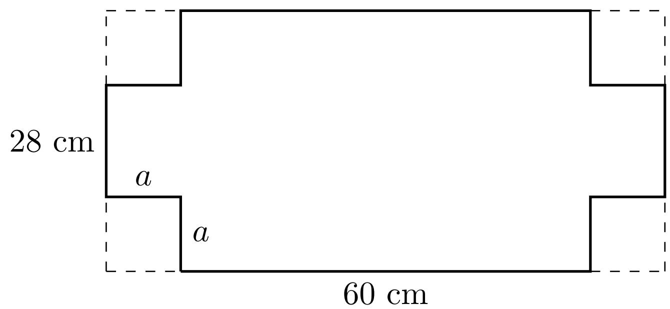
1 Karton

Karton tvaru obdélníka má rozměry 60 cm×28 cm. V rozích nastřihneme čtverce a zbytek ohneme do otevřené krabice. Jak velká má být strana čtverce, aby objem krabice byl největší?



Řešení. Nechť a je velikost strany čtverce. Potom délka krabice je $d = 60 - 2a$, šířka krabice je $s = 28 - 2a$ a výška je $v = a$. Pro objem krabice známe vztah:

$$V = d \cdot s \cdot a.$$

Dosadíme za jednotlivé proměnné, sestavíme účelovou funkci a určíme interval pro neznámou a:

$$V(a) = (60 - 2a)(28 - 2a)a = 4 \cdot (a^3 - 44a^2 + 420a), 0 < a < 14.$$

Pracujeme tedy na otevřeném intervalu, ale díky spojitosti funkce V na $\mathbb{R}$ to nezpůsobí problémy. Toto si dobře rozmyslete.
Hledáme bod, ve kterém má funkce V maximum. Proto určíme V' :

$$V'(a) = 4 \cdot (3a^2 - 88a + 420).$$

Funkci V jsme mohli nechat v původním stavu a derivovat jako součin:

$$V'(a) = (-2)(28 - 2a)a + (-2)(60 - 2a)a + (60 - 2a)(28 - 2a) =$$

$$= 4a^2 - 56a + 4a^2 - 120a + 4a^2 + 1680 - 120a - 56a = 4 \cdot (3a^2 - 88a + 420).$$

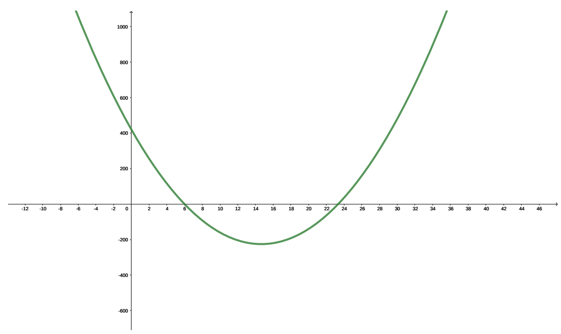
Evidentně $V'(a)$ existuje pro $\forall a \in \mathbb{R}$. Proto hledáme $a \in (0, 14)$ tak, aby $V'(a) = 0$. Kořeny kvadratické rovnice můžeme určit pomocí diskriminantu.

$$V'(a) = 4 \cdot (3a^2 - 88a + 420) = 4 \cdot (a - 6)(3a - 70).$$

Proto

$$V'(a) = 0 \iff a = \frac{70}{3} \lor a = 6.$$

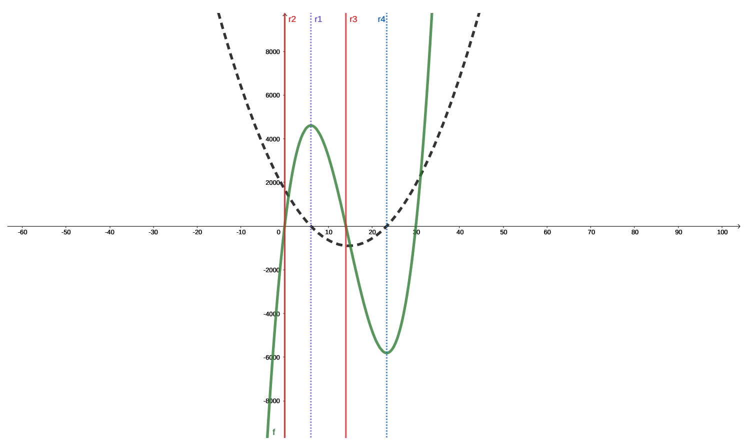
Z následujícího obrázku vidíme, že $V'(a) > 0 \iff a \in (-\infty, 6) \cup \left(\frac{70}{3}, \infty\right)$ a $V'(a) < 0 \iff a \in \left(6, \frac{70}{3}\right)$.



Proto je lokální maximum v bodě 6 a jeho hodnota je

$$V = 4 \cdot (6^3 - 44.6^2 + 420.6) = 4608.$$

Pro ověření, že se jedná o absolutní maximum na intervalu $(0, 14)$ je nutné porovnat $V(6)$ s hodnotami $V(0)$ a $V(14)$. Dosazením zjistíme, že $V(0) = V(14) = 0$ (je to překvapení?), tedy v bodě $a = 6$ je absolutní maximum. Situaci popisuje následující obrázek, funkce V je zelená, její derivace černá.



2 Drát

Kus drátu délky a máme rozdělit na dvě části, ze kterých se první ohne do tvaru čtverce a druhá do tvaru kruhu. Kde máme udělat řez, aby součet obsahu čtverce a obsahu kruhu byl nejmenší?

Řešení. Označme si délku první části drátu x, druhá část má délku $a - x$. Z části délky x vyrobíme čtverec (délku jeho strany označíme b) a ze zbytku kruh (poloměr označme r). Potom x je obvod čtverce a $a - x$ obvod kruhu, proto:

$$x = 4b \wedge a - x = 2\pi r \Rightarrow b = \frac{x}{4} \wedge r = \frac{a - x}{2\pi}.$$

Pro obsahy čtverce a kruhu dostaneme:

$$s_1 = \frac{x^2}{16} \wedge s_2 = \frac{(a - x)^2}{4\pi}.$$

Účelová funkce je součet obou obsahů:

$$U(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(a - x)^2}{4\pi} \wedge x \in (0, a).$$

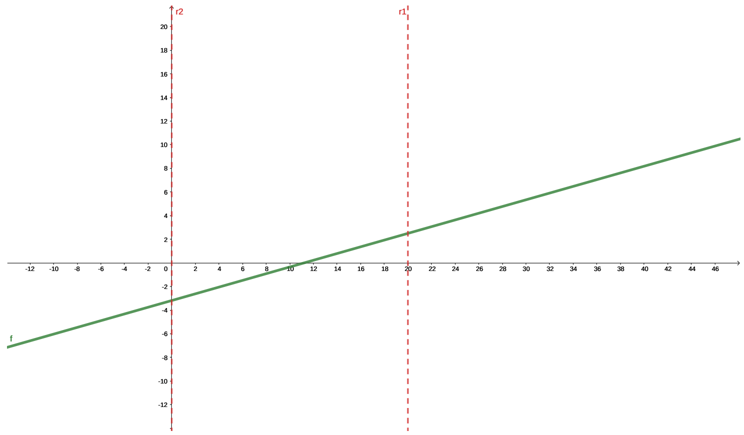
Hledáme minimum této funkce, proto určíme $U'(x)$:

$$U'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{2(a - x)(-1)}{4\pi} = \frac{2x\pi - 8(a - x)}{16\pi}.$$

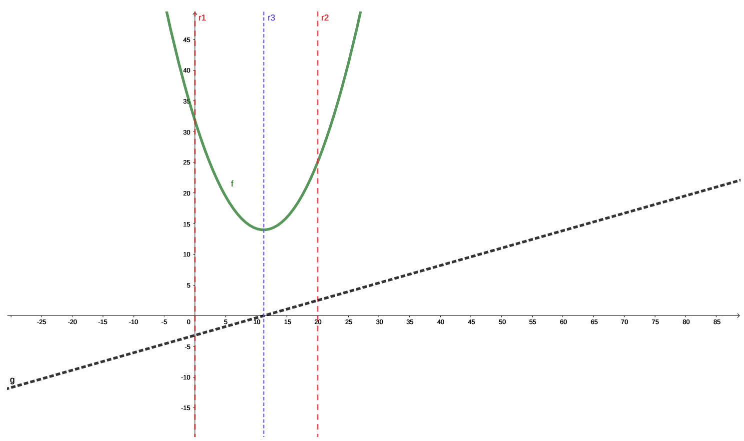
Minimum je v bodě, kde je $U'(x) = 0$ nebo kde $U'(x)$ neexistuje. Derivace naší funkce existuje pro každé reálné číslo, proto nás zajímá jenom případ $U'(x) = 0$.

$$U'(x) = 0 \iff 2x\pi - 8(a - x) = 0 \iff x = \frac{4a}{\pi + 4}.$$

Na obrázku máme $U'(x)$ pro $a = 20$. Vidíme (z obrázku, ale také z předpisu U'), že je to lineární a rostoucí funkce, která je na intervalu $\left(-\infty, \frac{4a}{\pi+4}\right)$ menší než nula (původní funkce tam klesá) a na intervalu $\left(\frac{4a}{\pi+4}, \infty\right)$ větší než nula (původní funkce tam roste). Proto v bodě $x = \frac{4a}{\pi+4}$ je lok. minimum.



Vzhledem k tomu, že U' je na množině $\mathbb{R}$ rostoucí, je U konvexní (toto si rozmyslete). Proto v bodě $x = \frac{4a}{\pi+4}$ je také absolutní minimum. Situace je znázorněna na obrázku, zelenou barvou je nakreslena funkce U a černou její derivace.



Zbývá ověřit, že $\frac{4a}{\pi+4} \in (0, a)$. (Proč je to důležité?) Je tedy nutné ověřit, že platí:

$$0 < \frac{4a}{\pi+4} \wedge \frac{4a}{\pi+4} < a.$$

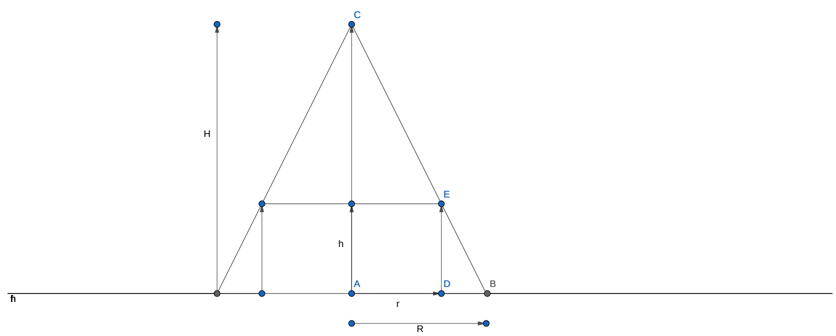
Vzhledem tomu, že a je délka drátu, je $a > 0$. Potom $4a > 0, \pi + 4 > 0$, proto $0 < \frac{4a}{\pi+4}$. Pro druhou nerovnost platí:

$$\frac{4a}{\pi+4} < a \iff 4a < a(\pi+4) \iff 0 < \pi.a.$$

Úpravy byly ekvivalentní, poslední tvrzení je pravdivé, proto také platí, že $\frac{4a}{\pi+4} < a$.

3 Kužel

Najděte rotační kužel s nejmenším objemem opsaný danému rotačnímu válci, když víme, že jejich základny leží ve stejné rovině a mají společnou osu.
Řešení. Označme si poloměr válce r, výšku válce h, poloměr kužele R a výšku kužele H, viz. obrázek.



Všimněme si, že trojúhelníky ABC a DBE jsou zřejmě podobné. Proto

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r}.$$

Pro výšku kužele dostáváme

$$H = \frac{h \cdot R}{R-r}.$$

Pro objem kužele platí

$$V_k = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H.$$

Účelová funkce je

$$V(R) = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot \frac{h \cdot R}{R-r} \wedge R > r.$$

Ve vztahu pro V_k jsme dosadili za H. Nerovnost $R > r$ plyne z toho, že kužel je válci opsaný. Účelovou funkci upravíme:

$$V(R) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{R^3}{R-r}.$$

Je důležité si uvědomit, že h, r jsou předem dané hodnoty, pracujeme s nimi jako s konstantami. Hledáme minimum funkce V, proto potřebujeme předpis pro V'.

$$V'(R) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{3R^2(R-r) - R^3}{(R-r)^2}.$$

Zřejmě V' je definována pro všechna $R \neq r$ a nás zajímají jenom $R > r$, proto při hledání minima budeme hledat R, pro která je $V'(R) = 0$.

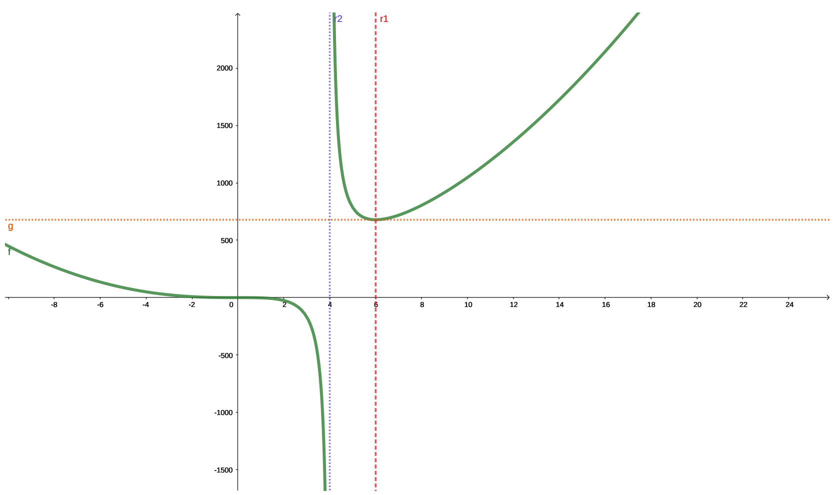
$$V'(R) = 0 \iff 3R^2(R-r) - R^3 = 0 \iff 3R^3 - 3R^2r - R^3 = 0 \iff$$

$$\iff 2R^3 - 3R^2r = 0 \iff 2R^3 = 3R^2r \iff 2R = 3r \iff R = \frac{3}{2}r.$$

Proč jsme mohli R^2 beztrestně zkrátit?
Pro výšku H dostáváme:

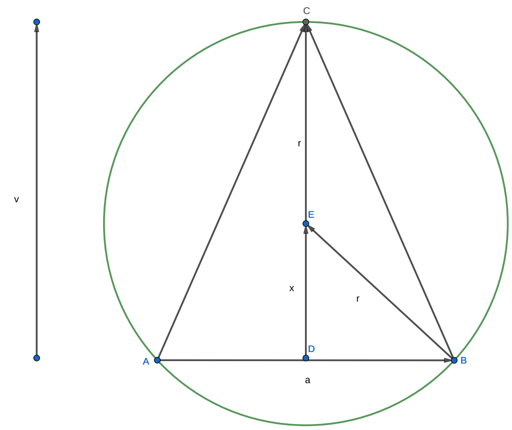
$$H = \frac{h \cdot R}{R-r} = \frac{h \cdot \frac{3}{2}r}{\frac{3}{2}r - r} = 3h.$$

Jedná se opravdu o minimum? Vraťme se k V'. Upozorňujeme, že V' také vyšetřujeme jenom na intervalu (r, ∞). Znaménko V' je stejné jako znaménko této části čitatele $3R^2(R-r) - R^3 = R^2(2R-3r)$. Zřejmě pro $R < \frac{3}{2}r$ je $V'(R) < 0$ a pro $R > \frac{3}{2}r$ je $V'(R) > 0$. Proto na intervalu $\left(r, \frac{3}{2}r\right)$ původní funkce klesá a na intervalu $\left(\frac{3}{2}r, \infty\right)$ roste a proto v $R = \frac{3}{2}r$ je minimum. Situace pro $r = 4, h = 6$ je znázorněna na obrázku.



4 Trojúhelník

Do kružnice s poloměrem r vepište rovnoramenný trojúhelník největšího obsahu.
Řešení. Označme a základnu rovnoramenného trojúhelníka ABC vepsaného kružnici a v výšku v tomto trojúhelníku, viz obrázek. Poznamenejme, že výška na základnu tuto základnu půlí na dvě stejné úsečky AD a DB.



Pro výšku v platí

$$v = x + r,$$

kde r je poloměr kružnice a x velikost úsečky DE (obr.). Pro obsah trojúhelníka ABC platí:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v.$$

Z obrázku je zřejmé, že trojúhelník DBE je pravoúhlý, proto

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2.$$

Po úpravě:

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Nyní můžeme sestavit účelovou funkci a určit interval pro délku strany trojúhelníka:

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (x + r), a \in (0, 2r\rangle\,.$$

Proč nemůže být $a > 2r$? Jaký bude trojúhelník pro $a = 2r$? Jak by situace vypadala, kdyby trojúhelník byl tupoúhlý, tj. $v < r$? Mohl by mít maximální obsah?
Po dosazení za x dostáváme

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + r\right).$$

Předpis funkce S upravíme:

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}},$$

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Zajímá nás minimum této funkce, proto potřebujeme určit její první derivaci:

$$S'(a) = \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{4} + \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4r^2 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2a).$$

Po úpravách dostaneme:

$$S'(a) = \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{4} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}},$$

$$S'(a) = \frac{2r\sqrt{4r^2 - a^2} + 4r^2 - a^2 - a^2}{4\sqrt{4r^2 - a^2}},$$

$$S'(a) = \frac{2r\sqrt{4r^2 - a^2} + 4r^2 - 2a^2}{4\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Zřejmě S' existuje pro všechna $a \in (0, 2r)$, proto nás při hledání extrémů zajímají jenom ty hodnoty a, pro které je $S'(a) = 0$.

$$S'(a) = 0 \iff 2r\sqrt{4r^2 - a^2} = 2a^2 - 4r^2.$$

Rovnici upravíme:

$$r\sqrt{4r^2 - a^2} = a^2 - 2r^2,$$

$$r^2(4r^2 - a^2) = a^4 - 4a^2r^2 + 4r^4.$$

Byla poslední úprava ekvivalentní?
Vzhledem k tomu, že $a > 0, r > 0$ je:

$$a^4 = 3a^2r^2,$$

$$a = \sqrt{3}r.$$

Vzhledem k tomu, že $\sqrt{3} < 2$ je $a = \sqrt{3}r \in (0, 2r\rangle$. Dále pro x platí

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}r^2} = \sqrt{\frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}r$$

a pro výšku trojúhelníku dostáváme

$$v = x + r = \frac{1}{2}r + r = \frac{3}{2}r.$$

Nabývá v bodě $a = \sqrt{3}r$ opravdu funkce S maximum na daném intervalu $(0, 2r\rangle$? Na tomto intervalu je jmenovatel první derivace kladný. Proto znaménko ovlivní jenom čitatel. Zjistíme, pro která $a \in (0, 2r\rangle$ je výraz v čitateli větší než nula. Dostaneme nerovnici

$$2r\sqrt{4r^2 - a^2} + 4r^2 - 2a^2 > 0.$$

Upravíme

$$2r\sqrt{4r^2 - a^2} > -4r^2 + 2a^2.$$

Jak řešit tuhle nerovnici? Levá strana je nezáporná pro všechna $a \in (0, 2r\rangle$. Jak je to s pravou stranou? A co to pro nás znamená? Co bude znamenat, když bude pravá strana menší než nula? Dostaneme pravdivý výrok, protože nezáporné číslo je vždy větší než záporné. A jak postupovat v případě, že pravá strana je nezáporná? V tom případě můžeme umocnit obě strany nerovnice, to bude ekvivaletní úprava. Bystré hlavy už vědí, že na tohle jsme se již ptali. Z těchto úvah je zřejmé, že musíme zjistit, jak je to se znaménkem pravé strany. Tedy, kdy platí

$$-4r^2 + 2a^2 \geq 0.$$

Po úpravě

$$a^2 \geq 2r^2,$$

a to je pro naše a ekvivalentní s

$$a \geq \sqrt{2}r.$$

Proto je pro $a \in \left(0, \sqrt{2}r\right)$ pravá strana záporná a tedy platí, že $2r\sqrt{4r^2 - a^2} > -4r^2 + 2a^2$ a následně $S'(a) > 0$, proto původní funkce je na tomto intervalu rostoucí. Pro $a \in \left\langle \sqrt{2}r, 2r \right\rangle$ můžeme naši nerovnici umocnit a dostaneme

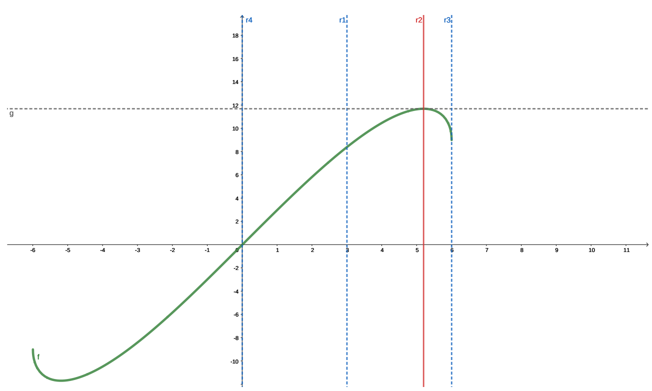
$$r^2(4r^2 - a^2) > a^4 - 4a^2r^2 + 4r^4.$$

Po úpravě

$$3a^2r^2 > a^4 \iff 3r^2 > a^2 \iff a < \sqrt{3}r.$$

Co to znamená? To znamená, že $S' > 0$ i na intervalu $\left\langle \sqrt{2}r, \sqrt{3}r \right)$, a tedy původní funkce je rostoucí na intervalu $\left(0, \sqrt{3}r\right\rangle$ a klesající na intervalu $\left(\sqrt{3}r, 2r\right\rangle$. A to znamená, že v bodě $a = \sqrt{3}r$ je opravdu hledané maximum.

Situace pro $r = 3$ je znázorněna na obrázku. Připomínáme, že funkce S (zelená) nás zajímá jenom na intervalu $(0, 2r\rangle$, v našem případě je to interval $(0, 6\rangle$.



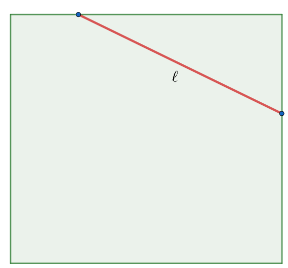
5 Koza

Převzato z `https://www.geocaching.com/geocache/GC3V274_kozi-keska?guid=3c0a067f-92a9-43d8-88b6-b76229d81b05`

Pokud je mezi čtenáři nějaký „kačer“ a nechce se připravit o požitek ze samostatného řešení, ať rychle zavře oči a příklad přeskočí.

Honza pásl u sedláka kozy. Když dopásl, šel si pro výslužku.

„Podívej, Honzo“, povídá sedlák, „Tady mám takový provaz. Napni ten provaz v rohu mé oplocené louky, aby tam vznikl trojúhelník.“



„Já si pak do rohu té louky přivážu kozu, nechám ji tam pást. A všechna tráva, co v tom trojúhelníku zbude, je tvoje.“

Honza ví, že roh louky je pravoúhlý, že koza kam dosáhne, všechno spase, a že sedlák přiváže kozu na co nejdelší provaz, ale jen tak dlouhý, aby se nedostala přes Honzův provaz do sedlákovy louky.

Pod jakým úhlem napne Honza svůj provaz, aby mu zbylo co nejvíc nespasené trávy?

Řešení:

Pomineme teď otázku, jestli by sedláka, řízeného zdravým selským rozumem, něco takového vůbec napadlo, a budeme se zabývat matematickou stránkou věci.

Obsah plochy, která Honzovi zbude, je

$$S = \frac{1}{2}\,ab - \frac{1}{4}\,\pi r^2.$$

Hledáme úhel α, pro který bude obsah maximální. Víme, že délka provazu ℓ je pevně daná, zatímco všechno ostatní závisí na úhlu, pod kterým Honza provaz natáhne.

Vyjádříme a, b pomocí α a ℓ:

$$\sin\alpha = \frac{a}{\ell}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\ell} \quad \Rightarrow \quad a = \ell\sin\alpha, \quad b = \ell\cos\alpha$$

Z obrázku dále vidíme, že úhel α se vyskytuje také v trojúhelníku CBD, a proto

$$\cos\alpha = \frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad r = a\cos\alpha = \ell\sin\alpha\cos\alpha.$$

Obsah vyjádřený pomocí úhlu je

$$S = \frac{1}{2}\ell^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{4}\,\pi\ell^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

Připomeňme, že $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Proto

$$S = \ell^2\left(\frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{16}\,\pi\sin^2 2\alpha\right) = \frac{\ell^2}{16}\left(4\sin 2\alpha - \pi\sin^2 2\alpha\right)$$

$$S' = \frac{\ell^2}{16}\,(4\cos 2\alpha\cdot 2 - 2\pi\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot 2) = \frac{\ell^2}{4}\cos 2\alpha\,(2 - \pi\sin 2\alpha)$$

Pro nalezení maxima řešíme rovnici

$$\frac{\ell^2}{4}\cos 2\alpha\,(2 - \pi\sin 2\alpha) = 0.$$

Zdůrazněme, že nás nyní zajímají pouze hodnoty $\alpha \in (0, \pi/2)$, protože se jedná o úhel v pravoúhlém trojúhelníku. Z rovnice vyplývá

$$\cos 2\alpha = 0 \quad \vee \quad 2 - \pi \sin 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad \sin 2\alpha = \frac{2}{\pi}$$

Ze druhé možnosti dostáváme dvě varianty:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi} \quad \vee \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}$$

Pro lepší představu hodnoty přibližně vyčíslíme:

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi} \doteq 0{,}345 \text{ (zhruba } 20^\circ\text{)}; \quad \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi} \doteq 1{,}226 \text{ (zhruba } 70^\circ\text{)}.$$

Zbývá zjistit, ve kterém z nalezených stacionárních bodů je maximum a ve kterém minimum. Můžeme použít znaménko první derivace:

α	$(0, \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi})$	$(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi})$	$(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2})$
$\cos 2\alpha$	+	+	-	-
$2 - \pi \sin 2\alpha$	+	-	-	+
S'	+	-	+	-
S	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Vidíme, že S nabývá v bodech $\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}$ a $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}$ lokálního maxima, zatímco v bodě $\alpha = \frac{\pi}{4}$ lokálního minima.

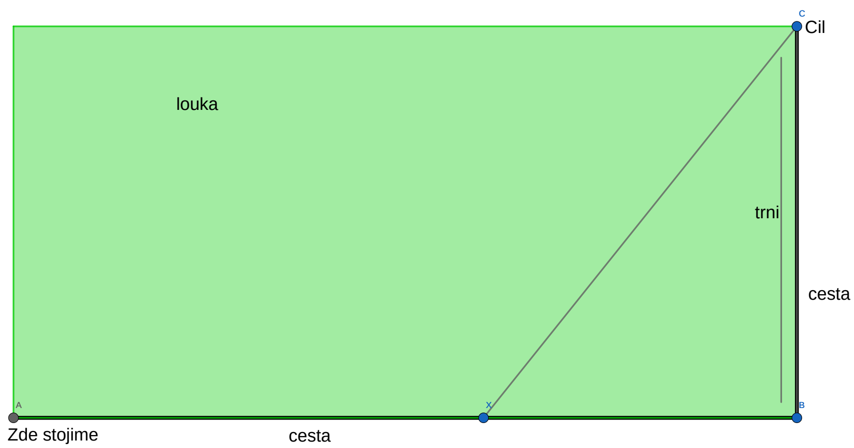
Honza tedy musí provaz napnout pod úhlem $\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}$ nebo $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pi}$, tj. přibližně 20° nebo 70°. Tyto dvě hodnoty odpovídají dvěma shodným trojúhelníkům (úhly α a β v obrázku by se vyměnily).

Otázka k zamyšlení: Kdyby Honza natáhl provaz pod úhlem $\pi/4$, byla by to pro něj nejhorší možnost? Nebo existuje nějaká ještě horší?

Pro ověření výpočtů si můžete prohlédnout `https://www.geogebra.org/m/atxyhzr2`

6 Cestou necestou

Katka s Martinem si vyšli na výlet. Jdou po cestě, až opodál zahlédnou strom. „Není to támhle třešeň?“ „No fakt. Pojď se tam podívat, teď by mohly být zralé.“ Martin a Katka zvažují, jak se k třešni dostat. Když zůstanou na cestě, po které jdou, mohou z ní po 400 metrech odbočit doleva na další cestu. Po ní pak po dalších 200 metrech dojdou ke stromu. „Ale mohli bychom to vzít i zkratkou přes louku,“ řekne Martin. „Tou to půjde pomalu, podívej, jak je ta tráva vysoká.“ „Ale bude to kratší.“ Oba před nedávnem úspěšně složili zkoušku z IMA1, tak se pokusí problém vyřešit vědecky. Odhadují, že po cestě by šli rychlostí 5 km/h, přes louku rychlostí 3 km/h. Z louky se na kolmou cestu už vrátit nemohou, kolem cesty jsou trnité keře. V jakém místě mají odbočit z cesty a dát se přes louku, aby ke stromu došli v nejkratším možném čase?

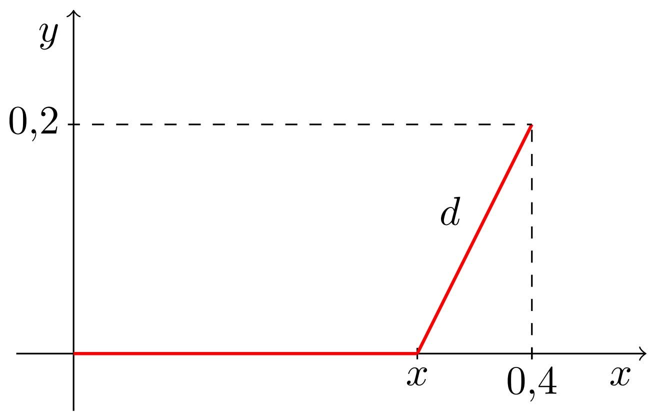


Řešení:

Martin s Katkou se radí a počítají (ale nemusíte jim hned všechno věřit, tenhle příklad není tak nevinný, jak se na první pohled zdá):

„Nejdřív musíme dát do pořádku jednotky. Rychlosti jsou v km/h, takže vzdálenosti převedeme na kilometry, to máme 0,4 a 0,2 km. Když po téhle cestě půjdeme ještě x km, po louce pak ujdeme vzdálenost d:“

$$d = \sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}2^2}.$$



„Čas t, který potřebujeme na ujití vzdálenosti x rychlostí 5 km/h a vzdálenosti d rychlostí 3 km/h, závisí na x a je“

$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{d}{3} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}04}}{3}, \quad x \in \langle 0;\, 0{,}4\rangle\,.$$

„Teď to zderivujeme:“

$$t'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2(0{,}4 - x)\cdot(-1)}{2\sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}04}} = \frac{1}{5} - \frac{0{,}4 - x}{3\sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}04}}$$

„a derivaci položíme rovnou nule:“

$$t'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} = \frac{0{,}4 - x}{3\sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}04}} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{(0{,}4 - x)^2 + 0{,}04} = 5(0{,}4 - x)$$

$$9((0{,}4 - x)^2 + 0{,}04) = 25(0{,}4 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}36 = 16(0{,}4 - x)^2$$

$$(0{,}4 - x)^2 = \frac{0{,}36}{16} \quad \Rightarrow \quad 0{,}4 - x = \frac{0{,}6}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}4 - \frac{0{,}6}{4} = 0{,}25$$

„Nezapomněli jsme u odmocňování $\pm$?“ lekne se Katka. „No jo, zapomněli, ale to nevadí, $(0{,}4 - x)$ nemůže být záporné, takže stejně bychom to minus vyloučili.“

„Teď bychom se měli přesvědčit, že je tam opravdu minimum.“ „Chce se ti tohle podruhé derivovat?“ „Ne. Ale to se prý nemusí, hledáme extrém na intervalu $\langle 0;\, 0{,}4\rangle$, takže jenom dosadíme do funkce stacionární bod a krajní body intervalu:“

$$t(0) = \frac{\sqrt{0{,}2}}{3} \doteq 0{,}1491; \quad t(0{,}25) = 0{,}1\overline{333}; \quad t(0{,}4) = 0{,}14\overline{66}$$

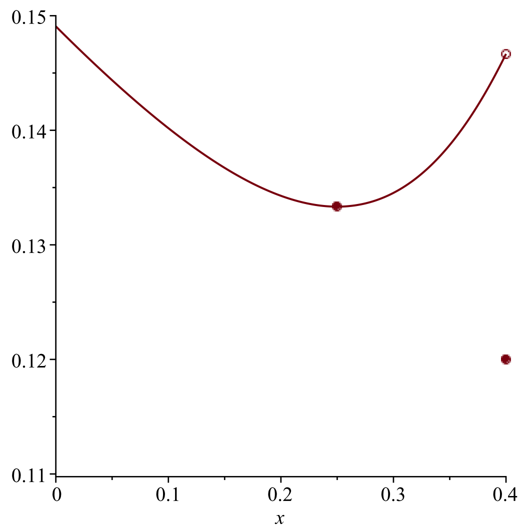
„Nejsou to nějak podezřele malá čísla?“ „To máš v hodinách. Nejkratší čas je $0{,}1\overline{333} = 2/15$ hodiny, to je 8 minut.“ „No, tak to abychom vyrazili. Takže po 250 metrech odbočíme do louky a u třešně budeme za 8 minut.“

Po 250 metrech se Katka nejistě podívá na vysokou trávu. „Tam bude spousta klíšťat, já bych radši přece jen zůstala na cestě.“ „To myslíš vážně?! Tak proč jsme to počítali? Já jdu loukou!“ Katka pokrčí rameny a odpochoduje po cestě. „Káča pitomá…“ bručí si Martin a probíjí se trávou. Jeho rozmrzelost se změní v údiv, když dojde ke stromu a uvidí, že Katka už sedí na větvi a láduje se třešněmi. Jak to, že už je tady?

Kde se stala chyba?

Problém je v dosazení krajní hodnoty 0,4 do funkce t. Funkce t je v tomto bodě nespojitá. Kdyby Martin s Katkou šli po cestě celých 400 metrů a až pak odbočili, nešli by už loukou, ale po cestě. Takže funkce t ve skutečnosti vypadá takto:

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(0{,}4-x)^2+0{,}04}}{3} & \text{pro } x \in \langle 0;\, 0{,}4) \,, \\ \frac{0{,}4+0{,}2}{5} = 0{,}12 & \text{pro } x = 0{,}4. \end{cases}$$



Minimum je tedy v bodě 0,4, a ne tam, kde funkce nabývá svého lokálního minima.

Kdyby ke stromu nevedla kolmá cesta a otázka by spočívala pouze v tom, kde odbočit z původní cesty do louky, aby se ke stromu došlo co nejdříve, bylo by řešení Katky a Martina správné. Velmi podobný příklad je ve skriptech, str. 128, př. 14.

Námět na hraní

Pro jakou rychlost chůze po louce by minimum na intervalu $\langle 0;\, 0{,}4\rangle$ bylo opravdu v bodě lokálního minima?