Lineárne zobrazenia, motivačný príklad

V $\mathbb{R}^2$ *je dané lineárne zobrazenie obrazmi bázy* $([1,0],[0,1])$ *takto:* $f([1,0]^T) = [4,2]^T$, $f([0,1]^T) = [-3,-1]^T$. *Nájdite všetky vektory, ktoré pri tomto zobrazení nezmenia smer (len veľkosť, prípadne orientáciu).*

Lineárne zobrazenia, motivačný príklad

V $\mathbb{R}^2$ *je dané lineárne zobrazenie obrazmi bázy* $([1,0],[0,1])$ *takto:* $f([1,0]^T) = [4,2]^T$, $f([0,1]^T) = [-3,-1]^T$. *Nájdite všetky vektory, ktoré pri tomto zobrazení nezmenia smer (len veľkosť, prípadne orientáciu).*

Riešenie. Pre obraz ľubovolného vektora $[a,b]$ platí:

$$f([a,b]^T) = a.f([1,0]^T) + b.f([0,1]^T) = [4a-3b, 2a-b]^T.$$

Ak nemá zmeniť smer, tak potom musí platiť:

$$f([a,b]^T) = k.[a,b]^T, k \in \mathbb{R},$$

teda

$$[4a-3b, 2a-b]^T = [ka, kb]^T.$$

Potom

$$4a-3b = k.a,$$

$$2a-b = k.b.$$

Lineárne zobrazenia, motivačný príklad

K druhej rovnici pripočítame $(-1)-$násobok prvej rovnice a dostaneme:

$$-2a + 2b = k.b - k.a,$$

teda

$$2(b - a) = k(b - a).$$

Potom môžu nastať dve možnosti a to:

$$a = b \vee k = 2 \iff a = b \vee a = \frac{3}{2}b.$$

Čiže sa jedná o množiny vektorov

$$k = 1 \Rightarrow \overline{u} \in \{[a, a]^T \in \mathbb{R}^2\},$$

$$k = 2 \Rightarrow \overline{u} \in \{[a, b]^T \in \mathbb{R}^2; a = \frac{3}{2}b\}.$$

Lineárne zobrazenia, motivačný príklad

Pre kontrolu a asi aj lepšie pochopenie urobíme skúšku správnosti. Zostavíme si maticu zobrazenia vzhľadom k jednotkovej báze, teda zapíšeme obrazy bázy do stĺpcov:

$$M_f = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

a postupne určíme obrazy stĺpcových vektorov $[a, a]^T$, $\left[\frac{3}{2}b, b\right]^T$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

teda sme ako obraz dostali $k-$násobok vzoru.

Lineárne zobrazenia, motivačný príklad

Ešte skontrolujeme druhý vektor:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ 2b \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2}b \\ b \end{pmatrix},$$

teda sme ako obraz znova dostali $k-$násobok vzoru.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Definícia. Nech A je štvorcová matica stupňa n. Hovoríme, že vektor $\overline{x}$ je **vlastný vektor** ak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, aby $A.\overline{x} = \lambda.\overline{x}$. Číslo λ nazývame **vlastná hodnota** matice A.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Zrejme

$$A\overline{x} - \lambda.\overline{x} = \mathbf{0}$$

$$A\overline{x} - \lambda.I_n.\overline{x} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda.I_n - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

Posledná rovnica sa nazýva **charakteristická rovnica** prislúchajúca matici A.
Takáto rovnica má nenulové riešenie práve vtedy, keď

$$det(\lambda.I_n - A) = 0. \ (*)$$

Výraz na ľavej strane rovnice (*) sa nazýva **charakteristický polynóm**, jeho korene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sa nazývajú **vlastné hodnoty** matice A a vektor $\overline{x}$ je **vlastný vektor.** Množina všetkých vlastných vektorov matice A tvorí **vlastný podpriestor** matice A.
Nulový vektor nebudeme považovať za vlastný, lebo

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; A.\overline{0} = \overline{0} = \lambda.\overline{0}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

- Zostavíme charakteristickú rovnicu:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & -2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \cdot \overline{x} = \mathbf{0}.$$

- Vyjadríme si determinant matice na ľavej strane rovnice a zistíme, kedy je rovný 0. Po úprave dostaneme:

$$(\lambda - 1).(\lambda - 3).(\lambda + 2) = 0.$$

Potom $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2.$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad- pokračovanie

- Určíme vlastné vektory pre λ_1. Teda vyriešime sústavu

$$(\lambda_1.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ -3 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[\frac{3}{4}r, \frac{3}{8}r, r]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad-pokračovanie

- Podobne určíme vlastné vektory pre λ_2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[0, \frac{5}{2}r, r]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad-pokračovanie

- A na záver určíme aj vlastné vektory pre λ_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[0,0,r]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Vlastné hodnoty, príklad

Určte vlastné hodnoty k matici

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty, príklad

Určte vlastné hodnoty k matici

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Vlastné hodnoty, príklad

Určte vlastné hodnoty k matici

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

- **Čo je riešením tejto rovnice?**
- **Čo to znamená?**

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & 1 \\ 4 & -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda{-}5)(\lambda{-}4)(\lambda{+}1){+}8{+}8{+}8(\lambda{-}4){+}4(\lambda{-}5){-}2()\lambda{+}1 =$$

$$= (\lambda{-}4)(\lambda^2{-}4\lambda{-}5{+}8){+}16{+}4\lambda{-}20{-}2\lambda{-}2 = (\lambda{-}4)(\lambda{-}3)(\lambda{-}1){+}2(\lambda{-}3) =$$
$$= (\lambda - 3)((\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & 1 \\ 4 & -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-4)(\lambda+1)+8+8+8(\lambda-4)+4(\lambda-5)-2()\lambda+1 =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda-5+8)+16+4\lambda-20-2\lambda-2 = (\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-1)+2(\lambda-3) =$$
$$= (\lambda-3)((\lambda-4)(\lambda-1)+2) = (\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-3)^2(\lambda-2).$$

Teda

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určíme vlastné vektory pre $\lambda = 3$. Teda vyriešime sústavu

$$(3.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

Teda

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 4 & -4 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určíme vlastné vektory pre $\lambda = 3$. Teda vyriešime sústavu

$$(3.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

Teda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Potom pre $\lambda = 3$ máme dva vlastné vektory
  - $\overline{v_1} = (1, 1, 0)^T$,
  - $\overline{v_2} = (-1, 0, 1)^T$.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určíme vlastné vektory pre $\lambda = 2$. Teda vyriešime sústavu

$$(2.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

Teda

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & -4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určíme vlastné vektory pre $\lambda = 2$. Teda vyriešime sústavu

$$(2.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}.$$

Teda

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & -4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

- Potom pre $\lambda = 2$ máme jeden vlastný vektor
    - $\overline{v_3} = (-2, 1, 4)^T$.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 3 \\ 1 & \lambda-10 & 6 \\ 1 & -8 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-10)(\lambda+4)-48-3(\lambda-10)+48(\lambda-2)+4(\lambda+4) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda-40+48)+\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9) = (\lambda-3)^2(\lambda-2).$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 & 3 \\ 1 & \lambda - 10 & 6 \\ 1 & -8 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-10)(\lambda+4)-48-3(\lambda-10)+48(\lambda-2)+4(\lambda+4) =$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda - 40 + 48) + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

Teda rovnako ako v predchádzajúcom príklade je

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2.$$

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe určíme vektory pre jednotlivé vlastné hodnoty:

- $\lambda = 3$
  - $\overline{v_1} = (1, 1, 1)^T$,
- $\lambda = 2$
  - $\overline{v_2} = (0, 3, 4)^T$.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe určíme vektory pre jednotlivé vlastné hodnoty:

- $\lambda = 3$
  - $\overline{v_1} = (1, 1, 1)^T$,
- $\lambda = 2$
  - $\overline{v_2} = (0, 3, 4)^T$.

Porovnajte výsledky pre matice A, B.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe určíme vektory pre jednotlivé vlastné hodnoty:

- $\lambda = 3$
  - $\overline{v_1} = (1, 1, 1)^T$,
- $\lambda = 2$
  - $\overline{v_2} = (0, 3, 4)^T$.

Porovnajte výsledky pre matice A, B.
Obidve matice majú rovnaké vlastné čísla, matica A má tri vlastné vektory, matica B len dva. Maticu B nazývame **defektná**.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory, vlastnosti

- Matica typu $n \times n$ má práve n vlastných čísel, vrátane komplexných, či viacnásobných.
- Ak $\overline{v}$ je vlastný vektor matice A, potom $k \cdot \overline{v}$ je tiež vlastný vektor pre to isté λ.
- Ak $\overline{v}, \overline{u}$ sú vlastné vektory matice A pre to isté λ, potom ich lin. kombinácia je tiež vlastný vektor pre to isté λ.
- Ak $\overline{v}, \overline{u}$ sú vlastné vektory matice A pre rôzne vlastné čísla, potom sú lineárne nezávislé.
- Ak má matica $k-$násobné vlastné číslo, a $k > 1$, potom nemusí k nemu existovať $k-$ lin. nezávislých vl. vektorov. Ak ich je menej ako k, hovoríme, že je defektná.
- Štvorcová matica je regulárna práve vtedy, keď $\lambda = 0$ nie je jej vlastnou hodnotou.

- Zrejme

$$A^2 \cdot \overline{x} = A(A \cdot \overline{x}) = A(\lambda \cdot \overline{x}) = \lambda(A \cdot \overline{x}) = \lambda(\lambda \cdot \overline{x}) = \lambda^2 \cdot \overline{x}.$$

  Toto sa dá zovšeobecniť pre ľubovolné kladné celé číslo:
  - Nech $k \in \mathbb{Z}^+, \lambda$ je vlastná hodnota matice A a $\overline{x}$ je príslušný vlastný vektor. Potom λ^k je vlastná hodnota matice A^k a $\overline{x}$ je jej vlastný vektor.
- Nech matica A má vlastné číslo λ a k nemu príslušný vlastný vektor $\overline{x}$.
  - Potom matica $A + c \cdot I$ má vlastné číslo $\lambda + c$ a k nemu príslušný vlastný vektor $\overline{x}$.
  - Potom matica A^{-1} má vlastné číslo $\frac{1}{\lambda}$ a k nemu príslušný vlastný vektor $\overline{x}$.

Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A.

- Potom súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ je rovný súčtu prvkov matice na hlavnej diagonále.
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = |A|$.

Podobné matice, vlastné hodnoty a vlastné vektory

Definícia. Nech A, B sú štvorcové matice stupňa n. Hovoríme, že sú **podobné** ak existuje štvorcová regulárna matica P stupňa n taká, že platí: $B = P^{-1}.A.P$.

Podobné matice, vlastné hodnoty a vlastné vektory

Definícia. Nech A, B sú štvorcové matice stupňa n. Hovoríme, že sú **podobné** ak existuje štvorcová regulárna matica P stupňa n taká, že platí: $B = P^{-1}.A.P$.

Veta. Podobné matice majú rovnaké vlastné hodnoty.

Definícia. Nech A, B sú štvorcové matice stupňa n. Hovoríme, že sú **podobné** ak existuje štvorcová regulárna matica P stupňa n taká, že platí: $B = P^{-1}.A.P$.

Veta. Podobné matice majú rovnaké vlastné hodnoty.

Pozor, opačná implikácia vo všeobecnosti neplatí!
Poznámka (pohľad do IDM). Relácia podobnosti je zrejme reflexívna, symetrická a tranzitívna, teda je to ekvivalencia. Množina štvorcových matíc sa teda rozpadá na disjunktné triedy navzájom podobných matíc.

Podobné matice, vlastné hodnoty a vlastné vektory, príklad

Nájdite vlastné čísla matíc: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Sú tieto matice podobné?

Nájdite vlastné čísla matíc: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Sú tieto matice podobné?

Riešenie. Po úprave zistíme, že obe matice majú rovnaké vlastné číslo $\lambda = 1$. Všimnime si prvú z nich, je to jednotková matica. Preto platí:

$$P^{-1}.E.P = (P^{-1}.E).P = P^{-1}.P = E.$$

Teda jednotková matica je podobná iba sama so sebou. Našli sme príklad matíc, ktoré majú rovnaké vlastné čísla a nie sú podobné.

Motivačný príklad

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Motivačný príklad

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Motivačný príklad

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Zrejme

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Vektory pre jednotlivé vlastné hodnoty:

- $\lambda = 2$
  - $\overline{v_1} = (-1, 0, 1)^T$,
  - $\overline{v_2} = (0, 1, 0)^T$,
- $\lambda = 1$
  - $\overline{v_3} = (-2, 1, 1)^T$.

Motivačný príklad-pokračovanie

Vytvorme maticu P, ktorej stĺpce sú dané vlastnými vektormi zadanej matice:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a jej inverzná matica je

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobte:

$$P^{-1}AP.$$

Motivačný príklad-pokračovanie

Po vynásobení dostaneme:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po pozornom skúmaní zistíme, že sme dostali diagonálnu maticu a na diagonále sú vlastné čísla pôvodnej matice, presne v takom poradí, v akom sme použili vlastné vektory v matici P. Tento proces sa volá **diagonalizácia.**

Diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **diagonalizovateľná.**

Diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica. Existuje vždy matica P taká, že $P^{-1}AP$ je diagonálna matica?

Diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica. Existuje vždy matica P taká, že $P^{-1}AP$ je diagonálna matica?
- **Tvrdenie.** Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ sú nasledujúce výroky ekvivalentné:
  1. A je diagonalizovateľná.
  2. A má n lineárne nezávislých vlastných vektorov.

Diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica. Existuje vždy matica P taká, že $P^{-1}AP$ je diagonálna matica?
- **Tvrdenie.** Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ sú nasledujúce výroky ekvivalentné:
  1. A je diagonalizovateľná.
  2. A má n lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Ktoré matice sú teda diagonizovateľné?

Diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica. Existuje vždy matica P taká, že $P^{-1}AP$ je diagonálna matica?
- **Tvrdenie.** Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ sú nasledujúce výroky ekvivalentné:
  1. A je diagonalizovateľná.
  2. A má n lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Ktoré matice sú teda diagonizovateľné?
- Ako z diagonizovateľnej matice dostaneme diagonálnu maticu?

Vlastné hodnoty, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty, príklad

Určte vlastné hodnoty a vektory k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

- Zostavíme charakteristickú rovnicu:
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$
- Vyjadríme si determinant matice na ľavej strane rovnice a zistíme, kedy je rovný 0. Po úprave dostaneme:
$$(\lambda - 2).(\lambda - 4).(\lambda + 1) = 0.$$
Potom $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$.

Vlastné hodnoty, príklad-pokračovanie

- Určíme vlastné vektory pre λ_1. Teda vyriešime sústavu $(\lambda_1.I_3 - A).\overline{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[0, r, 0]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Vlastné hodnoty, príklad- pokračovanie

- Podobne určíme vlastné vektory pre λ_2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[\frac{1}{2}r, 0, r]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Vlastné hodnoty, príklad-pokračovanie

- A na záver určíme aj vlastné vektory pre λ_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Riešením je teda množina vektorov $\{[-2r, 0, r]^T; r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Všimnite si, že vlastné vektory pre rôzne vlastné čísla sú v tomto príklade navzájom ortogonálne.

Vlastné hodnoty, príklad-pokračovanie

- Vyberme teraz z každej množiny vektorov jeden tak, aby sme dostali trojicu normovaných ortogonálnych vektorov:

$$\overline{x_1} = [0, 1, 0]^T, \overline{x_2} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^T, \overline{x_3} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T.$$

Zostavme maticu H tak, že jej stĺpcami budú postupne vektory $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$. Zrejme:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

$$H^T = H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty, príklad-pokračovanie

- Na záver ešte vypočítame: $H^{-1}.A.H$. Po náročnom výpočte (násobenie matíc je fuška) dostaneme:

$$H^{-1}.A.H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Čím je výsledná matica zaujímavá?

Ortogonálna diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **ortogonálne diagonalizovateľná.**

Ortogonálna diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **ortogonálne diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Kedy existuje matica P taká, že matica

$$P^{-1}AP = P^{T}AP$$

je diagonálna?

Ortogonálna diagonalizácia

- Matica A, pre ktorú existuje taká vhodná matica P, sa nazýva **ortogonálne diagonalizovateľná.**
- Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Kedy existuje matica P taká, že matica

$$P^{-1}AP = P^{T}AP$$

  je diagonálna?
- Nech A je symetrická matica typu $n \times n$. Potom
  1. Vlastné hodnoty matice A sú reálne čísla.
  2. Príslušné vlastné vektory sú navzájom ortogonálne.