Postupnosti a limita postupnosti

January 18, 2024

Postupnosti

Nekonečná postupnosť *je predpis (pravidlo), ktorý každému prirodzenému číslu priraďuje nejaký prvok z danej množiny* A*. (Pritom predpokladáme, že množina* A *je neprázdna, inak by sa predsa žiaden taký predpis nedal vymyslieť.) Podrobnejšie hovoríme o postupnosti prvkov množiny* A*. Postupnosť môžeme chápať aj ako špeciálny prípad zobrazení.*
Nekonečné postupnosti môžu byť zadané:

- *predpisom (vzorcom) pre výpočet* $n-$*tého člena postupnosti*
- *rekurentným vzťahom*
- *graficky*

Postupnosti zadané vzorcom

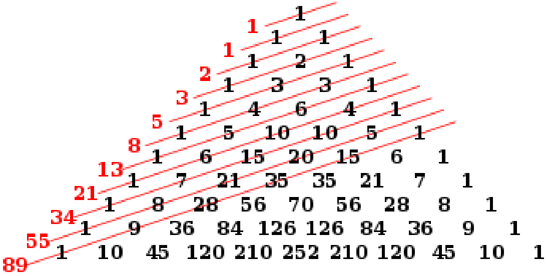
Postupnosť zapisujeme v tvare $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom namiesto a_n píšeme vzťah, napr. $\{2n-6\}_{n=1}^{\infty}$. Toto treba chápať tak, že

- $a_1 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$,
- $a_2 = 2 \cdot 2 - 6 = -2$,
- $\dots,$
- $a_n = 2 \cdot n - 6$,
- $\dots$

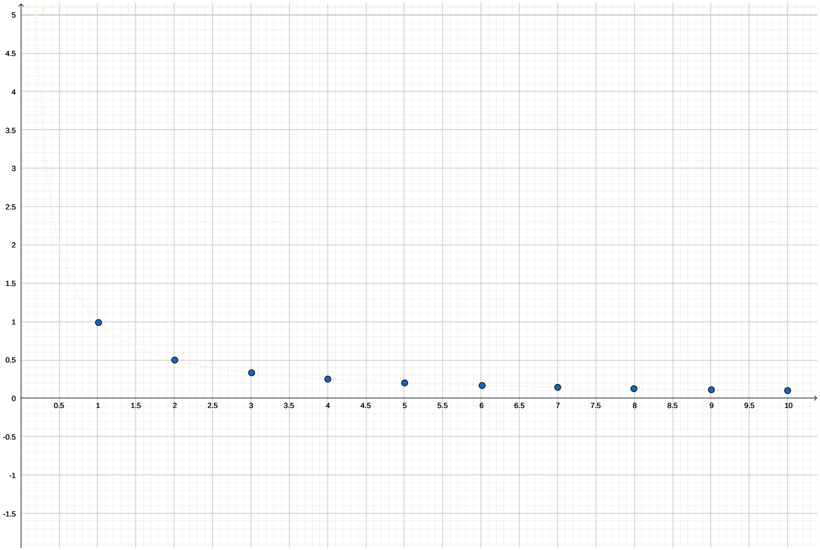
Postupnosti zadané rekurentne

Máme zadané hodnoty pre prvých k členov a vzťah pre $(k+1)-$vý člen postupnosti pomocou predchádzajúcich $k-$ členov. Napr. je známa Fibonacciho postupnosť, kde

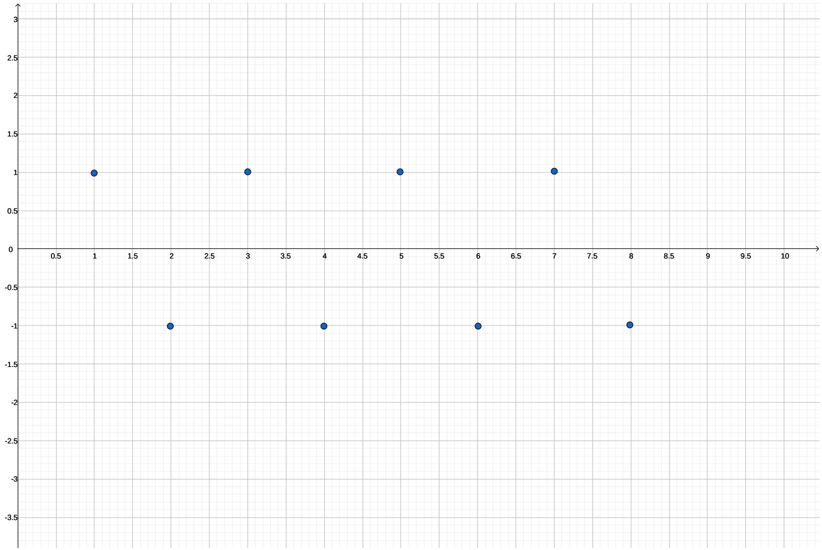
$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$



Postupnosti zadané graficky



Postupnosti zadané graficky



Topologické pojmy

Definícia (Okolie bodu)

Okolím bodu $a \in R$ *(resp.* ε*- okolím) rozumieme množinu*

$$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in R; |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

bod a *sa nazýva stred okolia a číslo* ε *polomer okolia.*
Množinu

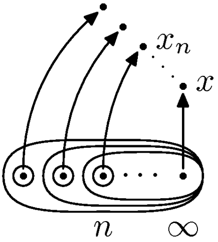
$$\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) - \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \{x \in R; 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

budeme nazývať **redukovaným (rýdzim) okolím bodu** $a \in R$.
(Pre naše potreby obvykle predpokladáme, že ε *je ľubovolne malé.)*

Topologické pojmy

Definícia (Hromadný bod)

Bod $x \in R$ je **hromadný bod** *množiny $M \subseteq R$, ak v každom jeho redukovanom okolí leží aspoň jeden bod $x_i \in M$.*



Topologické pojmy

Definícia

$M \leq a \;\; (a \leq M) \iff \forall x \in M; x \leq a \;\; (\forall x \in M; a \leq x)$

- *Ak platí* $M \leq a, a \in R$, *hovoríme, že* a *je* **horné ohraničenie množiny** M *a množina* M *je* **zhora ohraničená**.
- *Ak platí* $a \leq M, a \in R$, *hovoríme, že* a *je* **dolné ohraničenie množiny** M *a množina* M *je* **zdola ohraničená**.
- $a \in R$ *je* **najväčší prvok množiny** M, *ak platí* $a \in M$ *a* $M \leq a$.
- $a \in R$ *je* **najmenší prvok množiny** M, *ak platí* $a \in M$ *a* $a \leq M$.

Definícia

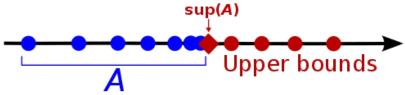
Nech $M \subset R$

- *Najmenšie horné ohraničenie množiny* M *nazývame* **suprémum množiny** M.

$$\sup M = \min\{x \in R; M \leq x\}.$$

- *Najväčšie dolné ohraničenie množiny* M *nazývame* **infimum množiny** M.

$$\inf M = \max\{x \in R; M \geq x\}.$$



Limita postupnosti-vlastná

Hovoríme, že číslo a je **limitou postupnosti** $a_1, a_2, \ldots$ ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Limita postupnosti-vlastná

Hovoríme, že číslo a je **limitou postupnosti** $a_1, a_2, \ldots$ ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

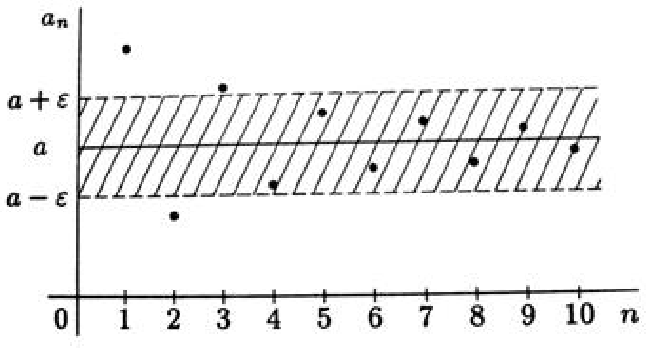
Ako toto správne pochopiť?

Limita postupnosti-vlastná

Hovoríme, že číslo a je **limitou postupnosti** $a_1, a_2, \ldots$ ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

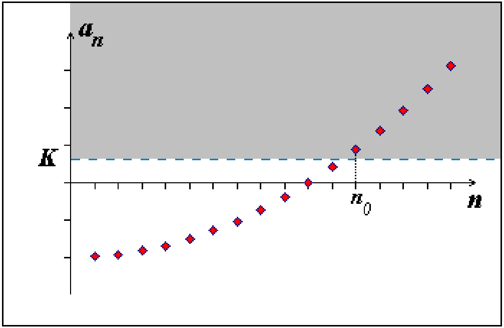
Ako toto správne pochopiť?



Limita postupnosti-nevlastná

- Nech ku každému číslu K existuje n_0 tak, že pre každé $n > n_0$ je $a_n > K$. Potom hovoríme, že postupnosť má **nevlastnú limitu** $+\infty$.

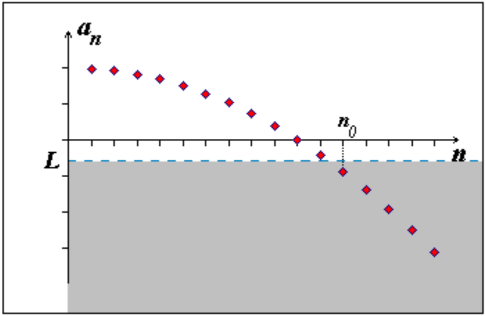
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$



Limita postupnosti-nevlastná

- Nech ku každému číslu L existuje n_0 tak, že pre každé $n > n_0$ je $a_n < L$. Potom hovoríme, že postupnosť má **nevlastnú limitu** $-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$



Limita postupnosti

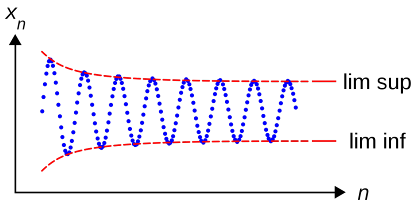
Už vieme, že limita postupnosti môže byť:

- *vlastná,*
- *nevlastná.*

Postupnosť, ktorá má vlastnú limitu, sa nazýva **konvergentná.**
Postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu alebo nemá žiadnu limitu, sa nazýva **divergentná.**

Limita postupnosti

- *Každá postupnosť má najviac se jednu limitu.*
- *Bod b sa nazýva* **hromadnou hodnotou** *postupnosti (a_n), ak pre každé okolie $\mathcal{U}(b)$ je $a_n \in \mathcal{U}(b)$ pre nekonečne mnoho indexov n.*
- **Horná limita**-$\limsup a_n$-*najväčšia z hromadných hodnôt postupnosti (a_n)*
- **Dolná limita**-$\liminf a_n$-*najmenšia z hromadných hodnôt postupnosti (a_n)*



Limita postupnosti-vlastnosti

- *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.*
  Každá ohraničená postupnosť je konvergentná?
- *Monotónna a ohraničená postupnosť je konvergentná.*
- *Nech* (a_n) *je konvergentná postupnosť. Každá jej vybraná podpostupnosť je konvergentná a má s ňou rovnakú limitu.*

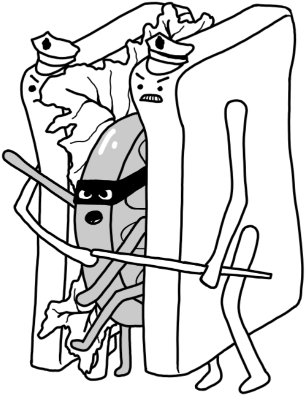
Užitočné vlastnosti pre výpočet limít

- *Ak* $\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b,$
  je
  $$\lim(a_n + b_n) = a + b,$$
  $$\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b,$$
  ak $b \neq 0$
  $$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$
- *Nech existuje* $\lim a_n = a$. *Potom* $\lim |a_n| = |a|$

Užitočné vlastnosti pre výpočet limít

- *Nech* $\lim a_n = 0,$ *a* (b_n) *je ohraničená postupnosť.*
  Potom $\lim a_n \cdot b_n = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty \quad \wedge \quad a_n \neq 0 \;\; \forall n \in N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \;\; \wedge$ *takmer všetky* a_n *sú kladné (záporné)*
  $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \;\; (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty).$

Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)



Autor obrázku: Zuzka Hliněná

Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)

Veta.(*O dvoch policajtoch*) Nech $\lim a_n = \lim c_n = a$, a nech existuje $n_1 \in N$ tak, že pro $n > n_1$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom existuje limita (b_n) a $\lim b_n = a$.