Nevlastný integrál

1. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx$

Riešenie. Najskôr upravíme menovateľ na súčin a potom integrant upravíme na parciálne zlomky:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2} dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} dx.$$

Skontrolujeme, že funkcia je na intervale $\langle 0, \infty)$ ohraničená, neohraničenosť hrozí jedine v bode -1 a ten do tohto intervalu nepatrí, teda pokračujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{3}\int\limits_0^t \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan x\sqrt{2}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan t\sqrt{2} - \frac{1}{3}\ln|0+1| + \frac{1}{6}\ln(0^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan 0\sqrt{2}\right].$$

Zrejme $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{3}\ln|t+1| = \infty$ aj $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{6}\ln(t^2+2) = \infty$, teda tam máme limitu typu "$\infty - \infty$" a s týmto sa vysporiadame tak, že použijeme vzťah pre rozdiel logaritmov a to nasledovne (zároveň zvládneme aj ďalšie jednoduché úpravy):

$$\lim_{t\to\infty} \ln\sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan t\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{6}\ln 2 - 0.$$

Limitu $\lim\limits_{t\to\infty} \ln\sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}}$ počítame ako limitu zloženej funkcie, teda najskôr zistíme, že $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{(t+1)^2}{t^2+2} = 1$, potom aj $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} = 1$ a teda $\lim\limits_{t\to\infty} \ln\sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} = 0$. Potom

$$I = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{6}\ln 2 - 0 = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\ln 2.$$

To, že limita typu "$\infty - \infty$" nemusí vyjsť vždy 0 a teda úprava na "spoločný logaritmus"je potrebná, budeme vidieť v nasledujúcich dvoch úlohách.

2. $\int\limits_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+3}\right] dx$
Riešenie. Skontrolujeme, že funkcia je na intervale $\langle 0, \infty)$ ohraničená, neohraničenosť hrozí jedine v bodoch -2 a $-\frac{3}{2}$ a tie do tohto intervalu nepatria, teda pokračujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+3}\right] dx = \lim_{t\to\infty} [\ln|x+2| - \ln|2x+3|]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln(t+2) - \ln(2t+3) - \ln 2 + \ln 3) = \lim_{t\to\infty} \left(\ln \frac{t+2}{2t+3} - \ln 2 + \ln 3\right) =$$

$= \ln \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 3 = \ln \frac{3}{4}$.

3. $\int\limits_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2x}{2x^2+3}\right] dx$.
Riešenie. Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich dvoch úlohách

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2x}{2x^2+3}\right] dx = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|2x^2+3|\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln(t+2) - \frac{1}{2}\ln(2t^2+3) - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\ln \frac{t+2}{\sqrt{2t+3}} - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} 3\right) =$$

$= \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 2 + \ln \sqrt{3} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}}$.

4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3-1}{x^4} dx$.
Riešenie. Na intervale $\langle 1, \infty\rangle$ nie je integrant nespojitý (ani neohraničený), teda nemusíme interval rozdeliť, postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t \frac{x^3-1}{x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\right) dx = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x| - \frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^t =$$

$$\lim_{t\to\infty} \left[\ln t - \frac{t^{-3}}{-3} - \ln 1 + \frac{1}{-3}\right] = \lim_{t\to\infty} \left(\ln t + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{3}\right) = \infty.$$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

Riešenie. Znovu je situácia na intervale $\langle 0,\infty\rangle$ taká, že integrant nie je nespojitý (ani neohraničený), teda postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{1}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}}dx =$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$e^x = z, x=0 \Rightarrow z=1, x=t \Rightarrow z=e^t$$

$$e^x dx = dz.$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^{e^t} \frac{dz}{z^2+1} = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan z\right]_1^{e^t} = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan e^t - \arctan 1\ \right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

6. $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\sqrt{\ln x}}dx.$

Riešenie. Aj v tomto prípade je na intervale $\langle e,\infty\rangle$ integrant spojitý (teda ohraničený), preto postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_e^t \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\sqrt{\ln x}}dx$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$\ln x = z^2, x=e \Rightarrow z=1, x=t \Rightarrow z=\sqrt{\ln t}$$

$$\frac{1}{x}dx = 2zdz.$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{\ln t}} \frac{2zdz}{z^2\cdot z} = 2\cdot\lim_{t\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{\ln t}} \frac{dz}{z^2} = 2\cdot\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{z}\right]_1^{\sqrt{\ln t}} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{\ln t}}-\frac{-2}{1}\ \right] = 2.$$

7. $\int\limits_1^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}dx$.

Riešenie. Integrant je nespojitý v bode 2, teda postupujeme podľa definície nevlastného integrálu pre neohraničenú funkciu:

$$\lim_{t\to 2^-}\int\limits_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}dx + \lim_{t\to 2^+}\int\limits_t^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}dx.$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$x-2=z^3, x=1 \Rightarrow z=-1, x=5 \Rightarrow z=\sqrt[3]{3}, x=t \Rightarrow z=\sqrt[3]{t-2}$$

$$dx = 3z^2dz.$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} \frac{3z^2}{z}dz + \lim_{t\to 2^+}\int\limits_{\sqrt[3]{t-2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{3z^2}{z}dz = \lim_{t\to 2^-}\int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} 3zdz + \lim_{t\to 2^+}\int\limits_{\sqrt[3]{t-2}}^{\sqrt[3]{3}} 3zdz =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{3z^2}{2}\right]_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} + \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{3z^2}{2}\right]_{\sqrt[3]{t-2}}^{\sqrt[3]{3}} = \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{3\left(\sqrt[3]{t-2}\right)^2}{2} - \frac{3}{2}\right] + \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{9} - \frac{3\left(\sqrt[3]{t-2}\right)^2}{2}\right] =$$

$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}$.

Schválne skúste neohraničenosť integrantu odignorovať a integrál počítať bez rozdelenia intervalu. Výsledky porovnajte a zamyslite sa nad nimi.

8. Určte konštantu a tak, aby $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, ak $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & x \in \langle 1, e\rangle \\ 0 & \text{inak.}\end{cases}$

Riešenie. Zrejme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^e \frac{a}{x}dx + \int\limits_e^{\infty} 0dx = \int\limits_1^e \frac{a}{x}dx = a\cdot\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx =$$

$$= a\cdot[\ln|x|]_1^e = a\cdot(\ln e - \ln 1) = a \Rightarrow a = 1.$$

9. Určte konštantu a tak, aby $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, ak $f(x) = \begin{cases} a\cdot\cos x & x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ 0 & \text{inak.}\end{cases}$

Riešenie. Zrejme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos x\, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos x\, dx = a\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$$

$$= a \cdot [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2}\right) = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

10. Určte konštantu a tak, aby $\int\limits_a^\infty f(x)dx = 1$, ak $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Riešenie. Zrejme

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_a^t = \lim_{t\to\infty}\left(-t^{-1} - (-a^{-1})\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$