Riešenie nelineárnej rovnice

Budeme rešiť rovnicu

$$\cos x - x = 0.$$

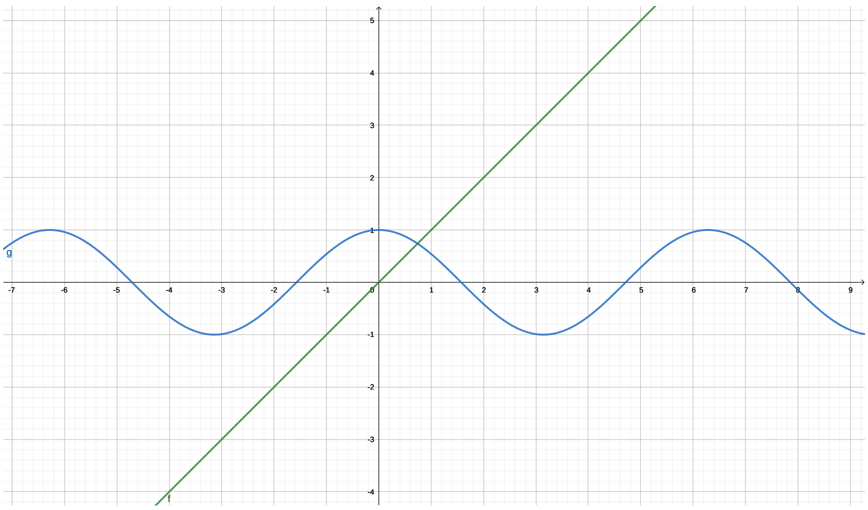
Odhad polohy koreňa I.

1. Nakreslíme si graf funkcie $f(x) = \cos x - x$.

2. Ako nájdeme polohu koreňa?

Odhad polohy koreňa II.

1. Nakreslíme si grafy funkcie $y = \cos x$ a $y = x$
   ($\cos x - x = 0 \iff \cos x = x$).



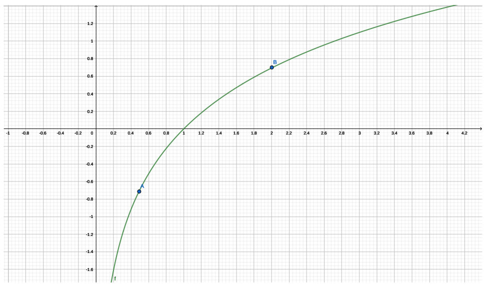
2. Ako nájdeme polohu koreňa?

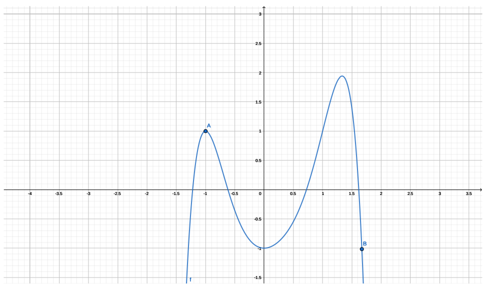
Metóda bisekcie

Ak je funkcia f na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitá a platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

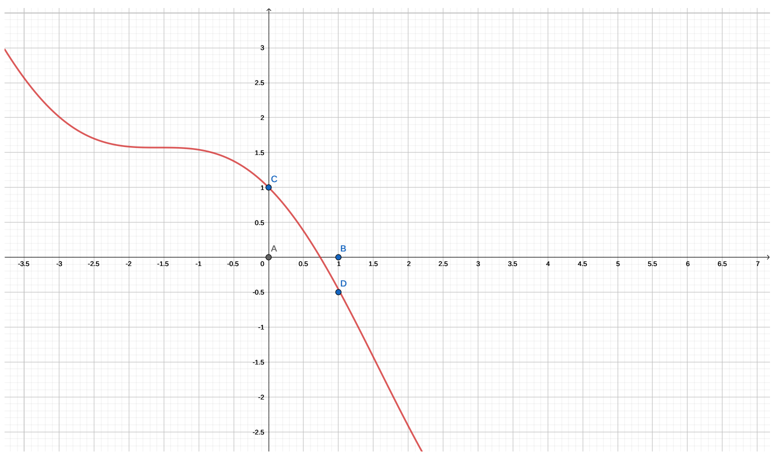
tak na intervale $\langle a, b\rangle$ leží aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.
Čo toto tvrdenie znamená?





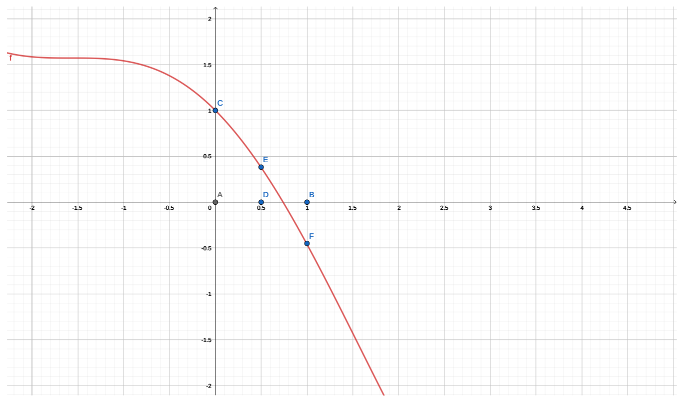
Ako toto tvrdenie môžeme využiť?

1. Začneme na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$.



2. Označíme $a_1 = 0, b_1 = 1$.

3. Prvý odhad koreňa je $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. *Čo je x_1?*



1. Skrátime interval tak, aby $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

2. V našom prípade je $f(x_1) > 0$ a $f(b_1) < 0$, preto

$$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \text{ a } x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

k	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
1	0,0	1,0	0,5	+	-	+
2	0,5	1,0	0,75	+	-	-
3	0,5	0,75	0,625	+	-	+
4	0,625	0,75	0,6875	+	-	+
5	0,6875	0,75	0,71875	+	-	+
6	0,71875	0,75	0,734375	+	-	+

1. Máme rovnicu $\cos x - x = 0$.

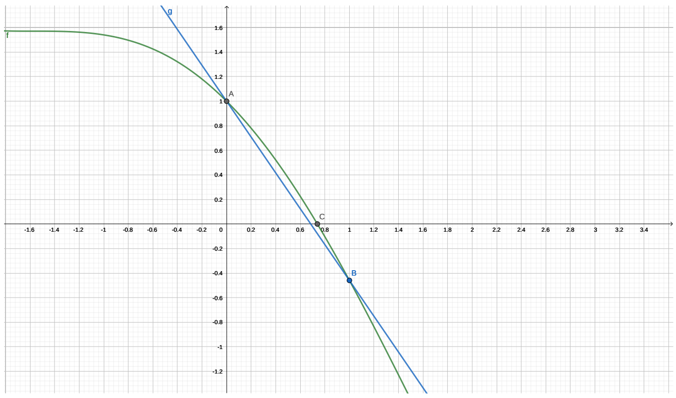
2. Odhadneme polohu koreňa-z predchádzajúcich obrázkov vieme, že koreň bude ležať na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Postupne skracujeme interval (podľa pomocného tvrdenia).

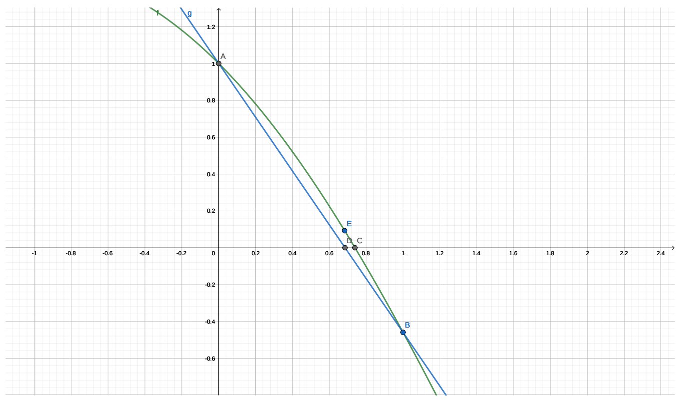
4. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo bude dĺžka posledného ($n-$tého) intervalu kratšia ako $2 \cdot \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba.

Metóda regula falsi

1. Začneme na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$.



2. Označíme $a_1 = 0, b_1 = 1$.
3. Prvý odhad koreňa je $x_1 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(b_1)$. *Čo je* x_1*?*



1. Skrátime interval tak, aby $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.
2. V našom prípade je $f(x_1) > 0$ a $f(b_1) < 0$, preto

$$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \text{ a } x_2 = b_1 - \frac{b_1 - x_1}{f(b_1) - f(x_1)} \cdot f(b_1).$$

k	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
1	0,0	1,0	0,6850734	+	-	+
2	0,6850734	1,0	0,736299	+	-	+
3	0,736299	1,0	0,7389454	+	-	+

$$f(x_3) \approx 0.00023385$$

1. Máme rovnicu $\cos x - x = 0$.

2. Odhadneme polohu koreňa-z predchádzajúcich obrázkov vieme, že koreň bude ležať na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Postupne skracujeme interval (podľa pomocného tvrdenia).

4. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako* ε.

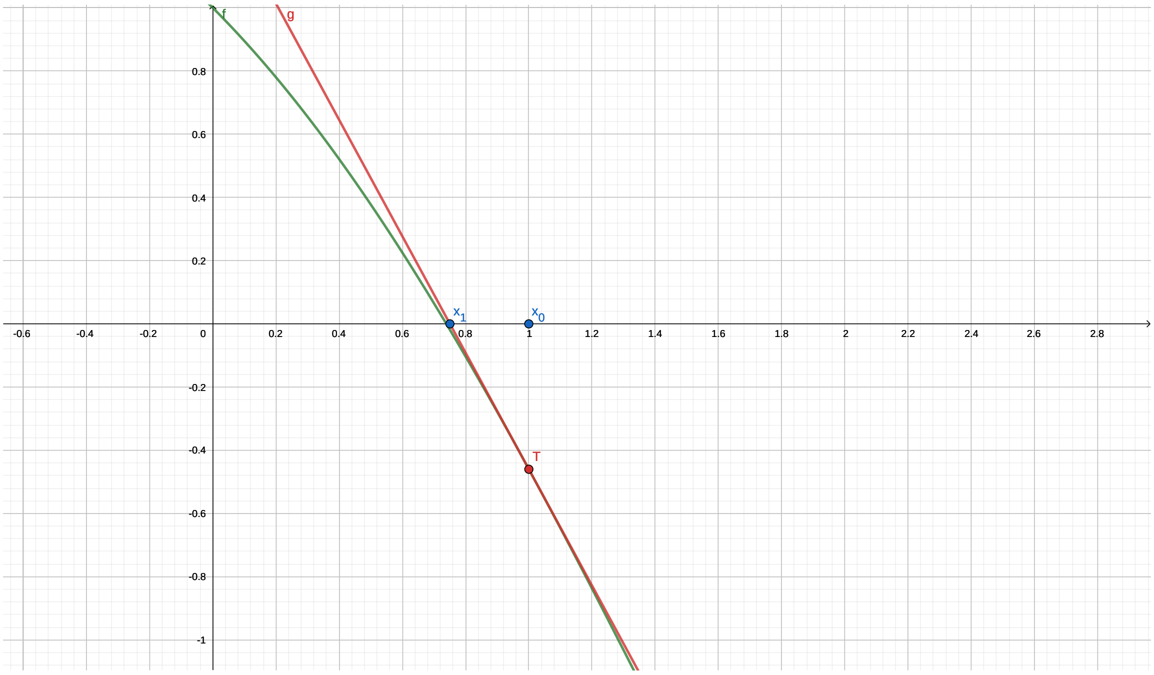
Metóda bisekcie a regula falsi-zhrnutie

1. Obidve metódy fungujú na princípe skracovania intervalu. Takých metód je viac, napr. metóda sečníc.

2. Ak máme zaručené, že na intervale $\langle a, b \rangle$ je **práve jedno riešenie**, tak obe metódy sú spoľahlivé-teda skonvergujú k hľadanému riešeniu.

3. Regula falsi býva rýchlejšia ako metóda bisekcie, ale nie vždy.

Newtonova metóda - dotyčnicová metóda



Nech je daná nelineárna rovnica $f(x) = 0$ a nech na intervale $\langle a, b\rangle$ leží práve jedno riešenie tejto rovnice. Nech sú splnené tieto podmienky:

- funkcia $f(x)$ má na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú prvú aj druhú deriváciu,
- na intervale $\langle a, b\rangle$ je $f'(x) \neq 0$ a $f'(x), f''(x)$ nemenia znamienko.

Potom volíme počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, aby

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

a Newtonova metóda bude konvergovať. *Čo sa môže stať, ak podmienky konvergencie odignorujeme?*

1. Zrejme $f(x) = \cos x - x$, $f'(x) = -\sin x - 1$, $f''(x) = -\cos x$. Z predpisov prvej a druhej derivácie funkcie f vidíme, že sú obe spojité. Keďže koreň rovnice hľadáme na intervale $\langle 0, 1\rangle$, budeme si všímať znamienko prvej a druhej derivácie na tomto intervale. Zrejme $-\sin x - 1 < 0$ pre všetky $x \in \langle 0, 1\rangle$, teda prvá derivácia znamienko nemení a ani nie je nulová. Zrejme $\cos x > 0$ na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, je $\cos x > 0$ aj na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Potom $f''(x) = -\cos x < 0$ na $\langle 0, 1\rangle$, teda na tomto intervale nemení znamienko. Navyše platí, že $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$, preto $f(1).f''(1) > 0$. Pre bod 1 sú teda splnené podmienky konvergencie.

2. Začneme v $x_0 = 1$.
3. Ďalšie aproximácie budeme počítať podľa vzťahu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. V našej úlohe postupne dostávame:

$$x_0 = 1.0000000,\ f(x_0) \approx -0.4596977$$

$$x_1 \approx 0.7503639,\ f(x_1) \approx -0.01892313$$

$$x_2 \approx 0.7391129,\ f(x_2) \approx -0.00004557$$

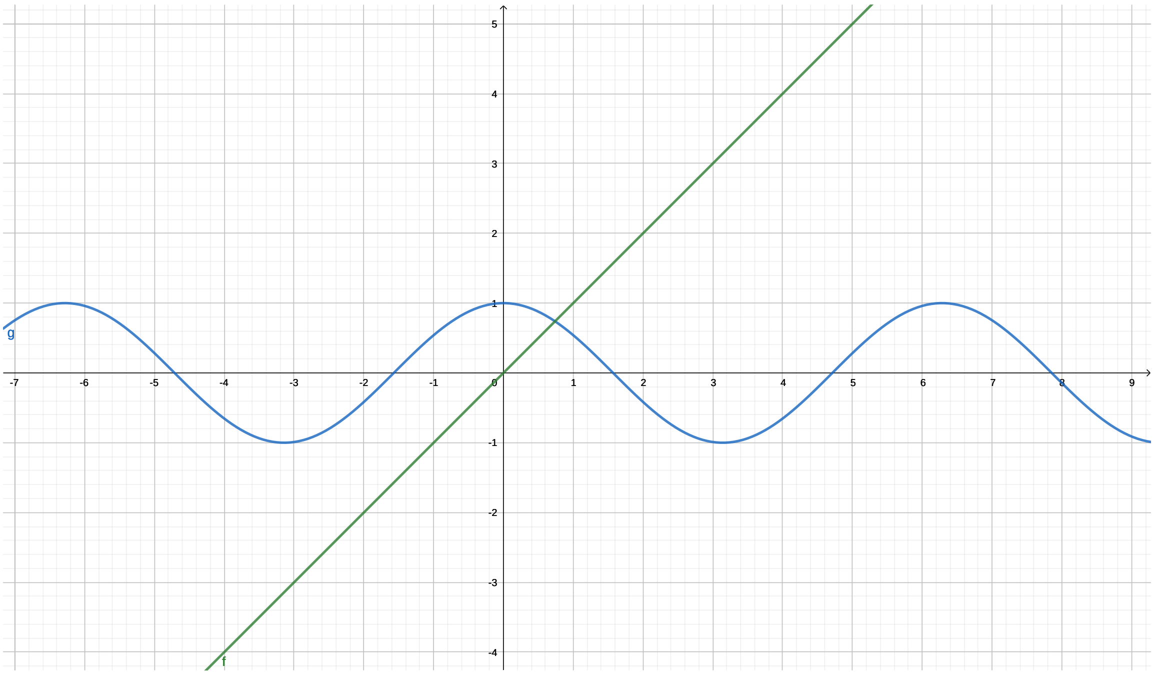
$$x_3 \approx 0.7390857,\ f(x_3) \approx -0.00000095$$

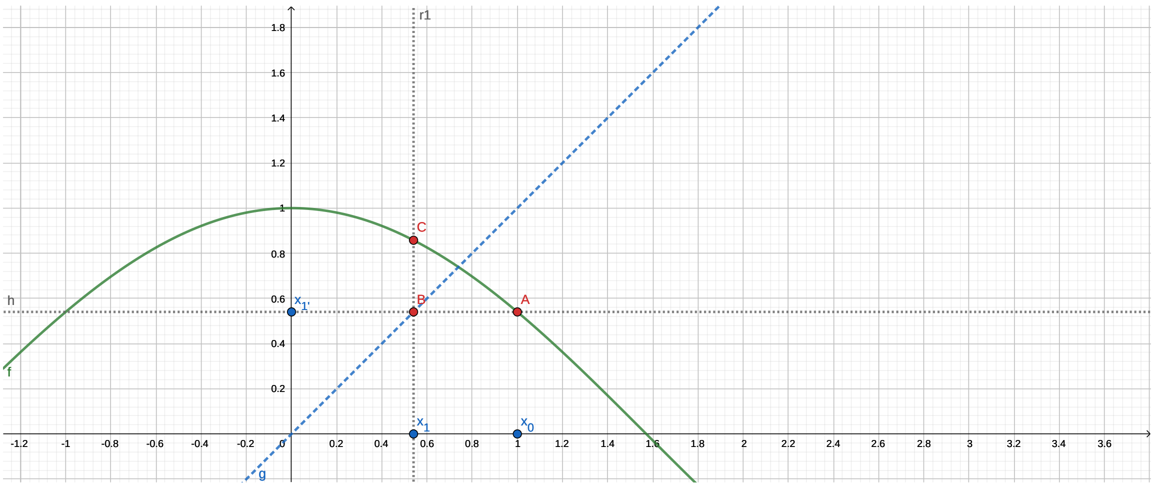
5. Výpočet ukončíme, keď:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

1. Máme rovnicu $f(x) = 0$.
2. Odhadneme polohu koreňa.
3. Overíme podmienky konvergencie metódy.
4. Aplikujeme metódu.
5. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k -_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako ε.*
6. Newtonova metóda je najefektívnejšia, ale nemusí vždy konvergovať.

Metóda prostej iterácie





Nech je daná nelineárna rovnica $f(x) = 0$ a nech na intervale $\langle a, b\rangle$ leží práve jedno riešenie tejto rovnice. Rovnicu $f(x) = 0$ prepíšeme na tvar $g(x) = x$. Ak sú splnené tieto podmienky:

- Funkcia $g(x)$ je diferencovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a $g(\langle a, b\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$.
- Ak existuje $\alpha \in \langle 0, 1)$ tak, že

$$|g'(x)| \leq \alpha,\ \forall x \in \langle a, b\rangle .$$

Potom existuje pevný bod funkcie g na intervale $\langle a, b\rangle$ a počiatočnú aproximáciu môžeme voliť ľubovoľne z intervalu $\langle a, b\rangle$, pričom $x_k = g(x_{k-1})$.

Čo sa môže stať, ak podmienky konvergencie odignorujeme?

1. Rovnicu $\cos x - x = 0$ prepíšeme na $\cos x = x$, potom $g(x) = \cos x$. Funkcia $\cos x$ je diferencovateľná na celej množine reálnych čísel, preto je diferencovateľná aj na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Potrebujeme zistiť, či platí $g(\langle 0, 1\rangle) \subseteq \langle 0, 1\rangle$, čo znamená, že potrebujeme zistiť obraz intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pre funkciu $\cos x$. Na tomto intervale je funkcia nezáporná, navyše vieme, že nadobúda maximálne hodnotu 1 (doporučujem kresliť obrázky.) To ale znamená, že táto podmienka je splnená. Pre deriváciu našej funkcie g platí $g'(x) = -\sin x$. Zrejme $|-\sin x| \leq \sin(1) < 1$, čím je splnená aj posledná podmienka konvergencie (toto si treba dobre premyslieť, funkcia $-\sin x$ je na našom intervale klesajúca a najmenšiu hodnotu nadobúda v $x = 1$, najväčšiu v bode $x = 0$, porovnaním abs. hodnôt $|-\sin 0|$ a $|-\sin 1|$ zistíme, že $|-\sin 1| > |-\sin 0|$, teda $|-\sin x|$ je na našom intervale zhora ohraničená práve $|-\sin 1|$) a teda existuje pevný bod funkcie g na intervale $\langle 0, 1\rangle$ a môžeme zvoliť za x_0 ľubovolný bod z tohto intervalu.

2. Začneme v $x_0 = 1$.

3. Ďalšie aproximácie budeme počítať podľa vzťahu:

$$x_k = g(x_{k-1}).$$

4. V našej úlohe postupne dostávame:

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	1	6	0.76395969	12	0.74142509
1	0.54030231	7	0.72210242	13	0.73750689
2	0.85755321	8	0.75041777	14	0.0.74014734
3	0.65428979	9	0.73140404	15	0.7383692
4	0.79348036	10	0.74423736	16	0.7395672
5	0.70136877	11	0.73560474	17	0.73876032

5. Výpočet ukončíme, keď:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

1. Máme rovnicu $f(x) = 0$.

2. Rovnicu upravíme do tvaru $g(x) = x$.

3. Odhadneme polohu koreňa.

4. Overíme podmienky konvergencie metódy.
5. Aplikujeme metódu.
6. Proces ukončíme ak $f(x_k) = 0$ alebo ak $|x_k -_{k-1}| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná chyba. *Splnením tohto kritéria však nemáme zaručené, že chyba nášho výpočtu je menšia ako ε.*