{0},$$

$$r\cdot f_1(\overline{a}) = r\cdot f_1([a_1,a_2]^T) = r\cdot\overline{0} = \overline{0}.$$

Lineárne transformácie, príklady

Transformácia f_2 :

1. vlastnosť

$$f_2(\overline{a}+\overline{b}) = f_2([a_1, a_2]^T + [b_1, b_2]^T) = f_2([a_1+b_1, a_2+b_2]^T) = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]^T,$$

$$f_2(\overline{a}) + f_2(\overline{b}) = [a_1, a_2]^T + [b_1, b_2]^T = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]^T,$$

2. vlastnosť

$$f_2(r \cdot \overline{a}) = f_2([r \cdot a_1, r \cdot a_2]^T) = [r \cdot a_1, r \cdot a_2]^T,$$

$$r \cdot f_2(\overline{a}) = r \cdot f_2([a_1, a_2]^T) = r \cdot [a_1, a_2]^T = [r \cdot a_1, r \cdot a_2]^T.$$

Lineárne transformácie, príklady

Transformácia f_3 :

1. vlastnosť

$$f_3(\overline{a}+\overline{b}) = f_3([a_1,a_2]^T+[b_1,b_2]^T) = f_3([a_1+b_1,a_2+b_2]^T) = k\cdot[a_1+b_1,a_2+b_2]^T,$$

$$f_3(\overline{a}) + f_3(\overline{b}) = k\cdot[a_1,a_2]^T + k\cdot[b_1,b_2]^T = k\cdot[a_1+b_1,a_2+b_2]^T,$$

2. vlastnosť

$$f_3(r\cdot\overline{a}) = f_3([r\cdot a_1, r\cdot a_2]^T) = k\cdot[r\cdot a_1, r\cdot a_2]^T = k\cdot r\cdot[a_1,a_2]^T,$$

$$r\cdot f_3(\overline{a}) = r\cdot f_3([a_1,a_2]^T) = k\cdot r\cdot[a_1,a_2]^T.$$

Transformácia f_4 :

1. vlastnosť

$$f_4(\overline{a}+\overline{b}) = f_4([a_1,a_2]^T + [b_1,b_2]^T) = f_4([a_1+b_1,a_2+b_2]^T) = [a_1+b_1,0]^T,$$

$$f_4(\overline{a}) + f_4(\overline{b}) = [a_1,0]^T + [b_1,0]^T = [a_1+b_1,0]^T,$$

2. vlastnosť

$$f_4(r\cdot\overline{a}) = f_4([r\cdot a_1, r\cdot a_2]^T) = [r\cdot a_1,0]^T,$$

$$r\cdot f_4(\overline{a}) = r\cdot f_4([a_1,a_2]^T) = r\cdot[a_1,0]^T = [r\cdot a_1,0]^T.$$

Dané je zobrazenie $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *takto:* $[x, y]^T \to [x, y, 1]^T$.
Zistite, či sa jedná o lineárnu transformáciu.

Lineárne transformácie, príklad

Dané je zobrazenie $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *takto:* $[x, y]^T \to [x, y, 1]^T$.
Zistite, či sa jedná o lineárnu transformáciu.

Riešenie Nech $\overline{a} = [x, y]^T, \overline{b} = [p, q]^T$, potom

$$f_5(\overline{a} + \overline{b}) = f_5([x + p, y + q]^T) = [x + p, y + q, 1]^T$$

ale

$$f_5(\overline{a}) + f_5(\overline{b}) = [x, y, 1]^T + [p, q, 1]^T = [x+p, y+q, 1+1]^T = [x+p, y+q, 2]^T$$

teda

$$f_5(\overline{a} + \overline{b}) \neq f_5(\overline{a}) + f_5(\overline{b}).$$

Druhú vlastnosť lineárnej transformácie už nemusíme ani overovať, lebo je zrejmé, že f_5 nie je lineárna transformácia (porušená prvá vlastnosť).

Jadro a obraz lineárnej transformácie

Definícia. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárna transformácia. Potom **jadrom lineárnej transformácie** f nazývame množinu

$$Ker f = \{\overline{a} \in V; f(\overline{a}) = \overline{0}\}$$

a **obrazom lineárnej transformácie** f nazývame množinu

$$Im f = \{f(\overline{a}) \in W; \overline{a} \in V\}.$$

Obraz by nemal byť neznámy pojem, napr. z IDM.

Nájdite jadro a obraz transformácií $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.:

- $f_1(\overline{v}) = \overline{0}$,
- $f_2(\overline{v}) = \overline{v}$,
- $f_3(\overline{v}) = k\overline{v}, k \neq 0$;
- $f_4([x, y]^T) = [x, 0]^T$.

Riešenie.

- Pri hľadaní jadra sa pýtame:
  pre aké $x, y \in \mathbb{R}$ je $f_i([x, y]^T) = [0, 0]^T$?
- Pri hľadaní obrazu sa pýtame:
  ako vyzerá množina $\{[r, t]^T; \exists x, y \in \mathbb{R} \wedge f_i([x, y]^T) = [r, t]^T\}$?
  Teda ako vyzerá množina "výsledkov" transformácie?

Teda:

- f_1 : *Ker* $f_1 = \{[x, y]^T; x, y \in \mathbb{R}\}$; *Im*$f_1 = \{[0, 0]^T\}$.
- f_2 : *Ker* $f_2 = \{[0, 0]^T\}$; *Im*$f_2 = \{[x, y]^T; x, y \in \mathbb{R}\}$.
- f_3 : *Ker* $f_3 = \{[0, 0]^T\}$; *Im*$f_3 = \{[x, y]^T; x, y \in \mathbb{R}\}$.
- f_4 : *Ker* $f_4 = \{[0, t]^T; t \in \mathbb{R}\}$; *Im*$f_1 = \{[t, 0]^T; t \in \mathbb{R}\}$.

Jadro a obraz lineárnej transformácie

Tvrdenie. Ak $T : V \to W$ je lineárna transformácia, potom

- Jadro transformácie T je podpriestor priestoru V.
- Obraz transformácie T je podpriestor priestoru W.
- Transformácia T je injektívna $\iff$ $KerT = \{\bar{0}\}$.
- Transformácia T je surjektívna $\iff$ $ImT = W$.

Tvrdenie. Ak $T : V \to W$ je lineárna transformácia a V, W sú konečnorozmerné priestory, potom

$$\dim V = \dim(KerT) + \dim(ImT).$$

Nech $f : V_3 \to V_4; f([x, y, z]^T) = [x + y, y + z, x + z, x]^T$. *Určte* $f([2, 3, 0]^T)$.

Nech $f : V_3 \to V_4; f([x, y, z]^T) = [x + y, y + z, x + z, x]^T$. *Určte* $f([2, 3, 0]^T)$.

Riešenie Úloha je jednoduchá. Zrejme

$$f([2, 3, 0]^T) = [2 + 3, 3 + 0, 2 + 0, 2]^T = [5, 3, 2, 2]^T.$$

Nech $f : V_3 \to V_4; f([x,y,z]^T) = [x+y, y+z, x+z, x]^T$. *Určte* $f([2,3,0]^T)$.

Riešenie Úloha je jednoduchá. Zrejme

$$f([2,3,0]^T) = [2+3, 3+0, 2+0, 2]^T = [5,3,2,2]^T.$$

Na úlohu sa môžeme pozrieť aj inak. Zrejme pre obraz vektora $[x,y,z]^T$ platí:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ x & & & + & z & = & c \\ x & & & & & = & d \end{array}$$

kde $[a,b,c,d]^T$ je spomínaný obraz.

Lineárne transformácie a matice, príklad

Rovnicu môžeme prepísať takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

pre vektor $[2,3,0]^T$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

výsledok sme samozrejme dostali rovnaký obidvomi spôsobmi.

Lineárne transformácie a matice, príklad

Už vieme, že maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

nazývame maticou lineárnej transformácie.

Táto matica funguje pre jednotkovú bázu. V ďalšej úlohe sa naučíme určiť maticu pre ľubovolnú bázu.

Lineárne transformácie a matice, príklad

Daná je báza $A = ([1,1,0],[1,0,1],[0,-1,0])$ *priestoru* $V_3(\mathbb{R})$. *Nech* $f : V_3 \to V_4; f([x,y,z]^T) = [x+y, y+z, x+z, x]^T$. *Nájdite súradnice vektora* $[2,3,0]^T$ *v tejto báze a určte potom jeho obraz v transformácii* f. *Určte maticu transformácie* f *vzhľadom k uvedenej báze.*

Lineárne transformácie a matice, príklad

Daná je báza $A = ([1,1,0],[1,0,1],[0,-1,0])$ *priestoru* $V_3(\mathbb{R})$. *Nech* $f: V_3 \to V_4; f([x,y,z]^T) = [x+y, y+z, x+z, x]^T$. *Nájdite súradnice vektora* $[2,3,0]^T$ *v tejto báze a určte potom jeho obraz v transformácii* f. *Určte maticu transformácie* f *vzhľadom k uvedenej báze.*

Riešenie.

- Treba overiť , či uvedené vektory naozaj tvoria bázu $V_3(\mathbb{R})$. Teda maticu A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  upravíme na trojuholníkový tvar a zistíme, že všetky riadky sú nenulové, teda sa jedná o bázu.

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

Určíme súradnice vektora $[2,3,0]^T$ v báze A. Zrejme musí platiť:

$$[2,3,0]^T = k[1,1,0]^T + r.[1,0,1]^T + s.[0,-1,0]^T.$$

Potom

$$2 = k + r, 3 = k - s, 0 = r \;\Rightarrow\; k = 2, r = 0, s = -1.$$

Teda

$$[2,3,0]^T_A = [2,0,-1]^T.$$

Z vlastností lin. transformácií vieme, že

$$f([2,3,0]^T) = f(2[1,1,0]^T + 0.[1,0,1]^T + (-1).[0,-1,0]^T) =$$

$$= 2.f([1,1,0]^T) + 0.f([1,0,1]^T) + (-1).f([0,-1,0]^T),$$

teda k určeniu obrazu potrebujeme už "len" určiť obrazy bázy A.

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- Určíme si obrazy bázy $V_3(\mathbb{R})$ podľa daného predpisu:

$$f([1,1,0]^T) = [2,1,1,1]^T,$$
$$f([1,0,1]^T) = [1,1,2,1]^T,$$
$$f([0,-1,0]^T) = [-1,-1,0,0]^T.$$

- Potom

$$f([2,3,0]^T) = f(2[1,1,0]^T + 0.[1,0,1]^T + (-1).[0,-1,0]^T) =$$
$$= 2.f([1,1,0]^T) + 0.f([1,0,1]^T) + (-1).f([0,-1,0]^T),$$
$$= 2.[2,1,1,1]^T + 0.[1,1,2,1]^T + (-1).[-1,-1,0,0]^T =$$
$$= [4+0+1, 2+0+1, 2+0+0, 2+0+0]^T = [5,3,2,2]^T.$$

- *Znovu sme sa dopracovali k tomu istému výsledku, aj keď sme použili súradnice vektora v inej báze.*

- Keď si obrazy bázy napíšeme po stĺpcoch do matice, dostaneme:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Poučení z predchádzajúceho príkladu už vieme, že stačí maticu vynásobiť stĺpcovým vektorom $[2, 0, -1]^T$ a dostaneme jeho obraz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- *Určovanie súradníc vektora v inej ako jednotkovej báze je celkom nepríjemné. Preto je výhodnejšie mať k dipozícii maticu pre jednotkovú bázu. Často však poznáme len obrazy bázy (nie jednotkovej) a preto by bolo užitočné vedieť, ako sa dopracovať k matici pre jednotkovú bázu.*
- **Problém:** Poznáme $f(\overline{a_i})$; $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $f : V_n(F) \to V_m(F)$, a $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}]$ je báza priestoru $V_n(F)$. Chceme nájsť $f(\overline{e_i})$; $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $[\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}]$ je jednotková báza.
  - Prvá možnosť-drevorubačská, ale nezavrhneme ju. Vektory $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ postupne zapíšeme ako lin. kombináciu vektorov $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ a potom určíme ich obrazy.
  - Druhá možnosť-príjemnejšia, ale bez práce to nebude. Využijeme pekné vlastnosti lin. transformácií a ich prepojenie na elementárne úpravy rovníc.
- Obe metódy si vyskúšame na príklade.

Lin. transformáciu $f : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ máme danú obrazmi bázy takto: $f([1,1]^T) = [1,2]^T, f([1,2]^T) = [1,1]^T$. Určte maticu transformácie f vzhľadom na jednotkovú bázu.

Riešenie. Vektory $[1,1],[1,2]$ sú lin. nezávislé, teda tvoria bázu priestoru $V_2(\mathbb{R})$.

- Drevorubačská metóda:
  - zapíšeme vektory $[1,0]$ a $[0,1]$ ako lin. kombinácie vektorov $[1,1],[1,2]$. Teda

$$[1,0] = r.[1,1] + s.[1,2] \iff r = 2 \wedge s = -1,$$

$$[0,1] = r.[1,1] + s.[1,2] \iff r = -1 \wedge s = 1.$$

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- Pokračujeme v drevorubačskej metóde, ktorá vďaka dimenzii 2, nie je taká náročná.
  - Potom pre obrazy jednotkovej bázy máme:

$$f([1,0]) = f(2.[1,1]+(-1).[1,2]) = 2.f([1,1])+(-1).f([1,2]) =$$

$$= 2.[1,2] + (-1).[1,1] = [1,3].$$

$$f([0,1]) = f((-1).[1,1]+1.[1,2]) = (-1).f([1,1])+1.f([1,2]) =$$

$$= (-1).[1,2] + 1.[1,1] = [0,-1].$$

  - Matica transformácie f je

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

  - **Pozor, vektory zapisujeme do stĺpcov!**

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- Pokračujeme v príjemnejšej metóde, úvod asi príjemný nebude:
  - Najskôr vyrobíme takúto maticu

    $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

    kde červená matica je po **riadkoch** zapísaná báza a riadky modrej matice sú obrazy bázy.
  - Teraz si treba uvedomiť, čo sa stane,
    - ak vymeníme riadky tejto červeno-modrej matice. Zmení sa naša transformácia f? Nezmení.
    - Ak nejaký riadok vynásobíme nenulovou konštantou, tak ako to bude s obrazmi? Napr. vynásobíme druhý riadok konštantou c :

      $$c.\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|cc} c & 2c & c & c \end{array}\right).$$

      A teraz sa pozrime na pekné vlastnosti lin. transformácií:

      $$f(c[1,2]) = c.f([1,2]) = c.[1,1] = [c,c].$$

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- Pokračujeme v príjemnejšej metóde, ešte stále nevidíme nič príjemné:
  - Pokračujeme v riadkových operáciách-už nám ostala len posledná:
    - Ak jednému riadku pripočítame iný riadok, potom (napr. k druhému pripočítame prvý):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+1 & 2+1 & 1+1 & 1+2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

      A teraz sa pozrime na ďalšiu peknú vlastnost lin. transformácií:

$$f([1,2]+[1,1]) = f([1,2]) + f(1,1]) = [1,2]+[1,1] = [2,3].$$

  - Ak to zhrnieme, tak môžeme beztrestne takúto maticu upravovať elementárnymi riadkovými operáciami a to využijeme pre vyriešenie našej úlohy. Upravíme maticu tak, aby sme vľavo (namiesto červenej) dostali jednotkovú maticu a vpravo teda budú jej obrazy.

Lineárne transformácie a matice, príklad-pokračovanie

- Teda:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

- Matica transformácie f je modrá, ale **transponovaná**

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Nebolo jednoduché sa sem dopracovať, ale snáď to oceníme pri riešení úloh napr. v dimenzii 3.*

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$ je báza vektorové ho priestoru $V(F)$
a nech $\left[\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\right]$ je báza vektorového priestoru $W(F)$
a nech $f : V \to W$ je lineárna transformácia.
Potom táto transformácia je určená obrazmi bázy:

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$ je báza vektorové ho priestoru $V(F)$
a nech $\left[\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\right]$ je báza vektorového priestoru $W(F)$
a nech $f : V \to W$ je lineárna transformácia.
Potom táto transformácia je určená obrazmi bázy:

$$\begin{array}{ccccccccc} f(\overline{a_1}) & = & c_{11} \cdot \overline{b_1} & + & c_{12} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{1n} \cdot \overline{b_n} \\ f(\overline{a_2}) & = & c_{21} \cdot \overline{b_1} & + & c_{22} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{2n} \cdot \overline{b_n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f(\overline{a_m}) & = & c_{m1} \cdot \overline{b_1} & + & c_{m2} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{mn} \cdot \overline{b_n} \end{array}$$

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$ je báza vektorové ho priestoru $V(F)$
a nech $\left[\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\right]$ je báza vektorového priestoru $W(F)$
a nech $f : V \to W$ je lineárna transformácia.
Potom táto transformácia je určená obrazmi bázy:

$$\begin{array}{ccccccccc} f(\overline{a_1}) & = & c_{11} \cdot \overline{b_1} & + & c_{12} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{1n} \cdot \overline{b_n} \\ f(\overline{a_2}) & = & c_{21} \cdot \overline{b_1} & + & c_{22} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{2n} \cdot \overline{b_n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f(\overline{a_m}) & = & c_{m1} \cdot \overline{b_1} & + & c_{m2} \cdot \overline{b_2} & + & \cdots & + & c_{mn} \cdot \overline{b_n} \end{array}$$

Teda ak máme vektor $\overline{u} \in V(F)$ a poznáme jeho súradnice v báze $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$, napr. $[r_1, r_2, \ldots, r_m]$, potom obraz vektora $\overline{u}$ je:

$$f(\overline{u}) = f([r_1 \cdot \overline{a_1} + r_2 \cdot \overline{a_2} + \cdots + r_m \cdot \overline{a_m}]) =$$

$$= r_1 \cdot f(\overline{a_1}) + r_2 \cdot f(\overline{a_2}) + \cdot + r_m \cdot f(\overline{a_m}).$$

K obrazu $f(\overline{u})$ sa vieme dopracovať aj inak. Využijeme koeficienty c_{ij}. Ako?

K obrazu $f(\overline{u})$ sa vieme dopracovať aj inak. Využijeme koeficienty c_{ij}. Ako?
Všimnime si maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

K obrazu $f(\overline{u})$ sa vieme dopracovať aj inak. Využijeme koeficienty c_{ij}. Ako?

Všimnime si maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zrejme

$$f(\overline{u}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

K obrazu $f(\overline{u})$ sa vieme dopracovať aj inak. Využijeme koeficienty c_{ij}. Ako?
Všimnime si maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zrejme

$$f(\overline{u}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

Maticu M_f nazývame maticou lineárnej transformácie.

Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$ je báza priestoru $V_m(F)$
a nech $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots \overline{b_m}\}$ sú vektory priestoru $V_n(F)$.
Nech f je lineárna transformácia $V_m(F)$ do $V_n(F)$, o ktorej platí

$$f(\overline{a_i}) = \overline{b_i}, i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Maticu

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ . & . \\ \overline{a_m} & \overline{b_m} \end{array}\right),$$

kde vľavo máme prvky bázy $V_M(F)$ a vpravo prvky bázy $V_n(F)$, budeme upravovať elementárnymi riadkovými operáciami. Treba si uvedomiť, že lin. transformácie majú pekné vlastnosti.

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

Potom (po vykonaní nejakej elementárnej riadkovej operácie) dostaneme novú maticu

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \overline{c_1} & \overline{d_1} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \\ \cdot & \cdot \\ \overline{c_m} & \overline{d_m} \end{array} \right)$$

kde

$$f(\overline{c_i}) = \overline{d_i}, i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Toto využijeme napr. na hľadanie matice transformácie vzhľadom k inej báze, alebo na hľadanie inverznej matice.

Lineárne transformácie a matice, zhrnutie

- Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}]$ je báza priestoru $V_m(F)$ a nech $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots \overline{b_m}\}$ sú vektory priestoru $V_n(F)$ a vieme, že platí:

$$f(\overline{a_i}) = \overline{b_i}, i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Keď máme nájsť obrazy napr. jednotkovej bázy, tak:

- Napíšeme maticu A

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ . & . \\ \overline{a_m} & \overline{b_m} \end{array}\right)$$

- upravíme ju pomocou elem. riadkových operácií na tvar

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{e_1} & \overline{u_1} \\ \overline{e_2} & \overline{u_2} \\ . & . \\ \overline{e_m} & \overline{u_m} \end{array}\right)$$

Potom $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}$ sú obrazy jednotkovej bázy transformácie f.

Lineárne transformácie a matice, inverzná matica

Tieto vedomosti sme už využili pri hľadaní inverznej matice k matici A:

- Napíšeme maticu A
$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{a_1} & \overline{e_1} \\ \overline{a_2} & \overline{e_2} \\ . & . \\ \overline{a_m} & \overline{e_m} \end{array}\right),$$
kde $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ . \\ \overline{a_m} \end{pmatrix}$ je matica transformácie f a je štvorcová a regulárna.
- upravíme ju pomocou elem. riadkových operácií na tvar
$$A^* = \left(\begin{array}{c|c} \overline{e_1} & \overline{u_1} \\ \overline{e_2} & \overline{u_2} \\ . & . \\ \overline{e_m} & \overline{u_m} \end{array}\right).$$
Potom $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}$ sú obrazy jednotkovej bázy inverznej transformácie k f.

Skladanie lineárnych transformácií

Nech $f : V_2 \to V_3$ *je lineárna transformácia* $V_2(\mathbb{R})$ *do* $V_3(\mathbb{R})$*, ktorá má maticu*

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

nech $g : V_3 \to V_2$ *je lineárna transformácia* $V_3(\mathbb{R})$ *do* $V_2(\mathbb{R})$*, ktorá má maticu*

$$M_g = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Určte obrazy jednotkovej bázy priestoru $V_2(\mathbb{R})$ *v zobrazení* $g \circ f$.

Riešenie. Na určenie matice potrebujeme obrazy jednotkovej bázy v zobrazení $g \circ f$, teda:

$$g \circ f([1,0]) = g(f([1,0])) = g([a_{11}, a_{12}, a_{13}]) =$$
$$= g(a_{11}[1,0,0] + a_{12}[0,1,0] + a_{13}[0,0,1]) =$$
$$= a_{11}g([1,0,0]) + a_{12}g([0,1,0]) + a_{13}g([0,0,1]) =$$
$$= a_{11}[b_{11}, b_{12}] + a_{12}[b_{21}, b_{22}] + a_{13}[b_{31}, b_{32}] =$$
$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}]$$

Analogicky dostaneme

$$g \circ f([0,1]) = [a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}].$$

Skladanie lineárnych transformácií, príklad - pokračovanie

Všimnite si maticu zobrazenia $g \circ f$.

$$M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Už sme takú maticu videli, premýšľajte kde.

Definícia. Nech $V(F), W(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Transformácia $f : V \to W$, ktorá je lineárna a bijektívna, nazývame **izomorfná transformácia.**

Lineárne transformácie a izomorfizmus

Definícia. Nech $V(F), W(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Transformácia $f : V \to W$, ktorá je lineárna a bijektívna, nazývame **izomorfná transformácia.**

Tvrdenie. Ak f je izomorfizmus vektorového priestoru $V(F)$ na vektorový priestor $W(F)$, tak inverzná transformácia f^{-1} je izomorfizmus $W(F)$ na $V(F)$.

Lineárne transformácie a izomorfizmus

Definícia. Nech $V(F), W(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Transformácia $f : V \to W$, ktorá je lineárna a bijektívna, nazývame **izomorfná transformácia.**

Tvrdenie. Ak f je izomorfizmus vektorového priestoru $V(F)$ na vektorový priestor $W(F)$, tak inverzná transformácia f^{-1} je izomorfizmus $W(F)$ na $V(F)$.

Tvrdenie. Nech $V(F), W(F), U(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Ak f je izomorfizmus $V(F)$ na $W(F)$ a g je izomorfizmus $W(F)$ na $U(F)$, tak $g \circ f$ je izomorfizmus $V(F)$ na U(F).

Lineárne transformácie a izomorfizmus

Definícia. Nech $V(F), W(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Transformácia $f : V \to W$, ktorá je lineárna a bijektívna, nazývame **izomorfná transformácia.**

Tvrdenie. Ak f je izomorfizmus vektorového priestoru $V(F)$ na vektorový priestor $W(F)$, tak inverzná transformácia f^{-1} je izomorfizmus $W(F)$ na $V(F)$.

Tvrdenie. Nech $V(F), W(F), U(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Ak f je izomorfizmus $V(F)$ na $W(F)$ a g je izomorfizmus $W(F)$ na $U(F)$, tak $g \circ f$ je izomorfizmus $V(F)$ na U(F).

Definícia. Ak existuje izomorfizmus $V(F)$ na $W(F)$, tak hovoríme, že vektorové priestory $V(F), W(F)$ sú izomorfné (rovnaké).

Tvrdenie. Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}]$ je báza vektorového priestoru $V(F)$ a nech $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\}$ sú ľubovoľné vektory vektorového priestoru $W(F)$. Potom existuje práve jedna lineárna transformácia $f : V \to W$ také, že
$f(\overline{a_1}) = \overline{b_1}, f(\overline{a_2}) = \overline{b_2}, \cdots, f(\overline{a_n}) = \overline{b_n}$.

Lineárna transformácia a báza

Tvrdenie. Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}]$ je báza vektorového priestoru $V(F)$ a nech $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\}$ sú ľubovoľné vektory vektorového priestoru $W(F)$. Potom existuje práve jedna lineárna transformácia $f : V \to W$ také, že
$f(\overline{a_1}) = \overline{b_1}, f(\overline{a_2}) = \overline{b_2}, \cdots, f(\overline{a_n}) = \overline{b_n}$.

Tvrdenie. Nech $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}]$ je báza vektorového priestoru $V(F)$ a nech $f : V \to W$ je lineárna transformácia $V(F)$ do $W(F)$. Potom f je bijekcia vtedy a len vtedy, keď $[f(\overline{a_1}), f(\overline{a_2}), \cdots, f(\overline{a_n})]$ je báza priestoru $W(F)$.