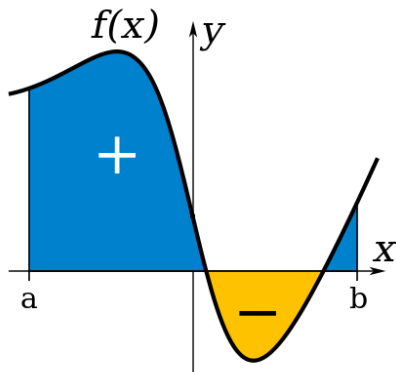
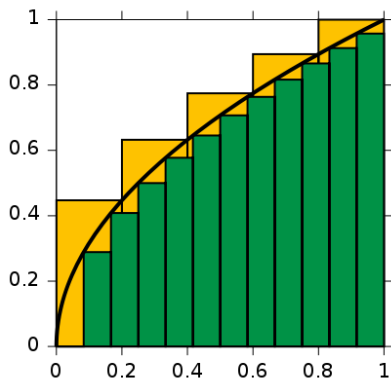


Integrální počet, pokračování

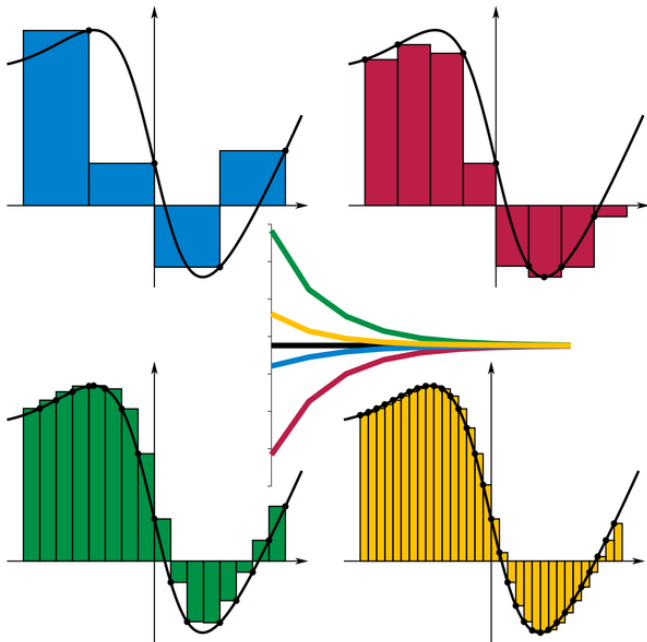
January 18, 2024

Určitý integrál





- dělení, dělicí body, norma
- integrální součet
- integrovatelná funkce



- Má-li ohraničená funkce f na uzavřetém intervalu $\langle a, b \rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, pak existuje určitý integrál

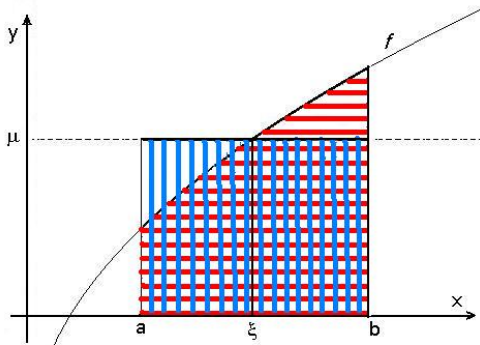
$$\int_a^b f(x)dx.$$

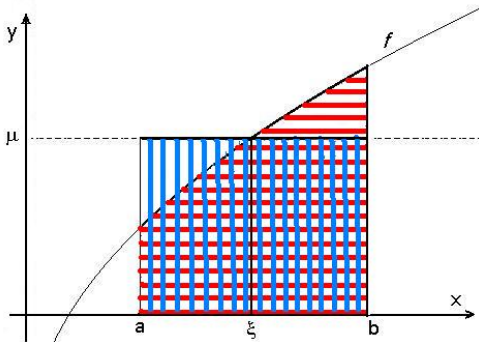
● vlastnosti

- $\int_a^b 0 dx = 0,$
- $\int_a^b dx = b - a,$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$ pro $c \in \langle a, b \rangle,$
- $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b \rangle \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx; \quad \forall k \in R,$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$
- $\int_{-a}^a S(x) dx = 2 \int_0^a S(x) dx; \quad \int_{-a}^a L(x) dx = 0.$

- Necht je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



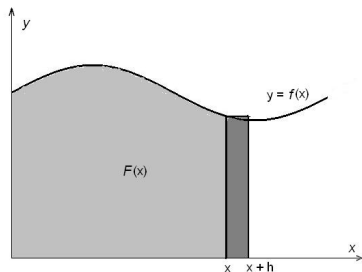


$$\exists \mu \in \langle m, M \rangle; \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ak f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, tak $\exists \psi \in \langle a, b \rangle$;

$$f(\psi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Fundamentální věta



$$F(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

$$F(x+h) - F(x) \doteq f(x) \cdot h \iff f(x) \doteq \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x).$$

- **Funkce horní meze** $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Funkce Φ určuje obsah mezi osou x a funkcí f na intervalu $\langle a, x \rangle$.

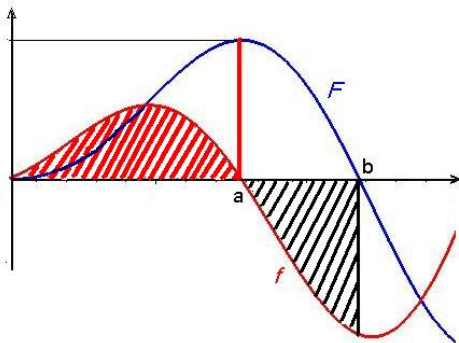
- **Funkce dolní meze** $\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt$.

Funkce Ψ určuje obsah mezi osou x a funkcí f na intervalu $\langle x, a \rangle$.

Je-li $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí bodu x spojitá, má funkce horní meze v bodě x derivaci a platí $\Phi'(x) = f(x)$.

Příklad:

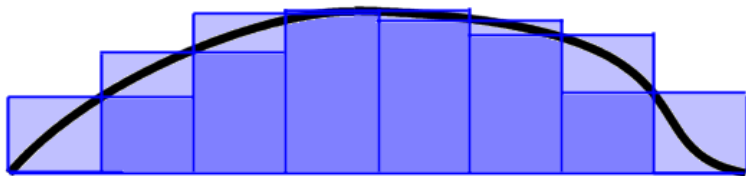
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$



Nechť je f spojitá na $\langle a, b \rangle$. Jestliže na $\langle a, b \rangle$ platí $F'(x) = f(x)$,
potom

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Různé přístupy k měření obsahu



- Per partes

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

- Substitute

- *Jestliže $f \circ g, g'$ jsou spojité na $\langle a, b \rangle$*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- *Jestliže f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $x = g(t)$ je monotónní funkce se spojitou derivací a oborem hodnot $\langle a, b \rangle$*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

- **Obsah rovinné oblasti**

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

- **Objem rotačního tělesa**

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- **Délka rovinné křivky**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- **Délka křivky dané parametricky** ($x = f(t), y = \varphi(t)$)

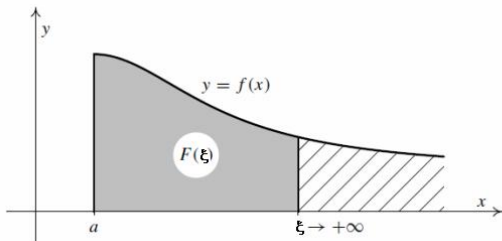
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Nevlastní integrál na neohrazeném intervalu

Bud' f funkce definovaná na intervalu $\langle a, \infty \rangle$. Nechť je f integrovatelná v intervalu $\langle a, t \rangle$ pro každé $t > a$. Nechť existuje vlastní limita

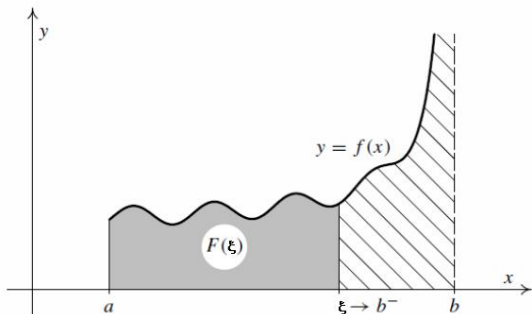
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem** a říkáme, že integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$ **konverguje**.



Integrál z neohraničené funkce

Bud' f funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a v okolí bodu b je neohraničená. Necht' pro každé $t \in (a, b)$ existuje $\int_a^t f(x)dx$ a necht' existuje limita $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$. Pak tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem** v intervalu $\langle a, b \rangle$ a v případě, že limita je vlastní, říkáme, že integrál **konverguje**.



Obcná definice nevlastního integrálu

