Druhé cvičení

1. Dané jsou matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

   (a) Určete: A^T, B^T.

   (b) Určete: $A + B, A^T + B, 3 \cdot A + (-2) \cdot B$.

   (c) Určete: AB, BA.

   Výsledky: a) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $3 \cdot A - 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $AB = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 13 \\ 13 & 15 & 16 \\ 14 & 14 & 17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 13 \\ 13 & 15 & 11 \\ 16 & 16 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

   Vypočtěte součiny AC a BC.

   Obecně: Jak vypadají v porovnání s původní maticí C výsledky násobení AC a BC?

   Výsledky: $AC = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (první řádek C se zpětinásobil, druhý řádek se vyměnil se třetím), $BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (od druhého řádku B se odečetl trojnásobek prvního).

3. Vypočítejte CD, kde C je z předchozího příkladu a $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Obecně: Jak vypadá v porovnání s původní maticí C výsledek násobení CD? A co DC?

   Výsledky: $CD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (první sloupec výsledku vznikl jako minus dvojnásobek prvního sloupce C plus druhý sloupec C; druhý sloupec výsledku je stejný jako druhý sloupec C), součin DC nelze vypočítat.

4. Vypočítejte mocniny matic:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^4$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

   Výsledky: a) $\begin{pmatrix} 62 & 63 \\ 63 & 62 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. * Vypočítejte n−tou ($n \in \mathbb{N}$) mocninu matice: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Na množině reálných čísel řešte soustavy rovnic:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} -9x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array} \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \qquad \text{d)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & 5z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\text{e)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 6x & + & -2y & & & = & 8 \end{array} \qquad \text{f)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 7y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Výsledky: a) $\left[\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right]$, b) nemá řeešní, c) $\{[-t, 1, t]; t \in \mathbb{R}\}$, d) $\left[\frac{4}{7}, 0, \frac{1}{7}\right]$, e) $\left\{\left[\frac{7-t}{5}, \frac{1-3t}{5}, t\right]; t \in \mathbb{R}\right\}$, f) $\left\{\left[\frac{3-t}{3}, \frac{-t}{3}, t\right]; t \in \mathbb{R}\right\}$.

7. Na množině reálných čísel řešte soustavy rovnic s parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & cy & - & z & = & 6 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ cx & & & - & 6z & = & 0 \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcc} 2x & + & cy & + & 4z & = & c \\ cx & + & 2y & + & 3z & = & 3c-1 \\ x & + & y & + & z & = & 2c \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} cx & + & 2y & + & z & = & c \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 3c \\ x & + & y & + & z & = & 2c \end{array} \qquad \text{d)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & cy & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & + & cz & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

$$\text{e)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} cx & + & 2y & + & z & = & c \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & c \\ x & + & y & + & z & = & 3c \end{array} \qquad \text{f)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} cx & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & cy & + & 2z & = & c \\ 4x & + & 2y & + & 8z & = & c \end{array}$$

Výsledky: a) pro $c = 2$ nekonečně mnoho řešení $\{[3t, 3-t, t]; t \in \mathbb{R}\}$, pro $c = -3$ soustava nemá řešení, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ je řešení $\left[\frac{18}{c+3}, \frac{9}{c+3}, \frac{3c}{c+3}\right]$, b) pro $c = 5$ soustava nemá řešení, pro $c = 2$ je řešení $\{[7-t, t, -3]; t \in \mathbb{R}\}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$ je řešení $\left[\frac{3c+2}{5-c}, \frac{7c-1}{5-c}, \frac{2c^2+1}{c-5}\right]$, c) pro $c = 1$ je řešení $\{[3-t, -1, t]; t \in \mathbb{R}\}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je řešení $[0, -c, 3c]$, d) pro $c = 1$ je řešení $\{[-t, t, t]; t \in \mathbb{R}\}$, pro $c = 2$ je řešení $\{[-2t, 2t, t]; t \in \mathbb{R}\}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ je řešení $[0, 0, 0]$, e) pro $c = 1$ soustava nemá řešení, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je řešení $\left[\frac{3c}{c-1}, -5c, \frac{8c^2-11c}{c-1}\right]$, f) pro $c \in \{-1, 3\}$ soustava nemá řešení, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ je řešení $\left[\frac{-3c(c+2)}{8(c-3)(c+1)}, \frac{3c^2}{4(c-3)(c+1)}, \frac{c^2(c-2)}{8(c-3)(c+1)}\right]$.

8. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte všechny matice X, pro které platí

a) $AX = B$, b) $XA = C$, c) $XA = C^T$

Výsledky: a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1-3t & -t & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, c) matice neexistuje

9. Najděte průsečnici rovin ρ_1, ρ_2 a napište alespoň dva různé body, které na této průsečnici leží.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \rho_1: & 2x & - & y & + & 5z & - & 3 & = & 0 \\ \rho_2: & 3x & - & y & + & 2z & + & 1 & = & 0 \end{array}$$

Výsledky: průsečnice: $x = 3t - 4, y = 11t - 11, z = t$, body: např.: $[-4, -11, 0], [-1, 0, 1]$.

10. Na množině reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 4. \end{array}$$

Výsledky: $\{[s - 3t + 6, s, -3, 4 + 2t, t]; s, t \in \mathbb{R}\}$.

11. * Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte všechny matice B, které s maticí A komutují, tzn. pro které platí $AB = BA$.

Dříve, než začněte počítat, pokuste se několik takových matic uhodnout. Pak se přesvědčte, že uhodnuté matice jsou skutečně speciálním případem obecného řešení.