Druhé cvičení

1. Dané jsou matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

   (a) Určete: A^T, B^T.

   (b) Určete: $A + B, A^T + B, 3 \cdot A + (-2) \cdot B$.

   (c) Určete: AB, BA.

   Výsledky: a) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $3 \cdot A - 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $AB = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 13 \\ 13 & 15 & 16 \\ 14 & 14 & 17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 13 \\ 13 & 15 & 11 \\ 16 & 16 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
   Vypočtěte součiny AC a BC.

   Obecně: Jak vypadají v porovnání s původní maticí C výsledky násobení AC a BC?

   Výsledky: $AC = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (první řádek C se zpětinásobil, druhý řádek se vyměnil se třetím), $BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (od druhého řádku B se odečetl trojnásobek prvního).

3. Vypočítejte CD, kde C je z předchozího příkladu a $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Obecně: Jak vypadá v porovnání s původní maticí C výsledek násobení CD? A co DC?

   Výsledky: $CD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (první sloupec výsledku vznikl jako minus dvojnásobek prvního sloupce C plus druhý sloupec C; druhý sloupec výsledku je stejný jako druhý sloupec C), součin DC nelze vypočítat.

4. Vypočítejte mocniny matic:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^4$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

   Výsledky: a) $\begin{pmatrix} 62 & 63 \\ 63 & 62 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. * Vypočítejte $n-$tou ($n \in \mathbb{N}$) mocninu matice: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Na množině reálných čísel řešte soustavy rovnic:

   a) $\begin{aligned} -9x + 3y + 2z &= 1 \\ -2x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 3x + 2y + 4z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &+& z &=& 2\\ 2x &+& 3y &+& 2z &=& 3\\ x &+& y &+& z &=& 1 \end{array} \qquad \text{d)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &+& 3z &=& 1\\ 4x &+& 4y &+& 5z &=& 3\\ 3x &+& y &+& 2z &=& 2 \end{array}$$

$$\text{e)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &+& z &=& 3\\ x &+& 3y &+& 2z &=& 2\\ 6x &+& -2y && &=& 8 \end{array} \qquad \text{f)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& y &+& z &=& 2\\ x &+& 2y &+& z &=& 1\\ -x &+& 7y &+& 2z &=& -1 \end{array}$$

Výsledky: a) $\left[\frac{1}{3},\frac{8}{3},-2\right]$, b) nemá řeěsní, c) $\{[-t,1,t];t\in\mathbb{R}\}$, d) $\left[\frac{4}{7},0,\frac{1}{7}\right]$, e) $\left\{\left[\frac{7-t}{5},\frac{1-3t}{5},t\right];t\in\mathbb{R}\right\}$, f) $\left\{\left[\frac{3-t}{3},\frac{-t}{3},t\right];t\in\mathbb{R}\right\}$.

7. Na množině reálných čísel řešte soustavy rovnic s parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& cy &+& 4z &=& 2\\ x &+& y &+& cz &=& 9\\ 2x &+& y &+& cz &=& 4 \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& cy &+& 4z &=& c\\ cx &+& 2y &+& 3z &=& 3c-1\\ x &+& y &+& z &=& 2c \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} cx &+& 2y &+& z &=& c\\ 2x &+& 3y &+& 2z &=& 3c\\ x &+& y &+& z &=& 2c \end{array} \qquad \text{d)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& cy &+& 2z &=& 0\\ 4x &+& 3y &+& cz &=& 0\\ x &+& y && &=& 0 \end{array}$$

$$\text{e)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} cx &+& 2y &+& z &=& c\\ 2x &+& 3y &+& 2z &=& c\\ x &+& y &+& z &=& 3c \end{array} \qquad \text{f)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} cx &+& 2y &+& 3z &=& 0\\ 4x &+& cy &+& 2z &=& c\\ 4x &+& 2y &+& 8z &=& c \end{array}$$

Výsledky: a) pro $c \in \{-2,2\}$ soustava nemá řešení, pro $c \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ je řešení $\left[-5,\frac{7(c-8)}{c^2-4},\frac{7(2c-1)}{c^2-4}\right]$, b) pro $c=5$ soustava nemá řešení, pro $c=2$ je řešení $\{[7-t,t,-3];t\in\mathbb{R}\}$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$ je řešení $\left[\frac{3c+2}{5-c},\frac{7c-1}{5-c},\frac{2c^2+1}{c-5}\right]$, c) pro $c=1$ je řešení $\{[3-t,-1,t];t\in\mathbb{R}\}$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ je řešení $[0,-c,3c]$, d) pro $c=1$ je řešení $\{[-t,t,t];t\in\mathbb{R}\}$, pro $c=2$ je řešení $\{[-2t,2t,t];t\in\mathbb{R}\}$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ je řešení $[0,0,0]$, e) pro $c=1$ soustava nemá řešení, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ je řešení $\left[\frac{3c}{c-1},-5c,\frac{8c^2-11c}{c-1}\right]$, f) pro $c\in\{-1,3\}$ soustava nemá řešení, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$ je řešení $\left[\frac{-3c(c+2)}{8(c-3)(c+1)},\frac{3c^2}{4(c-3)(c+1)},\frac{c^2(c-2)}{8(c-3)(c+1)}\right]$.

8. Jsou dány matice

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&5\\2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$$

Najděte všechny matice X, pro které platí

a) $AX=B$, b) $XA=C$, c) $XA=C^T$

Výsledky: a) $\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1-3t & -t & t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$, c) matice neexistuje

9. Najděte průsečnici rovin ρ_1,ρ_2 a napište alespoň dva různé body, které na této průsečnici leží.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \rho_1: & 2x &-& y &+& 5z &-& 3 &=& 0\\ \rho_2: & 3x &-& y &+& 2z &+& 1 &=& 0 \end{array}$$

Výsledky: průsečnice: $x=3t-4, y=11t-11, z=t$, body: např.: $[-4,-11,0],[-1,0,1]$.

10. Na množině reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 &-& x_2 &+& 2x_3 && &+& 3x_5 &=& 0\\ 2x_1 &-& 2x_2 &+& 6x_3 &+& 2x_4 &+& 2x_5 &=& 2\\ 3x_1 &-& 3x_2 &+& 6x_3 &+& x_4 &+& 7x_5 &=& 4. \end{array}$$

Výsledky: $\{[s-3t+6,s,-3,4+2t,t];s,t\in\mathbb{R}\}$.

11. * Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte všechny matice B, které s maticí A komutují, tzn. pro které platí $AB = BA$.

Dříve, než začněte počítat, pokuste se několik takových matic uhodnout. Pak se přesvědčte, že uhodnuté matice jsou skutečně speciálním případem obecného řešení.