Riešenie nelineárnej rovnice

1. Chceme vyriešiť rovnicu $f(x) = 0$, ak $f(x)$ nie je lineárna funkcia.
2. Bude nám stačiť približné riešenie.
3. Ako na to?
4. Najskôr musíme odhadnúť polohu koreňa.
5. Vyberieme vhodnú metódu.
6. Aplikujeme vybranú metódu.

Riešenie nelineárnej rovnice

Budeme rešiť rovnicu

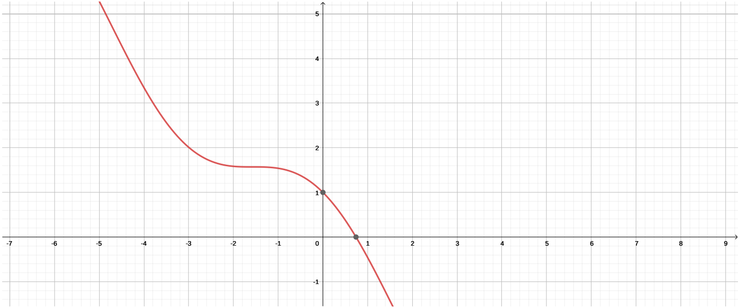
$$\cos x - x = 0.$$

Odhad polohy koreňa I.

1. Nakreslíme si graf funkcie $f(x) = \cos x - x$.

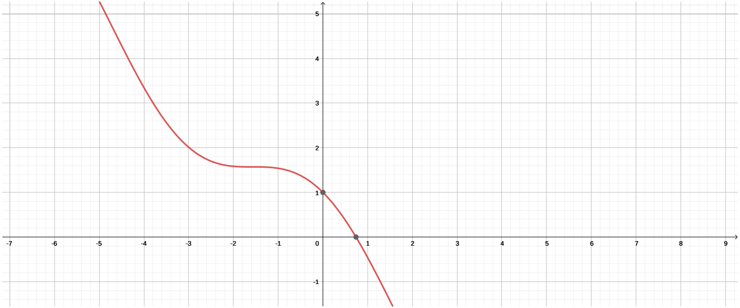
Odhad polohy koreňa I.

1. Nakreslíme si graf funkcie $f(x) = \cos x - x$.



Odhad polohy koreňa I.

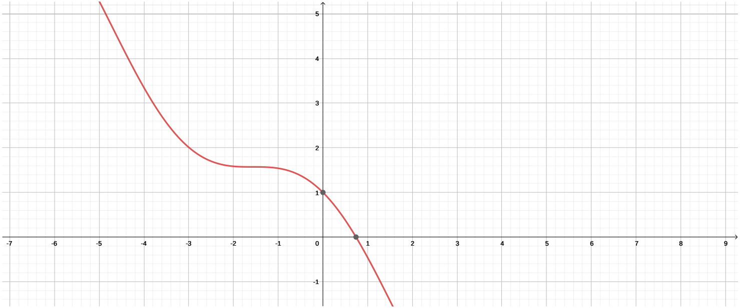
1. Nakreslíme si graf funkcie $f(x) = \cos x - x$.



2. Ako nájdeme polohu koreňa?

Odhad polohy koreňa I.

1. Nakreslíme si graf funkcie $f(x) = \cos x - x$.



2. Ako nájdeme polohu koreňa?
3. Čo ak nevieme nakresliť graf f?

Odhad polohy koreňa II.

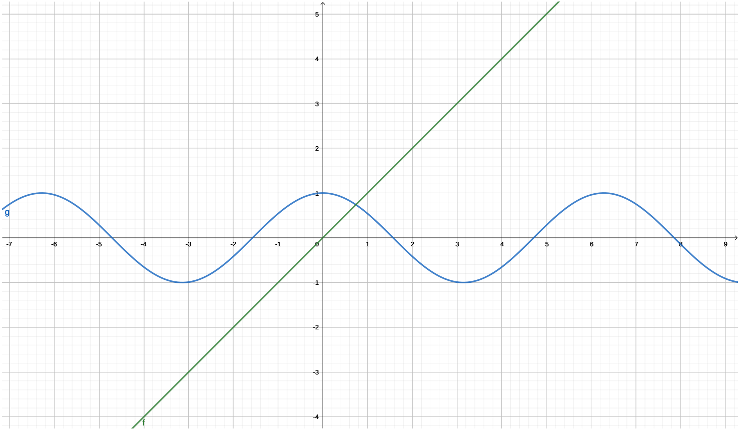
1. Nakreslíme si grafy funkcií $y = \cos x$ a $y = x$.

$$\cos x - x = 0 \iff \cos x = x.$$

Odhad polohy koreňa II.

1. Nakreslíme si grafy funkcií $y = \cos x$ a $y = x$.

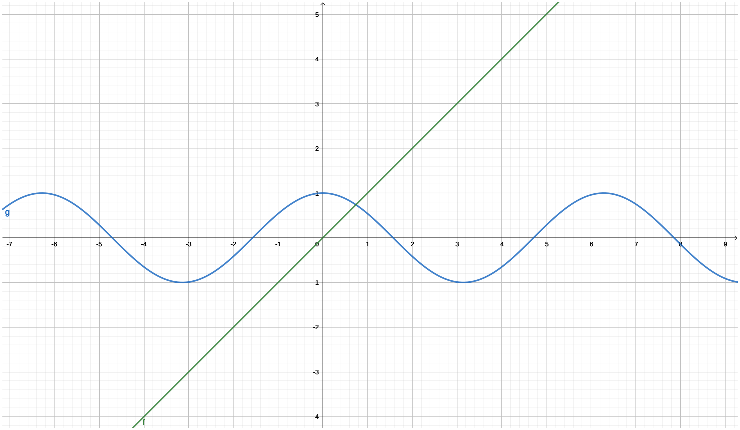
$$\cos x - x = 0 \iff \cos x = x.$$



Odhad polohy koreňa II.

1. Nakreslíme si grafy funkcií $y = \cos x$ a $y = x$.

$$\cos x - x = 0 \iff \cos x = x.$$



2. Ako nájdeme polohu koreňa?

Metóda bisekcie

(Pomocné tvrdenie)

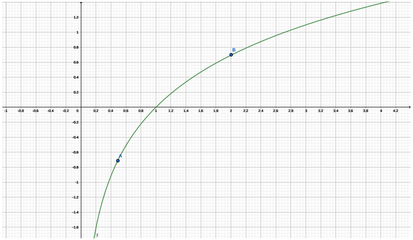
Ak je funkcia f na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitá a platí

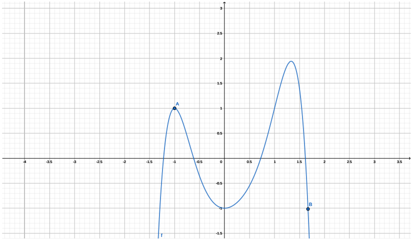
$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

tak na intervale $\langle a, b\rangle$ leží aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.

Čo toto tvrdenie znamená?
Ako toto tvrdenie môžeme využiť?

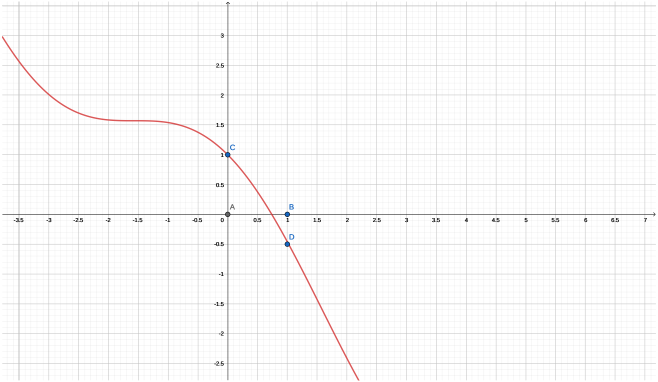
Metóda bisekcie





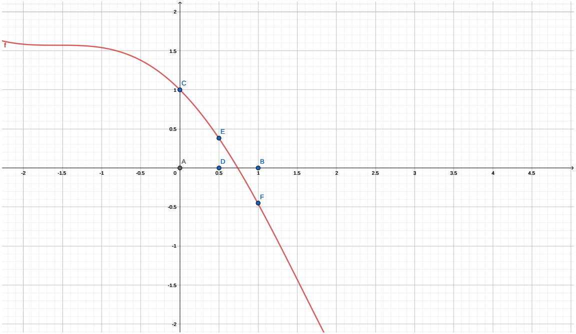
Metóda bisekcie

1. Začneme na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$.



2. Označíme $a_1 = 0, b_1 = 1$.
3. Prvý odhad koreňa je $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. *Čo je x_1?*

Metóda bisekcie



1. Skrátime interval tak, aby $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.
2. V našom prípade je $f(x_1) > 0$ a $f(b_1) < 0$, preto

$$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \text{ a } x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Metóda bisekcie

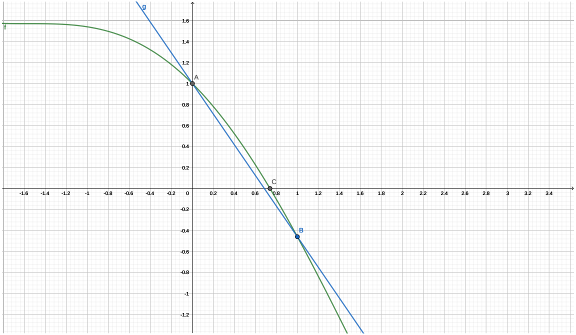
k	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
1	0,0	1,0	0,5	+	-	+
2	0,5	1,0	0,75	+	-	-
3	0,5	0,75	0,625	+	-	+
4	0,625	0,75	0,6875	+	-	+
5	0,6875	0,75	0,71875	+	-	+
6	0,71875	0,75	0,734375	+	-	+

Metóda bisekcie-zhrnutie

1. Máme rovnicu $\cos x - x = 0$.
2. Odhadneme polohu koreňa-z predchádzajúcich obrázkov vieme, že koreň bude ležať na intervale $\langle 0, 1\rangle$.
3. Postupne skracujeme interval (podľa pomocného tvrdenia).
4. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo bude dĺžka posledného ($n-$tého) intervalu kratšia ako $2 \cdot \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba.

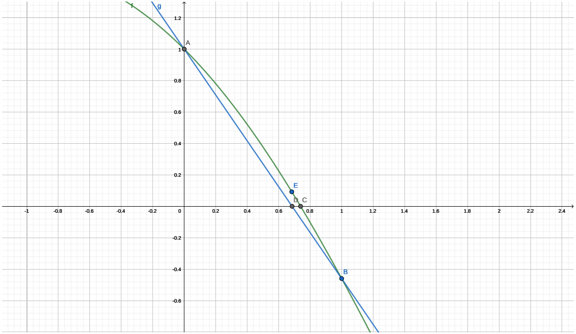
Metóda regula falsi

1. Začneme na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$.



2. Označíme $a_1 = a, b_1 = b$.
3. Prvý odhad koreňa je $x_1 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(b_1)$. *Čo je x_1?*

Metóda regula falsi



1. Skrátime interval tak, aby $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.
2. V našom prípade je $f(x_1) > 0$ a $f(b_1) < 0$, preto

$$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \text{ a } x_2 = b_1 - \frac{b_1 - x_1}{f(b_1) - f(x_1)} \cdot f(b_1).$$

Metóda regula falsi

k	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
1	0,0	1,0	0,6850734	$+$	-	$+$
2	0,6850734	1,0	0,736299	$+$	-	$+$
3	0,736299	1,0	0,7389454	$+$	-	$+$

$$f(x_3) \approx 0.00023385$$

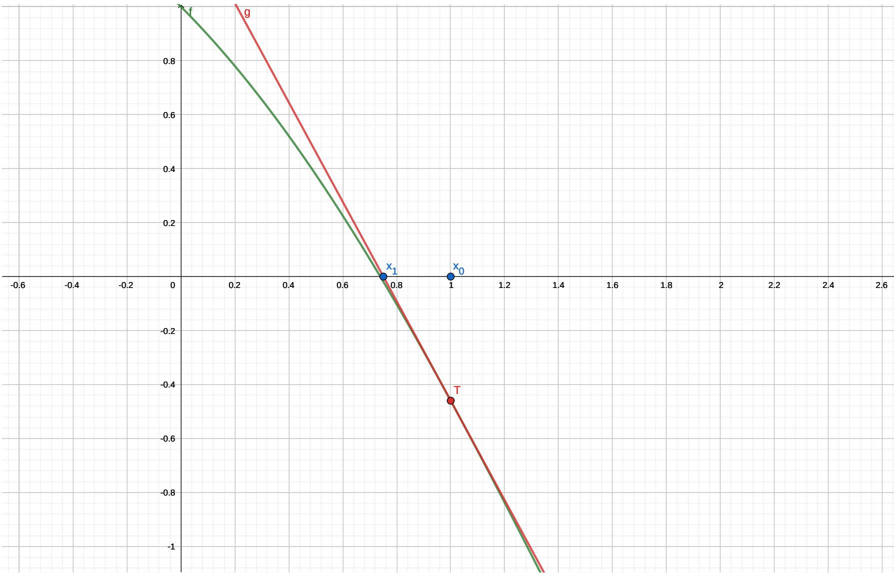
Metóda regula falsi-zhrnutie

1. Máme rovnicu $\cos x - x = 0$.
2. Odhadneme polohu koreňa-z predchádzajúcich obrázkov vieme, že koreň bude ležať na intervale $\langle 0, 1\rangle$.
3. Postupne skracujeme interval (podľa pomocného tvrdenia).
4. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako ε.*

Metóda bisekcie a regula falsi, porovnanie

1. Obidve metódy fungujú na princípe skracovania intervalu. Takých metód je viac, napr. metóda sečníc.
2. Ak máme zaručené, že na intervale $\langle a, b\rangle$ je **práve jedno riešenie**, tak obe metódy sú spoľahlivé-teda skonvergujú k hľadanému riešeniu.
3. Regula falsi býva rýchlejšia ako metóda bisekcie, ale nie vždy.

Newtonova metóda - dotyčnicová metóda



Newtonova metóda

Nech je daná nelineárna rovnica $f(x) = 0$ *a nech na intervale* $\langle a, b\rangle$ *leží práve jedno riešenie tejto rovnice. Nech sú splnené tieto podmienky:*

- *funkcia* $f(x)$ *má na intervale* $\langle a, b\rangle$ *spojitú prvú aj druhú deriváciu,*
- *na intervale* $\langle a, b\rangle$ *je* $f'(x) \neq 0$ *a* $f'(x), f''(x)$ *nemenia znamienko.*

Potom volíme počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *tak, aby*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

a Newtonova metóda bude konvergovať.

Čo sa môže stať, ak podmienky konvergencie odignorujeme?

Newtonova metóda

1. Začneme v $x_0 = 1$. (Podmienky konvergencie budú na prednáške overené.)
2. Ďalšie aproximácie budeme počítať podľa vzťahu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. V našej úlohe postupne dostávame:

$$x_0 = 1.0000000, \ f(x_0) \approx -0.4596977$$

$$x_1 \approx 0.7503639, \ f(x_1) \approx -0.01892313$$

$$x_2 \approx 0.7391129, \ f(x_2) \approx -0.00004557$$

$$x_3 \approx 0.7390857, \ f(x_3) \approx -0.00000095$$

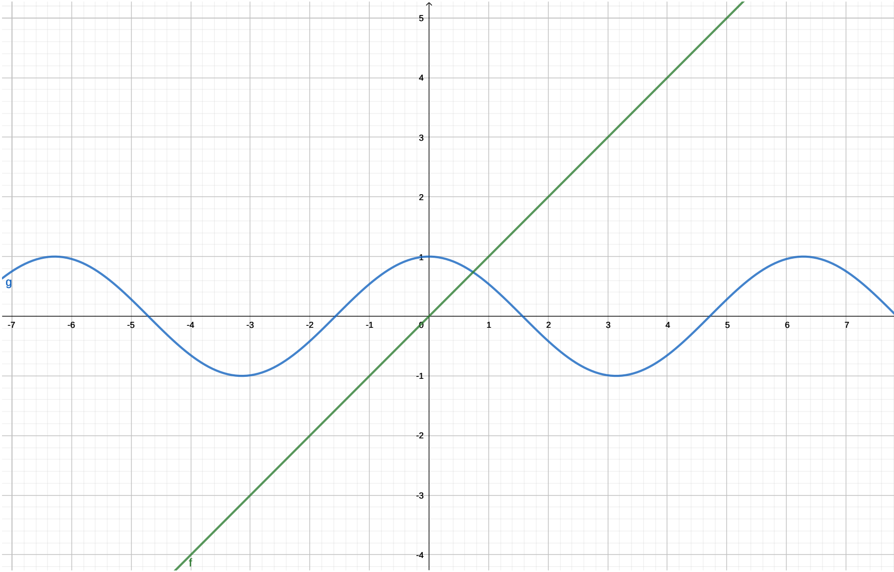
4. Výpočet ukončíme, keď:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

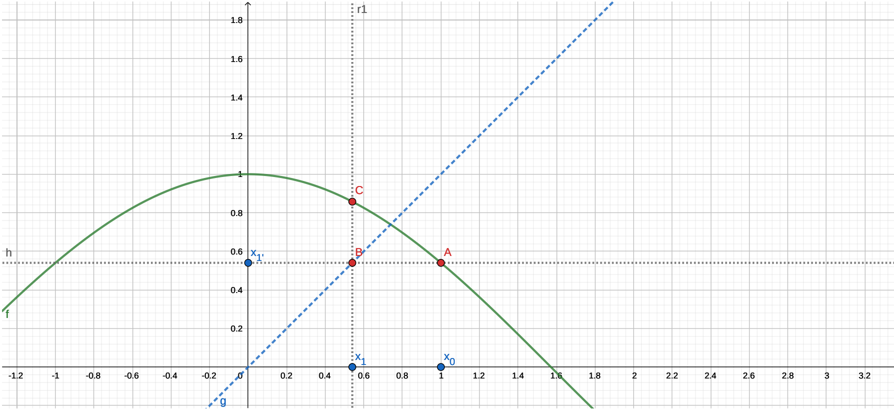
Newtonova metóda-zhrnutie

1. Máme rovnicu $f(x) = 0$.
2. Odhadneme polohu koreňa.
3. Overíme podmienky konvergencie meódy.
4. Aplikujeme metódu.
5. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako* ε.
6. Newtonova metóda je najefektívnejšia, ale nemusí vždy konvergovať.

Metóda prostej iterácie



Metóda prostej iterácie



Metóda prostej iterácie

Nech je daná nelineárna rovnica $f(x) = 0$ *a nech na intervale* $\langle a, b \rangle$ *leží práve jedno riešenie tejto rovnice. Rovnicu* $f(x) = 0$ *prepíšeme na tvar* $g(x) = x$. *Ak sú splnené tieto podmienky:*

- *Funkcia* $g(x)$ *je diferencovateľná na intervale* $\langle a, b \rangle$ *a* $g(\langle a, b \rangle) \subseteq \langle a, b \rangle$.
- *Ak existuje* $\alpha \in \langle 0, 1)$ *tak, že*

$$|g'(x)| \leq \alpha, \ \forall x \in \langle a, b \rangle .$$

Potom existuje pevný bod funkcie g *na intervale* $\langle a, b \rangle$ *a počiatočnú aproximáciu môžeme voliť ľubovoľne z intervalu* $\langle a, b \rangle$, *pričom* $x_k = g(x_{k-1})$.

Čo sa môže stať, ak podmienky konvergencie odignorujeme?

Metóda prostej iterácie

1. Začneme v $x_0 = 1$. (Podmienky konvergencie budú na prednáške overené.)
2. Ďalšie aproximácie budeme počítať podľa vzťahu:

$$x_k = g(x_{k-1}).$$

3. V našej úlohe postupne dostávame:

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	1	6	0.76395969	12	0.74142509
1	0.54030231	7	0.72210242	13	0.73750689
2	0.85755321	8	0.75041777	14	0.0.74014734
3	0.65428979	9	0.73140404	15	0.7383692
4	0.79348036	10	0.74423736	16	0.7395672
5	0.70136877	11	0.73560474	17	0.73876032

4. Výpočet ukončíme, keď:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Metóda prostej iterácie-zhrnutie

1. Máme rovnicu $f(x) = 0$.
2. Rovnicu upravíme do tvaru $g(x) = x$.
3. Odhadneme polohu koreňa.
4. Overíme podmienky konvergencie meódy.
5. Aplikujeme metódu.
6. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako* ε.