1 Postupnosti a limita postupnosti

Nekonečná postupnosť je predpis (pravidlo), ktorý každému prirodzenému číslu priraďuje nejaký prvok z danej množiny A. (Pritom predpokladáme, že množina A je neprázdna, inak by sa predsa žiaden taký predpis nedal vymyslieť.) Postupnosť môžeme chápať aj ako špeciálny prípad zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Nekonečné postupnosti môžu byť zadané predpisom (vzorcom) pre výpočet $n-$tého člena postupnosti, zapisujeme ich v tvare $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pričom namiesto a_n píšeme vzťah, napr. $(2n-6)_{n=1}^{\infty}$. Toto treba chápať tak, že $a_1 = 2\cdot 1 - 6 = -4, a_2 = 2\cdot 2 - 6 = -2, \ldots, a_n = 2\cdot n - 6, \ldots$. Postupnosti môžu byť zadané aj rekurentným vzťahom, čo znamená, že máme zadané hodnoty pre prvých k členov a vzťah pre $(k+1)-$vý člen postupnosti pomocou predchádzajúcich $k-$členov. Napr. je známa Fibonacciho postupnosť, kde $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Nás bude zaujímať správanie postupností v nekonečne, preto si najskôr musíme objasniť niektoré dôležité pojmy.

Definícia 1 Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ *(resp. ε- okolím) rozumieme množinu*

$$\mathcal{U}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

bod a sa nazýva stred okolia a číslo ε polomer okolia.

Množinu

$$\mathcal{U}^*(a,\varepsilon) = \mathcal{U}(a,\varepsilon) - \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x-a| < \varepsilon\}$$

budeme nazývať **redukovaným (rýdzim) okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$. *(Pre naše potreby obvykle predpokladáme, že ε je ľubovolne malé.)*

Poznámka 1 *Ak $\varepsilon = 0.1$, tak $\varepsilon-$okolím bodu $a = 2$ je interval $(1.9, 2.1)$, redukovaným $\varepsilon-$okolím tohto bodu je $(1.9, 2.1) \setminus \{2\}$.*

Definícia 2 (Hromadný bod) *Bod $x \in \mathbb{R}$ je* **hromadný bod** *množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, ak v každom jeho redukovanom okolí leží aspoň jeden bod $x_i \in M$.*

Poznámka 2 *Napríklad bod $x = 0.5$ je hromadným bodom intervalu $\langle 0, 1\rangle$, ale aj intervalu $(0,1)$, dokonca je aj hromadným bodom intervalov $\langle 0, 0.5\rangle$ a $(0, 0.5)$. Nie je hromadným bodom intervalu $(0, 0.49)$, lebo stačí vziať napr. $\varepsilon = 0.05$ a v $\varepsilon-$okolí tohto bodu nie je žiaden prvok intervalu $(0, 0.49)$. Toto si dobre premyslite.*

Poznámka 3 *Poznamenajme, že*

$$M \le a \iff \forall x \in M; x \le a,$$

analogicky:

$$a \le M \iff \forall x \in M; a \le x.$$

Pre lepšie pochopenie si treba predstaviť ako množinu M napríklad interval $\langle 1,2\rangle$. Zrejme $3 \geq M$, lebo pre každý prvok množiny M platí, že je menší ako 3. Rovnako aj $2 \geq M$.

Nasledujúce pojmy dobre poznáme z predmetu IDM:

Definícia 3 *Nech $M \subset \mathbb{R}$*

- *Ak platí $M \leq a, a \in \mathbb{R}$, hovoríme, že a je* **horné ohraničenie množiny** *M a množina M je* **zhora ohraničená**.
- *Ak platí $a \leq M, a \in \mathbb{R}$, hovoríme, že a je* **dolné ohraničenie množiny** *M a množina M je* **zdola ohraničená**.
- *$a \in \mathbb{R}$ je* **najväčší prvok množiny** *M, ak platí $a \in M$ a $M \leq a$.*
- *$a \in \mathbb{R}$ je* **najmenší prvok množiny** *M, ak platí $a \in M$ a $a \leq M$.*

Definícia 4 *Nech $M \subset \mathbb{R}$*

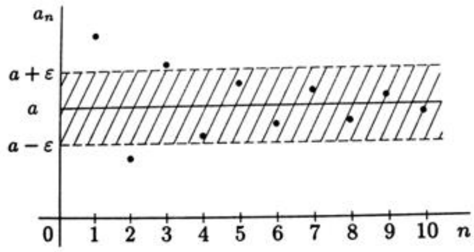
- *Najmenšie horné ohraničenie množiny M nazývame* **suprémum množiny** *M.*
$$\sup M = \min\{x \in \mathbb{R}; M \leq x\}.$$
- *Najväčšie dolné ohraničenie množiny M nazývame* **infimum množiny** *M.*
$$\inf M = \max\{x \in \mathbb{R}; M \geq x\}.$$

Príklad 1 *Nech $M = \langle 1,2\rangle$. Potom množina jej horných ohraničení je interval $\langle 2,\infty)$. Najmenší prvok tejto množiny horných ohraničení je 2 a to je teda suprémum množiny M. Podobne zistíme že infimum množiny M je 1. Ak $M = (1,2)$, tak množina horných ohraničení bude znovu interval $\langle 2,\infty)$ a preto aj suprémum intevalu $(1,2)$ bude rovnaké ako v prípade intervalu $\langle 1,2\rangle$. A samozrejme, tieto dve množiny budú mať zhodné aj infimum.*

A teraz sa už konečne dostávame k pojmu limita:

Definícia 5 *Hovoríme, že číslo a je* **limitou postupnosti** *$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ak platí*
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$
V tomto prípade má postupnosť vlastnú limitu a hovoríme, že konverguje (je konvergentná).

Ako túto definíciu správne pochopiť? S odpoveďou nám pomôže nasledujúci obrázok.



Na obrázku vidíme len malú časť postupnosti, treba si predstaviť, že všetky ostatné členy postupnosti ležia v nekonečnom $\varepsilon-$vyšrafovanom páse. Vidíme, že všetky členy postupnosti napravo od a_3 majú hodnotu, ktorá sa od čísla a líši o menej ako ε (ležia vo vnútri pásu). Vzdialenosť zvyčajne vyjadrujeme pomocou absolútnej hodnoty. Teda k uvedenému ε vieme nájsť $n_0 = 3$ tak, že pre všetky $n > 3$ je $|a - a_n| < \varepsilon$. Ak ε zmenšíme, tak sa zrejme n_0 posunie doprava. Ak pri ľubovolnom zmenšení ε budeme vedieť nájsť n_0 tak, že všetky nasledujúce členy už budú od a menej vzdialené ako ε, teda budú v príslušnom $\varepsilon-$páse, tak postupnosť konverguje k číslu a.

Poznámka 4 *Premyslite si, v akom vzťahu je limita a hromadný bod.*

Definícia 6 *Nech ku každému číslu K existuje n_0 tak, že pre každé $n > n_0$ je $a_n > K$. Potom hovoríme, že postupnosť má* **nevlastnú limitu** $+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Túto definíciu treba chápať tak, že pre ľubovolne veľké reálne číslo K vieme nájsť n_0 tak, že všetky členy postupnosti, ktoré sú od a_{n_0} napravo, sú od čísla K väčšie. Podobne to funguje aj v prípade, keď limita postupnosti je $-\infty$.

Definícia 7 *Nech ku každému číslu L existuje n_0 tak, že pre každé $n > n_0$ je $a_n < L$. Potom hovoríme, že postupnosť má* **nevlastnú limitu** $-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Ak postupnosť limitu nemá, alebo má limitu nevlastnú, hovoríme, že diverguje (je divergentná).

Na jednoduchom príklade si ukážeme, ako sa dá pomocou definície dokázať, že postupnosť $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

Príklad 2 *Ukážte, že postupnosť $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu* 1.
Riešenie. *Máme ukázať, že k ľubovolnému kladnému reálnemu číslu ε vieme*

nájsť také prirodzené číslo n_0, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ platí nerovnosť:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Po úprave dostaneme

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Vzhľadom k tomu, že ε aj $n+1$ sú kladné čísla, môžeme predchádzajúcu nerovnosť upraviť takto:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1,$$

teda

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ak $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \geq 1$, tak za n_0 stačí vziať najbližšie menšie alebo rovné prirodzené číslo. Ak je $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 1$, tak $n_0 = 1$. Teda ak je napr. $\varepsilon = \frac{1}{100}$, tak $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = 99 \in \mathbb{N}$, preto $n_0 = 99$.

Možno si kladiete otázku, ako sme vlastne zistili, že táto postupnosť konverguje práve k číslu 1. Skúste si vypísať aspoň prvých desať členov postupnosti a zistíte, že s rastúcim n sa hodnoty stále viac blížia k číslu 1.

Úlohy:

1. *Pre lepšie pochopenie doporučujem v Príklade 2 postupne za ε dosadzovať rôzne kladné reálne čísla.*

2. *Inšpirujte sa Príkladom 2 a skôr ako sa pustíte do ďalších príkladov, dokážte, že postupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{n^r}\right)_{n=1}^{\infty}$: $r > 0$, konvergujú k číslu 0.*

Pri počítaní limít využijeme nasledujúce vlastnosti limít:

Veta 1 *Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, potom*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,

3. *ak $b \neq 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

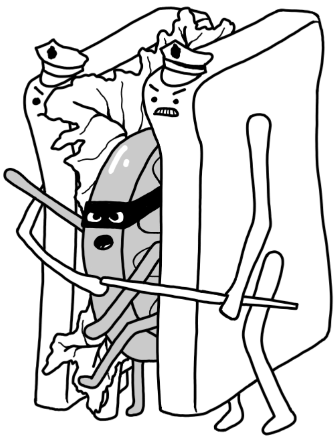
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Veta 2 *1. Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *a* (b_n) *je ohraničená postupnosť. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty \quad \wedge \quad a_n \neq 0 \ \ \forall n \in N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ *a takmer všetky* a_n *sú kladné (záporné), potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$



Autor obrázku: Zuzka Hliněná

Veta 3 *(O dvoch policajtoch) Nech* $\lim a_n = \lim b_n = a$, *a nech existuje* $n_1 \in N$ *tak, že pre* $n > n_1$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Potom existuje limita* (c_n) *a* $\lim c_n = a$.

1.1 Riešené príklady

Príklad 3 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5}$.

Riešenie. *V čitateli, aj v menovateli máme polynóm. V takýchto prípadoch je postup jednoduchý. Najskôr v čitateli, aj v menovateli vyjmeme pred zátvorku* n^k, *kde* k *je najvyšší exponent, ktorý sa v danom výraze nachádza. V našom prípade je to* n^5 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(\frac{3}{n^5} - \frac{5}{n^3} - \frac{2}{n}\right)}{n^5\left(\frac{3}{n^5} - 2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^5} - \frac{5}{n^3} - \frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5} - 2}.$$

Z predchádzajúcich úloh vieme, že postupnosti typu $\left(\frac{1}{n^r}\right)_{n=1}^{\infty} : r > 0$, *konvergujú k číslu* 0, *z vlastností limít vieme, že ak majú postupnosti vlastné limity, tak ich súčet (rozdiel, podiel) konverguje k súčtu (rozdielu, podielu) týchto limít a preto je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^5} - \frac{5}{n^3} - \frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5} - 2} = \frac{0-0-0}{0-2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Príklad 4 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$.
Riešenie. *Postupujeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(+\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0-0}{3-0+0} = \frac{2}{3}.$$

Príklad 5 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2+n}$.
Riešenie. *Znovu postupujeme tak, ako v predchádzajúcich úlohách:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Na záver sme dostali výraz, ktorého prevrátená hodnota konverguje k číslu 0*. Zrejme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0+0}{2+0} = 0$*. Keďže všetky členy postupnosti sú kladné, tak z vlastností limít vyplýva, že pôvodná postupnosť diverguje do* $+\infty$*. Preto*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Poznámka 5 *V predchádzajúcich úlohách sme počítali limitu podielu dvoch polynómov, teda zdanlivo to boli rovnaké úlohy, ale limity boli v niektorých prípadoch vlastné a v jednom z nich bola limita nevlastná. Zamyslite sa a skúste sformulovať podmienky pre najvyššie exponenty premennej* n *v čitateli a menovateli a limity týchto podielov.*

Príklad 6 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5$.
Riešenie. *Opäť predpis upravíme pomocou vynímania pred zátvorku, zároveň pozorne umocňujeme súčin a podiel:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\cdot 1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5 = (1)^5 \cdot \left(\frac{1}{1+0}\right)^5 = 1.$$

Príklad 7 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$.

Riešenie. *Táto úloha je trochu komplikovanejšia ako predchádzajúca, nakoľko je v exponente výraz* $(n+5)$*. Predpis sa budeme snažiť upraviť tak, aby sme mohli využiť, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e.(1+0)^5=e.$$

Porovnajte si tento postup s postupom v predchádzajúcom príklade.

Príklad 8 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$.

Riešenie. *V tejto úlohe budeme postupovať podobne, ako v predchádzajúcej, len si treba uvedomiť, ako sa správne umocňuje.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}.$$

Vnútorná zložka našej postupnosti konverguje k číslu e a po umocnení dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}=e^3.$$

Príklad 9 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$.

Riešenie. *Opäť budeme predpis upravovať ako v predchádzajúcich úlohách, zároveň využijeme to, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}=e$ *a vlastnosti umocňovania. Preto*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}.$$

Príklad 10 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

Riešenie. *Aj v tomto príklade využijeme, že* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ *a zároveň urobíme jeden umelý krok, predpis postupnosti upravíme nasledovne:*

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}}=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}.$$

Príklad 11 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{3n-1}$.

Riešenie. *V tomto príklade budeme postupovať veľmi podobne ako v*

Príklade 3 a využijeme, že limita súčinu ohraničenej postupnosti a postupnosti, ktorá konverguje k číslu 0 *je* 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sin n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{\sin n}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{\sin n}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Príklad 12 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

Riešenie. *Vzhľadom k tomu, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, *dostávame neurčitý výraz typu* $\infty - \infty$. *Tento problém vyriešime tak, že výraz vhodne rozšírime tak, aby sme mohli využiť známy vzťah* $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$. *Toto si dobre premyslite.*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0.$$

Príklad 13 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \cos \frac{n^2+1}{2n-1}\right)$.

Riešenie. *Pri riešení tejto úlohy môžeme postupovať rôznymi spôsobmi, my si ukážeme aplikáciu Vety o dvoch policajtoch:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \cos \frac{n^2+1}{2n-1}\right) = 0$$

Zrejme

$$-1 \le \cos \frac{n^2+1}{2n-1} \le 1.$$

Túto nerovnosť môžeme vynásobiť výrazom $\frac{1}{n}$ *s tým, že uvažujeme len* $n \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$-\frac{1}{n} \le \frac{1}{n} \cdot \cos \frac{n^2+1}{2n-1} \le \frac{1}{n}.$$

Postupnosti $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *konvergujú k* 0 *a z Vety o dvoch policajtoch vyplýva, že aj postupnosť* $\left(\frac{1}{n} \cdot \cos \frac{n^2+1}{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* 0. *Skúste túto úlohu vyriešiť bez použitia Vety o dvoch policajtoch.*

Úlohy na precvičenie:

1. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)$ Výsledok: ∞
2. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+n}$. Výsledok: $\frac{2}{3}$
3. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{n^3+n-7}$. Výsledok: 0

4. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5+n^3-7n+1}{15-n^3}$. Výsledok: $-\infty$

5. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n}$. Výsledok: e^7

6. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$. Výsledok: $e^{\frac{1}{2}}$

7. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$. Výsledok: $\frac{1}{e}$

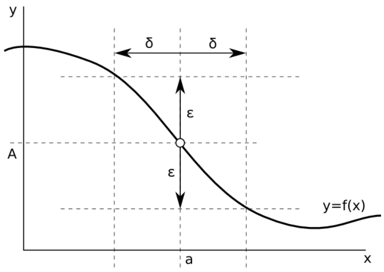
8. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}$. Výsledok: $e^{\frac{7}{2}}$

9. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}$. Výsledok: ∞

10. Vypočítajte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$. Výsledok: 1

2 Limita funkcie

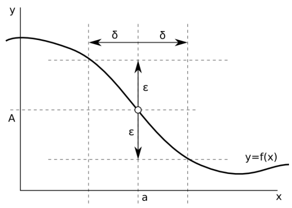
Aj pri funkciách si budeme všímať ich správanie v nevlastných bodoch, na rozdiel od postupností, budeme mať aj nevlastný bod $-\infty$. Ale budeme si všímať aj limity vo vlastných bodoch. Situáciu vo vlastnom bode nám popisuje nasledujúci obrázok a definícia:



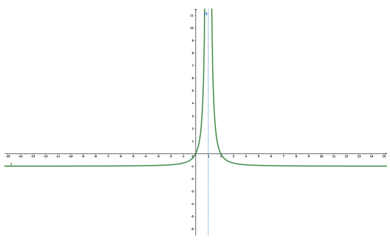
Definícia 8 *Hovoríme, že číslo A je limitou funkcie $f(x)$ v bode c ak platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Poznámka 6 *Funkcia môže mať v bode limitu vlastnú, v takom prípade sa táto limita môže rovnať funkčnej hodnote v bode, alebo dokonca v tom bode ani funkcia nemusí byť definovaná. Takúto situáciu vidíme na obrazku:*

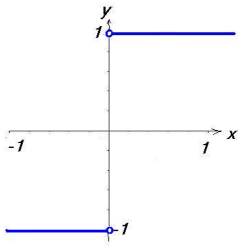


Funkcia môže mať vo vlastnom bode aj nevlastnú limitu, napríklad pre funkciu na nasledujúcom obrázku platí $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$:



A na poslednom obrázku vidíme prípad, kedy funkcia limitu v bode $x = 0$

nemá.



Posledná funkcia z Poznámky 6 nás prirodzene privádza k novým pojmom, k tzv. jednostranným limitám:

Definícia 9 *Hovoríme, že číslo A je limitou sprava funkcie $f(x)$ v bode c ak platí*

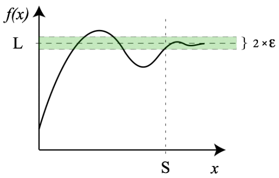
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0; \quad 0 < x - c < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

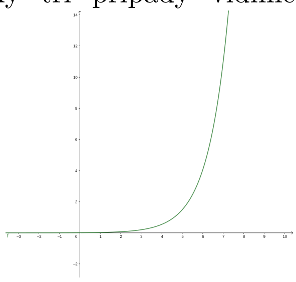
Hovoríme, že číslo A je limitou zľava funkcie $f(x)$ v bode c ak platí

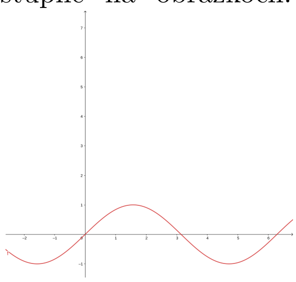
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0; \quad 0 < c - x < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Poznámka 7 *Každá funkcia má v každom bode najviac jednu limitu, a tiež najviac jednu limitu sprava a jednu zľava.*

Podobne ako pri postupnostiach, môžu nastať v nevlastnom bode funkcie tri možnosti, funkcia môže mať vlastnú, nevlastnú limitu, alebo tam limita neexistuje. Všetky tri prípady vidíme postupne na obrázkoch:







Pri počítaní limít využijeme nasledujúce vlastnosti limít:

Veta 4 (Veta o dvoch policajtoch) *Ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ *a* $\exists \mathcal{U}(a); f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Potom*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Veta 5 *Nech f, g majú vlastné limity v bode a, a* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. *Potom*

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$,

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c,$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c,$
4. *ak* $c \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Veta 6 *1.* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to a} -f(x) = -\infty,$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty,$
3. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty \iff \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0,$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge g(x)$ *je ohraničená* $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty,$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge g(x) \geq c > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \infty,$
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \wedge g(x)$ *je ohraničená* $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = 0,$
7. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \wedge \exists\delta > 0\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$
Potom
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Poznámka 8 *Ešte uvedieme dva veľmi užitočné vzťahy:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Nasledujúca veta nám dáva návod, ako počítať limitu zloženej funkcie:

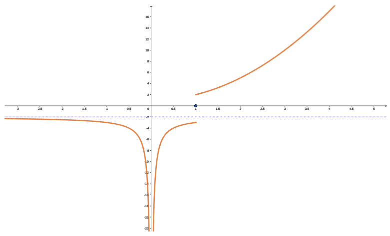
Veta 7 *Nech a je hromadný bod množiny $D(f)$, kde $f = h \circ g$ a nech existujú limity*
$$c = \lim_{x\to a} g(x), \quad d = \lim_{t\to c} h(t),$$
a na istom okolí bodu a je pre $x \neq a$ aj $g(x) \neq c$ (pre spojité funkcie môžeme vynechať). Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = d$.

2.1 Riešené príklady

Príklad 14 *Načrtnite graf funkcie, o ktorej viete:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2.$$

Riešenie. *Jeden z grafov, ktoré vyhovujú podmienkam v zadaní, vidíme na obrázku. Pre splnenie toho, že* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ *je dobré nakresliť si priamku* $y = -2$ *a potom stačí dokresliť graf tak, aby sa k tejto priamke v* $-\infty$ *približoval. Ďalšia pomocná priamka je* $y-$*ová os, lebo* $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$*, teda musí byť aj* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$*. Pre splnenie podmienky* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *stačí, aby funkcia v* ∞ *neobmedzene rástla. V bode* $x = 1$ *funkcia nemusí byť vobec definovaná, v našom prípade je* $f(1) = 0$*, rovnako dobré by bolo, keby tam bola akákoľvek funkčná hodnota. Pozor na to, že kreslíme graf funkcie, funkčná hodnota tam môže byť najviac jedna.*



Príklad 15 *Vypočítajte:* $\lim_{x\to 1} x^2 + 1$.

Riešenie. *Táto úloha je veľmi jednoduchá, stačí za* x *dosadiť hodnotu* 1.

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 1 = \lim_{x\to 1} 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Príklad 16 *Vypočítajte:* $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$.

Riešenie. *Keď budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcej úlohe, tak dostaneme:*

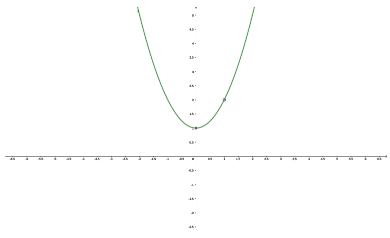
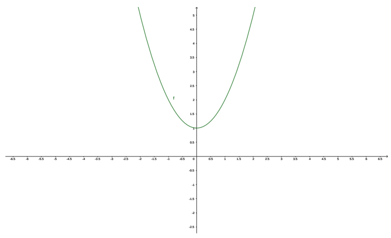
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1^3 - 1^2 + 1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

Toto je neurčitý výraz, preto je potrebné najskôr predpis funkcie upraviť:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x^2 + 1.$$

Poslednú rovnosť si lepšie predstavíme, keď si nakreslíme grafy funkcií

$f(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ a $g(x) = x^2+1$. Vidíme, že sa líšia iba v bode $x = 1$:

Preto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 2.$$

V nasledujúcich úlohách budeme postupovať veľmi podobne ako pri výpočte limít postupností.

Príklad 17 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-2x^2}{2-3x^2} \right)$.

Riešenie. *Vzhľadom k tomu, že* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2-3x^2}$ *sú vlastné, tak môžeme limitu rozdielu počítať ako rozdiel limít:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-2x^2}{2-3x^2} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2-3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{1} - \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2}{\frac{2}{x^2} - 3} = \frac{0-0}{1} - \frac{0-2}{0-3} = -\frac{2}{3}.$$

Príklad 18 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1} \right)$.

Riešenie. *Pri riešení tejto úlohy budeme postupovať podobne ako v Príklade 12*

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1} \right) \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2-1})}{(x + \sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2-1)}{x + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Príklad 19 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}$.

Riešenie. *Predpis tejto funkcie upravíme tak, aby sme mohli využiť, že* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Príklad 20 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\cdot \sin x}$.

Riešenie. *Budeme postupovať ako v predchádzajúcom príklade, zároveň využijeme vzťah pre cosínus dvojnásobného uhla a pre funkciu tangens.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\sin^2 x}{x\cdot \sin x} + \frac{\sin^2 x}{x\cdot \cos^2 x \sin x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(2\cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 2\cdot 1+1+1 = 3.$$

Úlohy na precvičenie:

1. Načrtnite graf funkcie, o ktorej viete:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to \infty} f(x) = -3, \lim_{x\to -1} f(x) = \infty, \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3.$$

2. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, Výsledok: 4
3. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1} \right)$, Výsledok: $\frac{1}{2}$
4. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, Výsledok: $\frac{1}{4}$
5. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$, Výsledok: 1
6. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, Výsledok: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
7. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x}$, Výsledok: $-\infty$
8. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to -1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}$, Výsledok: $-\frac{\pi}{2}$

2.2 Limita funkcie a spojitosť

Pojem limita funkcie súvisí s ďalším dôležitým pojmom a to je spojitosť funkcie.

Definícia 10 *Funkcia sa nazýva* **spojitá v bode** a*, ak platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

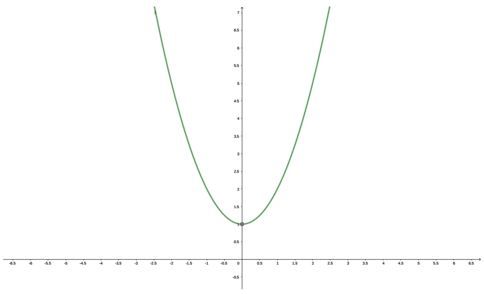
Funkcia sa nazýva **spojitá sprava v bode** a*, ak platí*

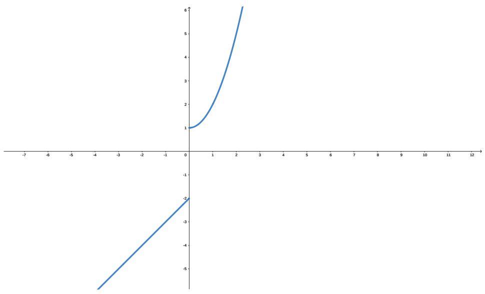
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Funkcia sa nazýva **spojitá zľava v bode** a, *ak platí*

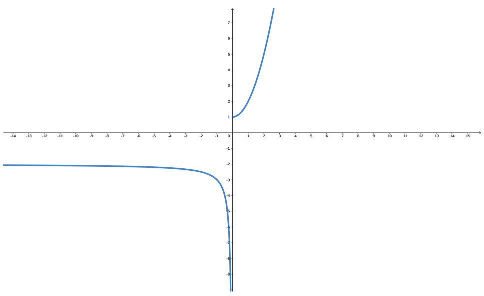
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Poznámka 9 *V prípade, že funkcia nie je v bode a spojitá, hovoríme, že je v tomto bode nespojitá. Treba si uvedomiť, že limita v takomto bode sa nerovná funkčnej hodnote v tomto bode a teda môžu nastať rôzne prípady. Preto rozlišujeme dva základné druhy nespojitosti. Funkcia má v bode a nespojitosť* **prvého druhu**, *ak* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *aj* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *sú vlastné. V tomto prípade rozlišujeme odstrániteľnú nespojitosť a skokovú nespojitosť. Pri odstrániteľnej nespojitosti je* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, *pri skokovej nespojitosti je* $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$. *V nasledujúcom obrázku je zelenou farbou nakreslená funkcia, ktorá má odstrániteľnú nespojitosť v bode* $x = 0$ *(prázdny puntík) a modrou farbou funkcia, ktorá ma skokovú nespojitosť v bode* $x = 0$ *(funkčná hodnota v tomto bode môže byť ľubovolná, samozrejme maximálne jedna).*





Funkcia má v bode $x = a$ *nespojitosť* **druhého druhu**, *ak aspoň jedna z limít* $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *neexistuje, alebo je nevlastná. Jednu takú funkciu máme na nasledujúcom obrázku:*



Okrem spojitosti v bode, nás bude zaujímať aj spojitosť na intervale a to otvorenom, aj uzavretom:

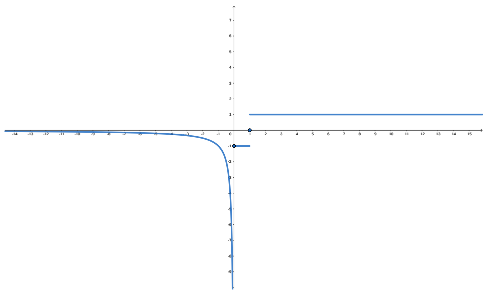
Definícia 11 *Funkcia sa nazýva* **spojitá na intervale** (a, b), *ak je spojitá v každom jeho bode. Funkcia sa nazýva* **spojitá na uzavretom intervale**

$\langle a, b\rangle$, ak je spojitá na otvorenom intervale (a, b) a navyše je v bode a spojitá sprava a v bode b je spojitá zľava.

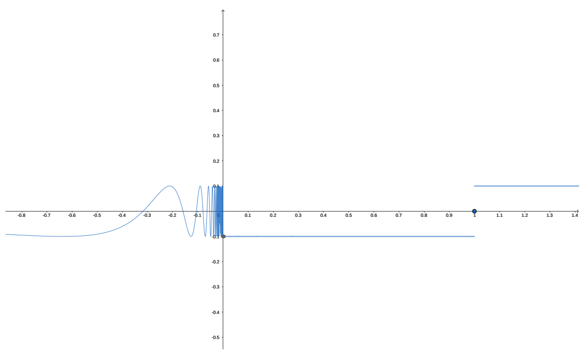
Príklad 21 *Načrtnite graf funkcie, o ktorej viete:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, f(0) = -1, f(1) = 0.$$

V bode $x = 0$ má funkcia nespojitosť druhého druhu a je sprava spojitá. V bode $x = 1$ má skokovú nespojitosť prvého druhu a nie je ani zľava, ani sprava spojitá.
Riešenie. *Jedno z mnohých riešení vidíme na obrázku:*



Podmienky $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1, f(0) = -1, f(1) = 0$ sú už asi po predchádzajúcich riešených úlohách bezproblémové. Nespojitosť druhého druhu v bode $x = 0$ naznačuje, že aspoň jedna z limít $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ bude nevlastná, alebo nebude existovať. Keďže $f(0) = -1$ a funkcia je v tomto bode sprava spojitá, tak potom $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -1$, teda nespojitosť druhého druhu sme zabezpečili tým, že $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$, rovnako dobre by bolo, keby bolo $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty$, alebo keby táto limita neexistovala. Keďže v bode $x = 1$ má byť skoková nespojitosť prvého druhu a funkcia nemá byť ani zľava, ani sprava spojitá, tak musí byť $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq 0$, aj $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) \neq 0$, navyše obe limity musia byť vlastné. Na nasledujúcom obrázku máme ďalšie riešenie tejto úlohy, v ktorom $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ neexistuje.



2.3 Asymptoty funkcie

S pojmom asymptota ste sa už isto stretli na strednej škole pri hyperbolách. Asymptota grafu funkcie (stručne asymptota funkcie) je priamka, ktorej vzdialenosť od tejto funkcie sa limitne blíži k nule. Poznáme dva typy asymptot:

Definícia 12 *Priamka $x = a$ sa nazýva zvislou asymptotou, alebo asymptotou bez smernice), ak platí:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \textit{alebo} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Priamka $x = ax + b$ sa nazýva šikmou asymptotou, alebo asymptotou so smernicou), ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \textit{alebo} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Zvislé asymptoty existujú len v bodoch nespojitosti a to len vtedy, ak aspoň jedna z jednostranných limít v takomto bode je nevlastná. Pri určovaní šikmých asymptot nám pomôže nasledujúca veta:

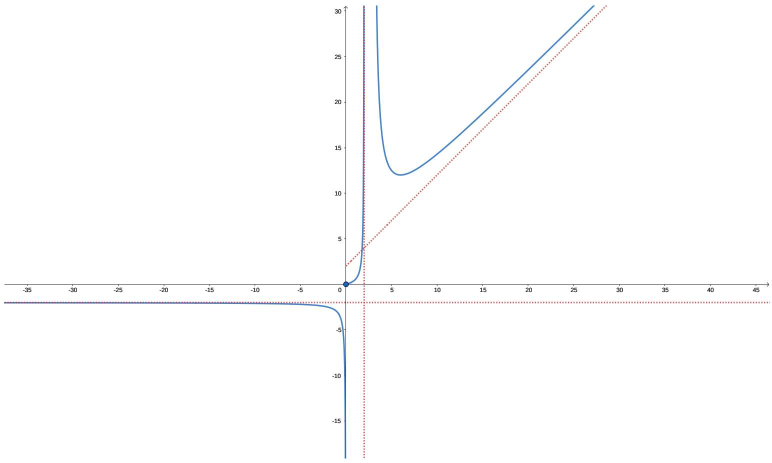
Veta 8 *Ak priamka $y = ax + b$ je asymptotou funkcie f, tak platí:*

$$a = \lim \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim[f(x) - ax], \quad \textit{kde} \ \lim \ \textit{je} \ \lim_{x\to\infty} \quad \textit{alebo} \quad \lim_{x\to-\infty}.$$

Príklad 22 *Načrtnite graf funkcie, o ktorej viete:*

- *Asymptota v $+\infty$ má predpis $y = x + 2$.*
- *Asymptota v $-\infty$ má predpis $y = -2$.*
- *Funkcia má nespojitosť druhého druhu v bode $x = 0$ a je v tomto bode sprava spojitá, nespojitosť druhého druhu má aj v bode $x = 2$.*
- $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$.

Riešenie. *Najskôr si nakreslíme všetky asymptoty, na obrázku sú červenou farbou. Potom si vyznačíme funkčnú hodnotu v bode $x = 0$ a postupne kreslíme funkciu tak, aby sme dodržali všetky podmienky. Jedno z možných* *riešení vidíme na obrázku:*



Príklad 23 *Určte asymptoty funkcie* $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
Riešenie. *Definičný obor tejto funkcie je* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Preto zvislá asymptota môže byť iba v bode* $x = 0$. *Je preto potrebné vypočítať* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, *aj* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. *Zrejme*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} x + \frac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty.$$

Podobne vypočítame aj limitu sprava:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

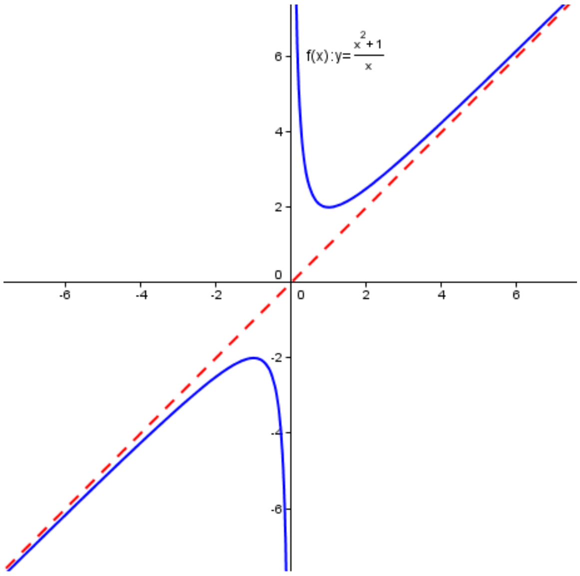
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} = 0 + \infty = +\infty.$$

Teraz sa zameriame na šikmú asymptotu v $+\infty$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Teda šikmá asymptota v $+\infty$ *má predpis* $y = 1\cdot x + 0$, *teda* $y = x$. *Rovnaký predpis má aj asymptota v* $-\infty$, *toto si dobre premyslite. Na* *ilustráciu uvádzame aj graf funkcie f, spolu s vyznačenými asymptotami (zvislá asymptota je $y-$ová os).*



Úlohy na precvičenie:

1. Načrtnite graf funkcie, o ktorej viete:
   - Asymptota v $+\infty$ má predpis $y = 2$.
   - Asymptota v $-\infty$ má predpis $y = -x$.
   - $f(-2) = 0, f(0) = 2, f(2) = -1$.
   - Funkcia má nespojitosť prvého druhu v bode $x = -2$ a nespojitosť druhého druhu v bode $x = 2$.
   - $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 3, \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$.

2. Nájdite asymptoty grafu funkcie: $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$,

   Výsledok: $x = 1, y = 1$

3. Nájdite asymptoty grafu funkcie: $f_2(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}$,

   Výsledok: $x = 2, x = -2, y = x$

4. Nájdite asymptoty grafu funkcie: $f_3(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$,

   Výsledok: $x = -1, x = 0, x = 1, y = 0$

5. Nájdite asymptoty grafu funkcie: $f_4(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$,

   Výsledok: $x = -1, x = -1, y = x$

6. Nájdite asymptoty grafu funkcie: $f_5(x) = 2x - \frac{\cos x}{x.}$

   Výsledok: $x = 0, y = 2x$

3 Diferenciálny počet

3.1 Dotyčnica a derivácia v bode

S dotyčnicami ste sa stretli už na základnej škole, teraz si tento pojem zovšeobecníme. Začneme úlohou, ktorú ste už pravdepodobne riešili na strednej škole.

Príklad 24 *Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2$ v jej bode $A = [2, ?]$.*
Riešenie. *Najskôr určíme y-ovú súradnicu bodu A, teda $A = [2, 2^2] = [2, 4]$. Bod A leží na hľadanej dotyčnici, ktorá má rovnicu $y = kx + q$. Preto $4 = k \cdot 2 + q$. Ďalej vieme, že parabola má mať práve jeden spoločný bod s dotyčnicou, preto rovnica:*

$$x^2 = kx + q \iff x^2 - kx - q = 0$$

má jediné riešenie. Vzhľadom k tomu, že to je kvadratická rovnica, musí byť jej diskriminant nulový, preto: $D = k^2 + 4q = 0$. Dostali sme sústavu rovníc:

$$4 = 2k + q \wedge k^2 + 4q = 0.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme neznámu q a dosadíme do druhej rovnice:

$$q = 4 - 2k \Rightarrow k^2 + 4(4 - 2k) = 0,$$

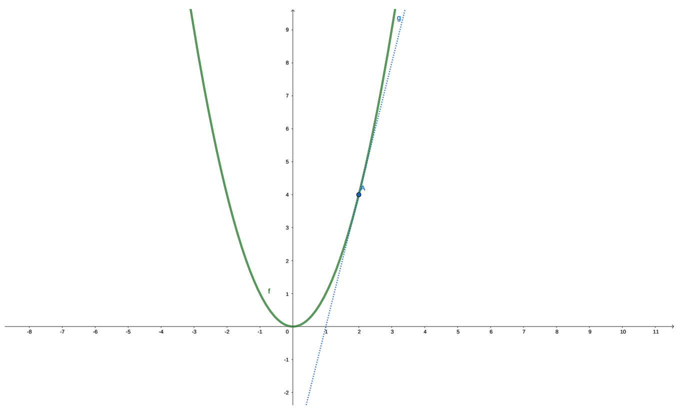
po úprave

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \iff (k - 4)^2 = 0.$$

Potom

$$k = 4 \wedge q = 4 - 2 \cdot 4 = -4,$$

preto rovnica dotyčnice je $y = 4x - 4$. Situáciu vidíme na obrázku:



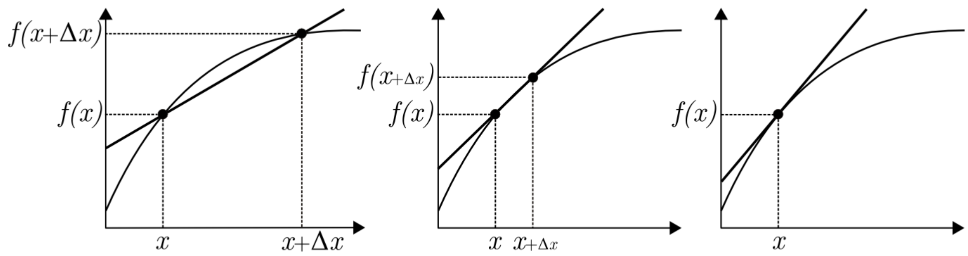
Keby sme takúto úlohu chceli riešiť pre komplikovanejšiu funkciu, museli by sme riešiť náročnejšie rovnice. Ukážeme si preto trochu šikovnejší spôsob. Zoznámime sa s novým pojmom **derivácia funkcie**.

Definícia 13 *Nech pre funkciu f, definovanú na nejakom okolí bodu x_0, existuje vlastná limita*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Potom túto limitu nazývame **deriváciou** *funkcie f v bode x_0. Ak má funkcia deriváciu v bode, hovoríme, že je v ňom* **diferencovateľná**.

Pre lepšie pochopenie definície derivácie v bode uvádzame nasledujúci obrázok:



Poznámka 10 *Je dôležité si uvedomiť, že nutnou podmienkou pre existenciu derivácie funkcie v bode, je spojitosť funkcie v tomto bode.*

Vzťah medzi deriváciou a dotyčnicou opisuje nasledujúca definícia:

Definícia 14 *Priamka s rovnicou $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$. Priamka s rovnicou $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ je normála ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$.*

Poznámka 11 *Pozorný čitateľ si už isto všimol, že derivácia v bode x_0 je smernica dotyčnice v tomto bode.*

Poznámka 12 *Treba si uvedomiť, že pre uvedené rovnice dotyčnice a normály je potrebné, aby existovala vlastná nenulová derivácia $f'(x_0)$. Ak je $f'(x_0) = 0$, tak dotyčnica je rovnobežná s o_x a a jej rovnica je $y = f(x_0)$, normála je rovnobežná s o_y a a jej rovnica je $x = x_0$. Ak je $f'(x_0)$ nevlastná, tak dotyčnica je rovnobežná s o_y a a jej rovnica je $x = x_0$, normála je rovnobežná s o_x a a jej rovnica je $y = f(x_0)$.*

Podobne sú definované aj jednostranné derivácie v bode:

Definícia 15 *Ak pre funkciu f, definovanú na $\langle x_0, x_0 + \delta)$ resp. $(x_0 - \delta, x_0\rangle$, (pričom δ je kladné reálne číslo) existujú jednostranné limity*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \textit{resp.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom $f'_+(x_0)$ nazývame **deriváciou sprava** *a $f'_-(x_0)$ nazývame* **deriváciou zľava**.

V prípade, keď sú jednostranné derivácie v nejakom bode rôzne, neexistuje v takom bode dotyčnica, ale tzv. polodotyčnice.

Definícia 16 *Polpriamky s rovnicami*

$$y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0)\colon x > x_0,$$

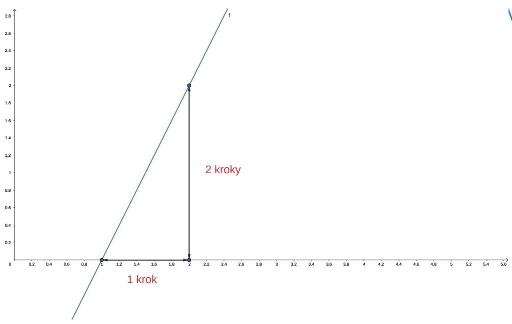
resp.

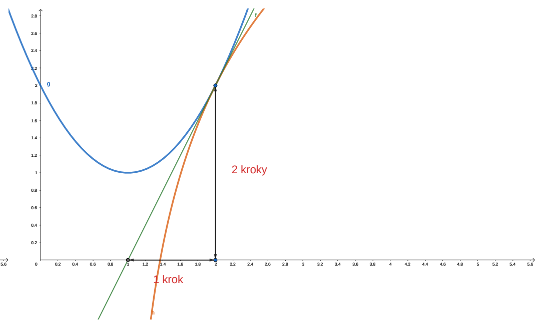
$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0)\colon x < x_0,$$

nazývame pravá, resp. ľavá polodotyčnica ku grafu funkcie f *v bode* $[x_0, f(x_0)]$.

Príklad 25 *Pekný príklad funkcie, ktorá má v nejakom bode rôzne jednostranné limity, je funkcia* $f(x) = |x|$. *V bode* $x = 0$ *je síce funkcia spojitá, ale nie je v ňom diferencovateľná, lebo* $f'_-(0) = -1$, *ale* $f'_+(0) = 1$.

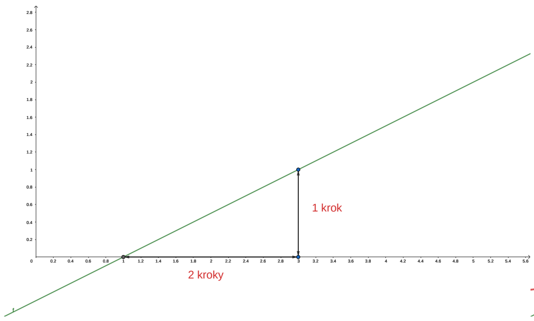
Už vieme, že derivácia funkcie f v bode x_0 je smernica dotyčnice k funkcii f v bode x_0. Teraz si podrobnejšie vysvetlíme túto geometrickú interpretáciu derivácie v bode. Ak napr. vieme, že pre funkciu f platí, že $f(1) = 0$ a $f'(1) = 2$, tak najskôr si vyznačíme bod so súradnicami $[1, 0]$, potom v tomto bode nakreslíme dotyčnicu so smernicou $k = 2$. Vieme, že smernica priamky je $\tan\varphi$, pričom φ je uhol, ktorý priamka zviera s osou x. To znamená, že ak máme na priamke dva body $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, kde $a_1 < b_1$, tak smernica je podiel $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$. Ak má mať tento podiel hodnotu dva, tak potom ak sa v $x-$ovom smere posunieme o jeden „krok“ doprava, tak v $y-$ovom smere sa musíme posunúť o dva „kroky“ smerom hore. Teda v našom prípade to bude priamka (resp. jej časť), ktorá prechádza bodom $[1, 0]$ a bodom $[2, 2]$. Situáciu máme znázornenú na obrázku vľavo a na obrázku vpravo sú dokreslené dve vhodné funkcie f. Funkcie kreslíme tak, aby sa v bode $[1, 0]$ dotýkali dotyčnice.

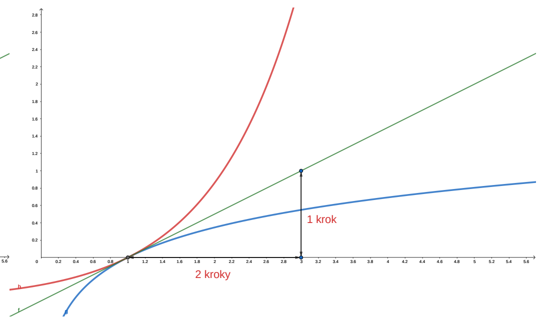




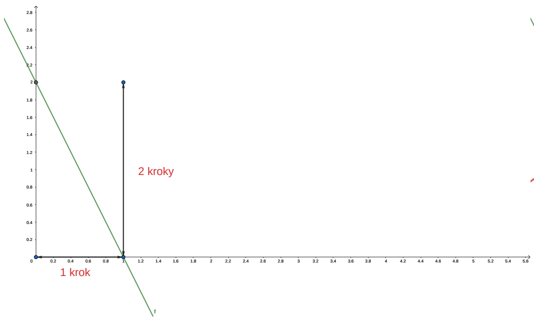
Úlohu trochu zmeníme, budeme požadovať, aby pre funkciu f platilo $f(1) = 0$ a $f'(1) = \frac{1}{2}$. Postupovať budeme rovnako, len si musíme uvedomiť, že ak je smernica $k = \frac{1}{2}$, tak ak sa v $x-$ovom smere posunieme o dva

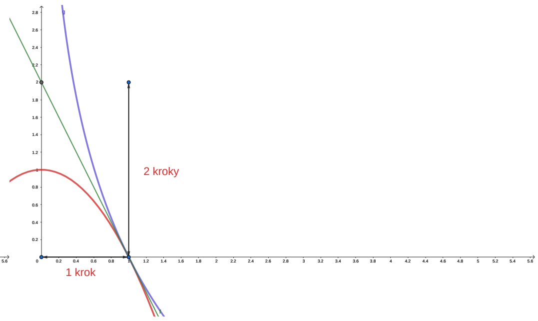
„kroky“ doprava, tak v $y-$ovom smere musíme urobiť smerom hore presne jeden „krok“. Alebo by sme sa v $x-$ovom smere mohli posunúť len o jeden „krok“ doprava, ale v $y-$ovom smere by sme sa potom posúvali smerom hore len o $\frac{1}{2}$ „kroku“. Situáciu vidíme na obrázku:



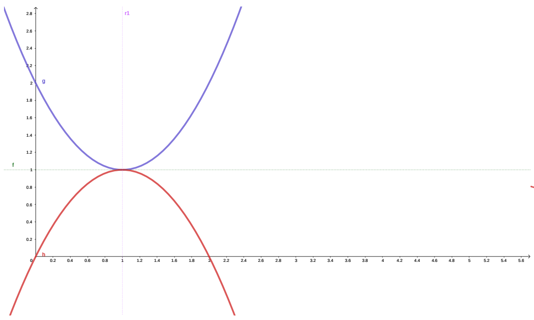


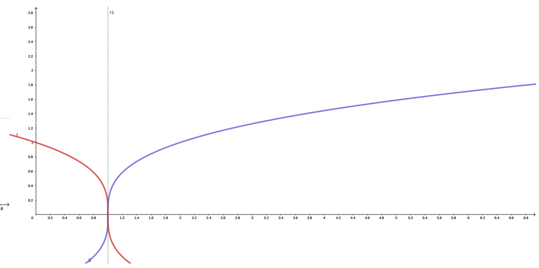
V prípade, že smernica dotyčnice je záporná, postupujeme podobne, akurát „kroky“ v $y-$ovom smere budú smerom dolu (alebo v $x-$ovom smere sa posunieme o jeden „krok“ doľava a v $y-$ovom sa posunieme o potrebné „kroky“ smerom hore). Na nasledujúcich obrázkoch máme situáciu, keď $f(1) = 0$ a $f'(1) = -2:$



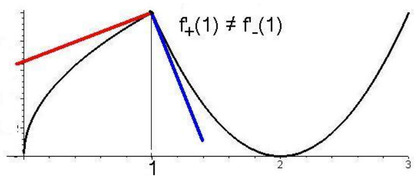


Ak je derivácia v bode x_0 rovná nule, tak dotyčnica v tomto bode je rovnobežná s osou x. V prípade, že $f'(x_0) = \infty$ alebo $f'(x_0) = -\infty$, je dotyčnica v tomto bode rovnobežná s osou y. Na nasledujúcich obrázkoch máme vľavo znázornenú situáciu, keď $f(1) = 1, f'(1) = 0$ (na obrázku sú dve rôzne funkcie, ktoré spĺňajú tieto podmienky) a na obrázku vpravo sú dve funkcie, pre ktoré platí, že $f(1) = 0$ a prvá derivácia je v bode $x = 1$ nevlastná.





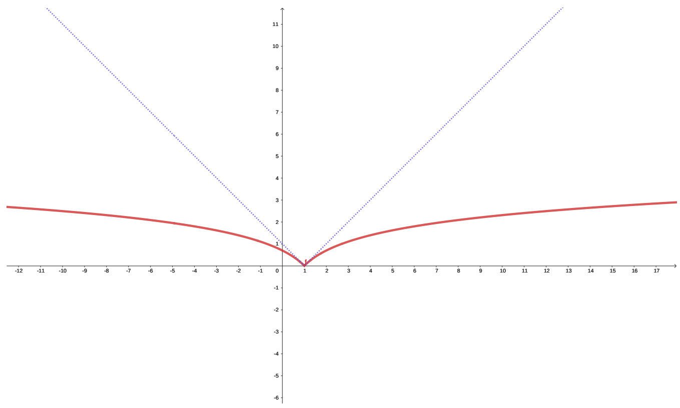
V prípade, že derivácia v bode x_0 neexistuje a existujú jednostranné derivácie, postupujeme podobne, akurát namiesto jednej dotyčnice kreslíme dve, tzv. polodotyčnice. Pre lepšiu predstavu uvádzame nasledujúci príklad funkcie s rôznymi deriváciami v bode $x = 1$:



Príklad 26 *Načrtnite graf funkcie, pre ktorú platí:*

$$f(1) = 0, f'_{-}(1) = -1, f'_{+}(1) = 1.$$

Riešenie. *Najskôr si nakreslíme funkčnú hodnotu v bode* $x = 1$*. Potom si načrtneme polodotyčnice, teda polpriamky, ktoré prechádzajú bodom* $[1, 0]$ *a prvá z nich má smernicu* $k = -1$ *a druhá má smernicu* $k = 1$*. Funkciu potom dokreslíme tak, aby prechádzala bodom* $[1, 0]$ *a v jeho najbližšom okolí sa dotýkala polotečien tak, ako to vidíme na obrázku.*



V nasledujúcej úlohe sa vrátime k úvodnému príkladu a vyriešime ho pomocou derivácie:

Príklad 27 *Vzhľadom k tomu, že derivácia v bode je smernica dotyčnice v danom bode, určíme deriváciu funkcie f v bode $x = 2$:*

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 \implies f'(2) = 4.$$

Pre rovnicu dotyčnice platí

$$y - y_0 = k.(x - x_0)$$

a

$$x_0 = 2, y_0 = 4, k = f'(x_0) = 4,$$

preto rovnica dotyčnice je

$$y - 4 = 4(x - 2) \iff y = 4x - 4.$$

Príklad 28 *Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x + 3$, ktorá je rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$.*
Riešenie. *Vieme, že rovnobežné priamky majú rovnakú smernicu, upravíme si preto rovnicu priamky na smernicový tvar:*

$$y = 3x + 5,$$

teda smernica je $k = 3$. Už vieme, že derivácia v bode je smernica dotyčnice v tomto bode, preto hľadáme na parabole bod $[x_0, y_0]$, v ktorom je derivácia $f'(x_0) = 3$. Zistíme deriváciu funkcie f v bode x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x^2 - 2x + 3) - (x_0^2 - 2x_0 + 3)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) - (2x - 2x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} - \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = 2x_0 - 2.$$

Musíme vyriešiť jednoduchú rovnicu:

$$2x_0 - 2 = 3,$$

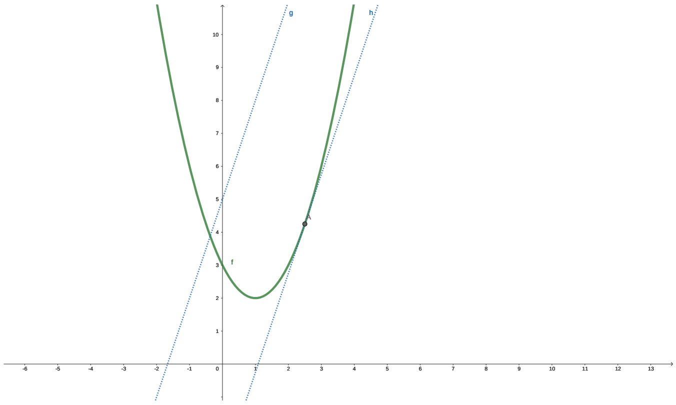
potom

$$x_0 = \frac{5}{2},\ y_0 = \frac{17}{4}.$$

Rovnica dotyčnice je

$$y - \frac{17}{4} = 3(x - \frac{5}{2}).$$

Situáciu vidíme na obrázku:



Keď sa zdokonalíme v derivovaní, tak sa k týmto typom úloh ešte vrátime.

3.2 Derivácie na intervale

Ak je funkcia f definovaná v každom bode intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v každom bode tohto intervalu deriváciu, tak potom sa na deriváciu môžeme pozerať ako na funkciu, ktorá každému $x \in \langle a, b\rangle$ priradí hodnotu $f'(x)$. Túto funkciu nazývame deriváciou funkcie f. Podobne, ako sme v predchádzajúcej kapitole odvodili deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode x_0, vieme odvodiť aj derivácie v bode pre ostatné elementárne funkcie a teda aj ich predpisy pre funkciu f' na príslušnom definičnom obore:

$(c)' = 0,$ $(x^n)' = nx^{n-1},$
$(\sin x)' = \cos x,$ $(\cos x)' = -\sin x,$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$ $(\text{arccotan } x)' = -\frac{1}{1+x^2},$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$ $(e^x)' = e^x,$
$(a^x)' = a^x \ln a,$ $(\ln x)' = \frac{1}{x},$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

Na ukážku uvedieme aspoň odvodenie predpisu pre deriváciu funkcie $\sin x$.

$$(\sin x)' = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos\frac{x_0+x_0}{2} \cdot 1 = \cos x_0.$$

Ostatné predpisy si môžete odvodiť sami, ako pekný tréning počítania limít.

Aby sme mohli derivovať aj komplikovanejšie funkcie, je potrebné poznať aj pravidlá pre derivovanie súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií:

Veta 9 *Nech funkcie f, g majú v bode x derivácie $f'(x), g'(x)$. Potom v tomto bode majú derivácie aj funkcie $f \pm g, c \cdot f, f \cdot g$ a ak $g(x) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ a platí:*

- $(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$,
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$,
- $(f(x) \cdot g(x))' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)'$,
- $\left(\frac{(f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g(x)^2} \cdot (f(x)' \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)')$.

Príklad 29 *Pomocou pravidla pre derivovanie podielu určíme deriváciu funkcie* $\tan x$. *Zrejme* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. *Potom*

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \big((\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'\big) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \big(\cos^2 x + \sin^2 x\big) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Pre derivovanie inverznej funkcie platí nasledujúca veta:

Veta 10 *Nech f a g sú navzájom inverzné funkcie. Potom*

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Príklad 30 *Predchádzajúca veta sa zvyčajne pri derivovaní nepoužíva, ale môžeme ju použiť pre odvodenie predpisu pre nejakú funkciu, ak poznáme deriváciu funkcie k nej inverznej. Už sme si odvodili predpis pre funkciu $g(x) = x^2$, vieme, že na intervale $\langle 0, \infty)$ je $f(x) = \sqrt{x}$ k nej inverzná funkcia. Potom, podľa predchádzajúcej vety, dostávame:*

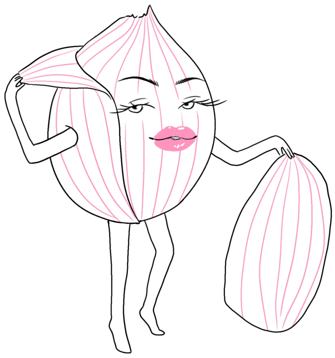
$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{2.f(x_0)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Mimoriadne dôležité je vedieť derivovať zloženú funkciu:

Veta 11 *Pre zloženú funkciu $f \circ g$ platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Techniku derivovania zloženej funkcie si ukážeme v nasledujúcich príkladoch. Musíme si vždy uvedomiť, že postupujeme od derivovania vonkajšej zložky k derivovaniu vnútornej zložky, dalo by sa to prirovnať k postupnému šúpaniu obalov cibule.



Autor obrázku: Zuzka Hliněná

Príklad 31 *Zderivujte funkciu:* $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}; |x| \leq 1.$
Riešenie. *Funkcia* f_1 *je zložená, vnútorná zložka je funkcia* $g(x) = 1 - x^2$*, vonkajšia zložka je funkcia* $h(x) = \sqrt{x}$*, potom:*

$$f_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Príklad 32 *Zderivujte funkciu:* $f_2(x) = \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^2; |x| \leq 1.$
Riešenie. *V tejto úlohe využijeme výsledok z predchádzajúceho príkladu s tým, že máme ešete jednu „vrstvu“ funkcie:*

$$f_2'(x) = 2 \cdot \left(x - \sqrt{1-x^2}\right)^1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2 \cdot \frac{(x - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2} + x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Príklad 33 *Zderivujte funkciu:* $f_3(x) = (1+2x) \cdot (3-4x^2).$
Riešenie. *Funkcia* f_3 *je súčinom funkcií* $g(x) = (1+2x), h(x) = (3-4x^2)$*, teda využijeme pravidlo pre deriváciu súčinu:*

$$f_3'(x) = 2 \cdot (3-4x^2) + (1+2x) \cdot (-8x) = -24x^2 - 8x + 6.$$

Príklad 34 *Zderivujte funkciu:* $f_4(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3).$
Riešenie. *Funkcia* f_4 *je súčinom dokonca troch funkcií, postupovať budeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe:*

$$f_4'(x) = 1 \cdot (x-2) \cdot (x-3) + (x-1) \cdot 1 \cdot (x-3) + (x-1) \cdot (x-2) \cdot 1 =$$

$$x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4x + 3 + x^2 - 3x + 2 = 3x^2 - 12x + 11.$$

Príklad 35 *Zderivujte funkciu:* $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Riešenie. *Funkcia* f_5 *je podiel funkcií* $g(x) = x$ *a* $h(x) = \sqrt{1+x^2}$, *navyše funkcia* h *je zložená.*

$$f_5'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2})' \cdot x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Príklad 36 *Zderivujte funkciu:* $f_6(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
Riešenie. *Úlohu budeme riešiť dvoma spôsobmi.*

1. *Uvedomíme si, že* $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$ *Potom*

$$f_6'(x) = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)' = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \textit{pre } x > 0$$

2. *Ďalšia možnosť je pomocou tzv. logaritmického derivovania. Zrejme*

$$f_6(x) = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f_6(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f_6(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x.$$

Po zderivovaní funkcie $\ln f_6(x)$ *dostaneme*

$$\frac{f_6'(x)}{f_6(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f_6'(x) = f_6(x) \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f_6'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \textit{pre } x > 0.$$

Na záver sa vrátime k úlohám o dotyčniciach.

Príklad 37 *Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x) = \ln(x+1)$ *v jej bode* $A = [0, ?]$.
Riešenie. *Vieme, že derivácia v bode je smernica dotyčnice v danom bode, preto*

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \implies f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Pre rovnicu dotyčnice platí

$$y - y_0 = k.(x - x_0)$$

a

$$x_0 = 0, y_0 = \ln(0+1) = \ln 1 = 0, k = f'(x_0) = 1,$$

preto rovnica dotyčnice je

$$y - 0 = 1(x - 0) \iff y = x.$$

Potom rovnica normály je $y = -x$.

Príklad 38 *Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie* $f(x) = \ln\frac{x}{x+1}$ *rovnobežnú s priamkou* $x - 2y = 7$.
Riešenie. *Najskôr určíme smernicu priamky*

$$x - 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Budeme hľadať bod dotyku, teda bod x_0*, pre ktorý platí* $f'(x_0) = \frac{1}{2}$. *Funkciu zderivujeme*

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Aby sme našli bod x_0*, stačí vyriešiť rovnicu*

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2} \iff x(x+1) = 2 \iff x^2+x-2 = 0 \iff (x+2)\cdot(x-1) = 0.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice sú $x_a = -2, x_b = 1$. *Ak* x_a *aj* x_b *patria do definičného oboru funkcie* f*, tak dostaneme dve dotyčnice. To zistíme buď určením definičného oboru, alebo priamym dosadením, my si vyberieme tú druhú možnosť. Zrejme*

$$f(x_a) = f(-2) = \ln\frac{-2}{-2+1} = \ln 2, f(x_b) = f(1) = \ln\frac{1}{1+1} = \ln\frac{1}{2}.$$

Potom rovnice dotyčníc sú:

$$t_a\colon y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x+2), \quad t_b\colon y - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1).$$

Príklad 39 *Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie* $f(x) = \sqrt[3]{x^3-8}$ *v jej bode* $A = [2, ?]$.
Riešenie. *Vieme, že derivácia v bode je smernica dotyčnice v danom bode, preto*

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x^3-8)^{\frac{2}{3}}} \implies f'(2) = \frac{2^2}{(2^3-8)^{\frac{2}{3}}}.$$

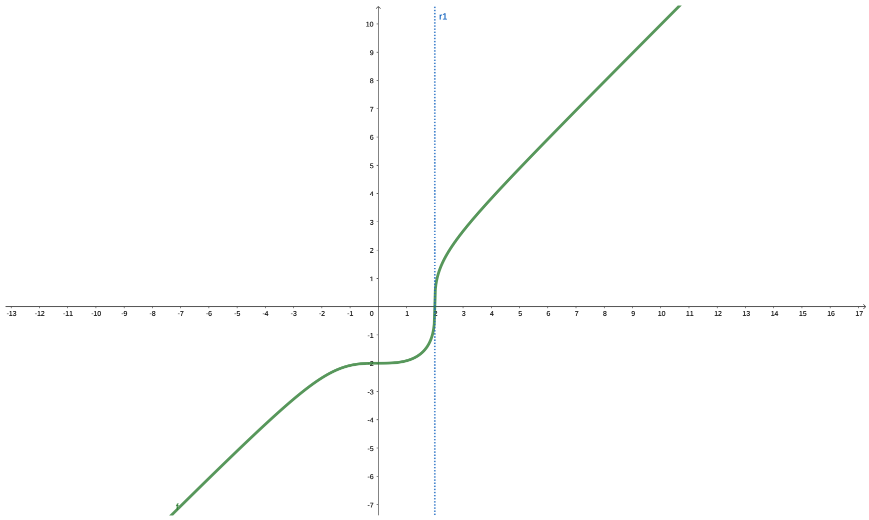
Vidíme, že menovateľ je nulový, to znamená, že hodnotu $x = 2$ *dosadiť nemôžeme. Situácia však nie je neriešiteľná, ani to neznamená, že v tomto bode derivácia neexistuje, môže byť nevlastná. Aby sme to zistili, vypočítame limitu v tomto bode.*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{(x^3-8)^{\frac{2}{3}}} = +\infty.$$

Teda derivácia je v tomto bode nevlastná a preto rovnica dotyčnice je

$$x = 2.$$

Potom rovnica normály je $y = 0$. Situáciu vidíme na obrázku:



Úlohy:

1. **Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v bode A**

   (a) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}, A = [2, ?]$. Výsledok: $y = 4 - x$.

   (b) $f(x) = \ln(x + 1), A = [0, ?]$. Výsledok: $y = x$.

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}, A = [1, ?]$. Výsledok: $x = 1$.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$, $A = [-\frac{2}{3}, ?]$. Výsledok: $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$, $A = [-1, ?]$. Výsledok: $x = -1$.

2. **Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f rovnobežnú s priamkou p**

   (a) $f(x) = x^3 - 3x, p$ je o_x. Výsledok: $y = -2, y = 2$.

   (b) $f(x) = \ln x, p$ je dána rovnicí $2x - y - 3 = 0$. Výsledok: $y = 2x - 1 - \ln 2$.

   (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, p$ je o_x. Výsledok: $y = \frac{1}{e}$.

   (d) $f(x) = \ln \frac{x^2+2x+5}{2x}, p$ je o_x. Výsledok: $y = \ln \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

3. **Zderivujte**

   (a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$. Výsledok: $\frac{7}{8x^{\frac{1}{8}}}$.

   (b) $f(x) = (x^3 + 8)(x - 2)$. Výsledok: $4x^3 - 6x^2 + 8$.

   (c) $f(x) = \frac{(x^3+8)}{(x-2)}$. Výsledok: $x + 1$.

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$. Výsledok: $-\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{(1-\sqrt{x})^5}{1+\sqrt{x}}}}$.

(e) $f(x) = \ln\frac{5+4x}{3+7x}$. Výsledok: $\frac{-23}{(5+4x)\cdot(3+7x)}$.

(f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Výsledok: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(g) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$. Výsledok: $\frac{1}{\left(\sqrt{3}-x\sqrt{7}\right)^2}$.

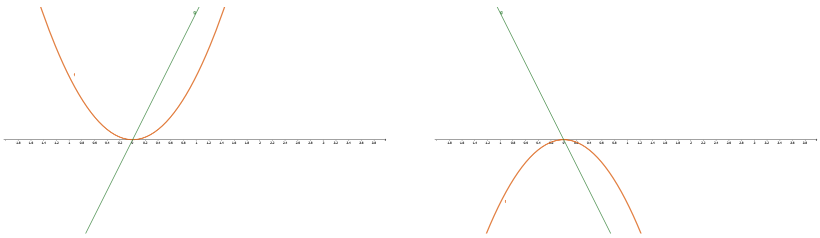
(h) $f(x) = e^{-x^2}$. Výsledok: $-2e^{-x^2}\cdot x$.

(i) $f(x) = x^{\ln x}$. Výsledok: $x^{\ln x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\ln x$.

(j) $f(x) = x^{\sin x}$. Výsledok: $x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$.

3.3 Geometrický význam derivácií na intervale

Už vieme, že derivácia funkcie f v bode x_0 je smernica dotyčnice v tomto bode. Vzhľadom k tomu, že smernica priamky je tangens uhla, ktorý priamka zviera s osou x, je zrejmé, že ak je smernica kladná, tak priamka priamka zviera s osou x uhol menší ako $\frac{\pi}{2}$, ak je záporná, tak je uhol väčší ako $\frac{\pi}{2}$. Rovnicu dotyčnice s nenulovou smernicou môžeme chápať ako lineárnu funkciu. A teda pre kladnú smernicu dostávame rastúcu a pre zápornú klesajúcu lineárnu funkciu. A preto, ak má funkcia f na nejakom intervale v každom bode dotyčnicu s kladnou (zápornou) smernicou, tak je funkcia f na tomto intervale rastúca (klesajúca). Názornú ukážku vidíme na obrázku, kde sú červenou farbou nakreslené funkcie a zelenou farbou ich derivácie.



Keďže prvú deriváciu na intervale chápeme ako funkciu, dáva zmysel definovať aj jej deriváciu:

Definícia 17 *Ak je f' deriváciou funkcie f na otvorenom intervale a f' má na tomto intervale deriváciu, potom túto deriváciu nazývame* **deriváciou druhého rádu,** *alebo tiež* **druhou deriváciou** *funkcie f a zapisujeme f''. Rekurzívne definujeme* **deriváciu $n-$tého rádu**, *alebo tiež* **$n-$tou deriváciu** *ako*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Druhá derivácia má peknú geometrickú interpretáciu. Najskôr si však zopakujeme definíciu konvexnosti a konkávnosti funkcie:

Definícia 18 *Nech f je funkcia spojitá na intervale (a, b). Potom hovoríme, že funkcia f je na intervale (a, b) konvexná práve vtedy, keď pre všetky $\lambda \in (0, 1)$ platí*

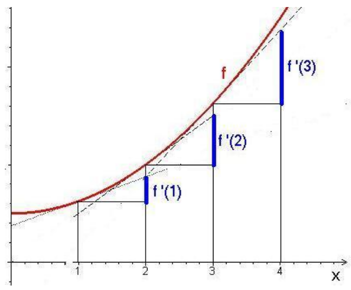
$$\forall x, y \in (a, b)\colon x < y \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Funkcia f je na intervale (a, b) konkávna práve vtedy, keď pre všetky $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$\forall x, y \in (a, b)\colon x < y \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Tieto definície sa dajú zjednodušene vysvetliť tak, že ak spojíme úsečkou ľubovoľné dva body grafu konvexnej (konkávnej) funkcie, tak body grafu medzi týmito bodmi ležia vždy pod (nad) spojnicou spomínaných bodov. Spojitú konvexnú (konkávnu) funkciu na intervale (a, b), môžeme popísať aj pomocou dotyčníc a to tak, že jej graf leží nad (pod) každou jej zostrojenou dotyčnicou.

Na predchádzajúcom obrázku je vľavo konvexná a vpravo konkávna funkcia (obe červenou farbou). Na tomto obrázku si môžeme zároveň všimnúť, že v prípade konvexnej funkcie je jej prvá derivácia (zakreslená zelenou farbou) rastúca funkcia a v prípade konkávnej funkcie (obrázok vpravo) je derivácia klesajúca funkcia. Toto nie je náhoda. Nasledujúci obrázok nám detailne popisuje situáciu pre konvexnú funkciu a rastúcu tendenciu smerníc dotyčníc v jej bodoch:

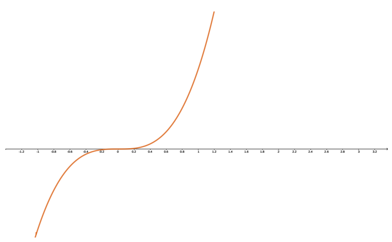


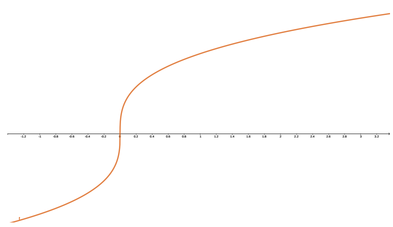
To znamená, že ak je funkcia f konvexná, jej prvá derivácia je rastúca, potom jej derivácia, teda druhá derivácia pôvodnej funkcie, je kladná. Analogicky, ak je funkcia konkávna, tak jej druhá derivácia je záporná.

Na záver si ešte vysvetlíme nový pojem:

Definícia 19 *Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x_0, hovoríme, že bod x_0 je* **inflexný bod** *funkcie f ak existuje $\varepsilon > 0$ okolie tak, že na intervale $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ je funkcia konkávna a na intervale $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ je funkcia konvexná (alebo naopak).*

Na nasledujúcich obrázkoch máme dve funkcie, ktoré majú inflexné body.





Túto definíciu si pomocou dotyčnice môžeme vysvetliť aj tak, že bod x_0 je inflexným bodom funkcie, ak pre jeho dotyčnicu platí, že naľavo od neho je funkcia pod dotyčnicou a napravo od x_0 nad dotyčnicou, alebo naopak. To znamená, že existencia inflexného bodu bude súvisieť s druhou deriváciou funkcie.

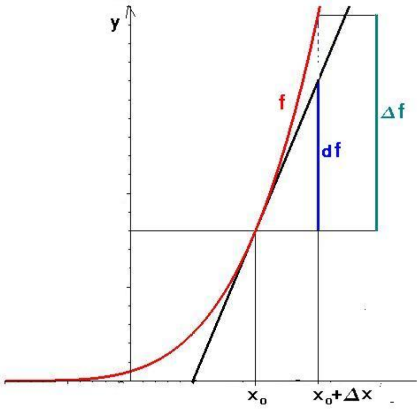
Veta 12 *Ak x_0 je inflexný bod $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ alebo $f''(x_0)$ neexistuje.*

3.4 Linearizácia a Taylorov polynóm

V tejto časti sa budeme venovať aplikácii diferenciálneho počtu pri aproximácií funkcií. Najskôr si vysvetlíme pojem diferenciálu:

Definícia 20 *Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0. Potom funkciu $f'(x_0) \cdot h$ premennej $h \in \mathbb{R}$ nazývame* **diferenciál funkcie.**

Geometrický význam diferenciálu vidíme na nasledujúcom obrázku, jedná sa o prírastok po dotyčnici. Ak budeme o dotyčnici uvažovať ako o lineárnej funkcii, tak diferenciál je hodnota, o ktorú sa zmení funkčná hodnota tejto lineárnej funkcie, ak sa od bodu dotyku posunieme dlžku h.



Z obrázku vidíme, že na istom okolí bodu x_0 by sme pôvodnú funkciu mohli nahradiť dotyčnicou. Vieme, že rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

teda na pravej strane máme polynóm prvého stupňa a tento polynóm má dve špecáilne vlastnosti. Ak si tento polynóm označíme ako $p(x)$, teda $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tak

$$p(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0),$$

dokonca sa dá ukázať, že je to jediný polynóm, ktorý má tieto dve vlastnosti. Vzhľadom k tomu, že je to polynóm prvého stupňa, hovoríme o linearizácii, teda o nahradení pôvodnej funkcie lineárnou funkciou.

Ak je funkcia f $n-$krát diferencovateľná v bode x_0, potom vieme pojem diferenciálu rozšíriť a predpisom

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0).(x - x_0)^n$$

je daný **diferenciál n-tého rádu** funkcie f v bode x_0. A podobne, ako sme pomocou diferenciálu prvého rádu mohli funkciu f linearizovať, tak ju vieme nahradiť na vhodnom intervale aj polynómom vyššieho stupňa.

Definícia 21 **Taylorovým polynómom** *funkcie f v bode x_0 nazývame polynóm*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Pre $x_0 = 0$ se T_n nazýva **Maclaurinov polynóm***.*

Veta 13 *Ak funkcia f je $(n+1)-$ krát diferencovateľná na nejakom okolí bodu x_0, potom pre body toho okolia platí:*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x);$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \vartheta = x_0 + a(x - x_0); 0 < a < 1.$$

Poznámka 13 *Hodnota $R_{n+1}(x)$ je chyba, ktorej sa dopustíme, ak funkciu na danom intervale nahradíme polynómom T_n.*

Tieto pojmy si ozrejmíme v nasledujúcich úlohách.

Príklad 40 *Napíšte Taylorov polynóm 7. stupňa pre funkciu $f(x) = \sin x$ v bode $x_0 = 0$.*
Riešenie. *Zrejme*

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots$$

Vidíme, že

$$f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(x).$$

Určíme hodnoty derivácií v bode $x_0 = 0$:

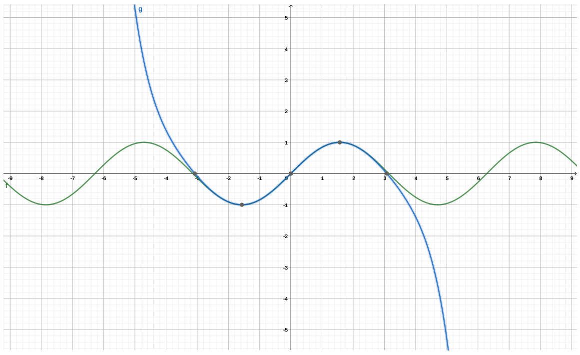
$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \ldots$$

Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm

$$T_7(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}(x - x_0)^7 = 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \cdots + \frac{-1}{7!}(x - 0)^7 =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Aproximáciu týmto polynómom vidime na obrázku:



Ešte určíme chybu, ktorej sa pri takejto aproximácii dopustíme:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \vartheta = x_0 + a(x-x_0); 0 < a < 1$$

V našom prípade máme $n = 7, x_0 = 0$, *potom*

$$R_{7+1}(x) = \frac{f^{(7+1)}(\vartheta)}{(7+1)!}(x-x_0)^{7+1} = \frac{\sin(\vartheta)}{8!}x^8.$$

Vzhľadom na ohraničenosť funkcie $\sin x$ *dostávame pre* $R_8(x)$ *nasledujúci vzťah:*

$$|R_8(x)| \leq \frac{1}{8!}.x^8,$$

teda pokiaľ budeme „blízko“ nuly, tak chyba bude pomerne „malá“, čo sme mali možnosť vidieť aj na obrázku.

Príklad 41 *Napíšte Taylorov polynóm* 5. *stupňa pre funkciu* $f(x = e^x \cdot \sin x$ *v bode* $x_0 = 0$.
Riešenie. *Zrejme*

$$f(x) = e^x \cdot \sin x, f'(x) = e^x(\sin x + \cos x), f''(x) = 2e^x \cos x, f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x),$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \cdot \sin x, f^{(5)}(x) = -4e^x(\sin x + \cos x)$$

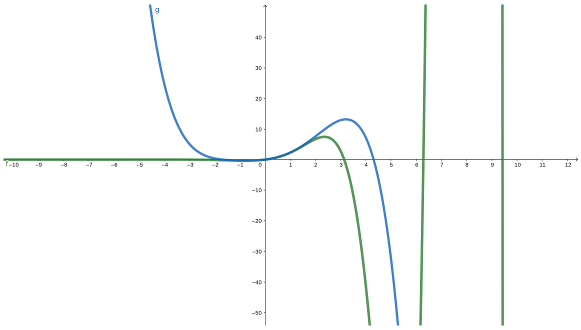
Určíme hodnoty derivácií v bode $x_0 = 0:$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = -4.$$

Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm

$$T_5(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{-4}{!} \cdot x^5 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5.$$

Aproximáciu týmto polynómom vidime na obrázku (zelená je $e^x \cdot \sin x$, modrá je jej aproximácia):



Príklad 42 *Napíšte Taylorov polynóm $n-$tého stupňa pre funkciu $f(x) = \ln(1+2x)$ v bode $x_0 = 0$.*
Riešenie. *Zrejme*

$$f(x) = \ln(1+2x), f'(x) = 2 \cdot (1+2x)^{-1}, f''(x) = -2^2 \cdot (1+2x)^{-2},$$

$$f'''(x) = 2^3 \cdot 2(1+2x)^{-3}, f^{(4)}(x) = -2^4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+2x)^{-4},$$

potom

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!2^n.(1+2x)^{-n}.$$

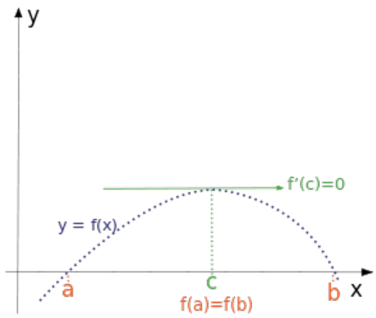
Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm

$$T_n(x) = 0 + 2x - \frac{4}{2} \cdot x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^3 - \frac{16}{4} \cdot x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n} \cdot x^n.$$

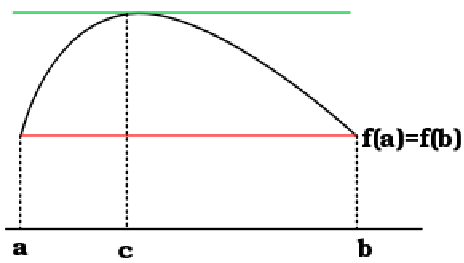
3.5 Derivácie a výpočet limít

Pri počítaní limít sme často narazili na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. My si teraz ukážeme efektívnejší spôsob výpočtu limít uvedených podielov. Predtým zhrnieme niekoľko tvrdení, bez dôkazu. Pre lepšie pochopenie je za väčšinou z nich názorný obrázok.

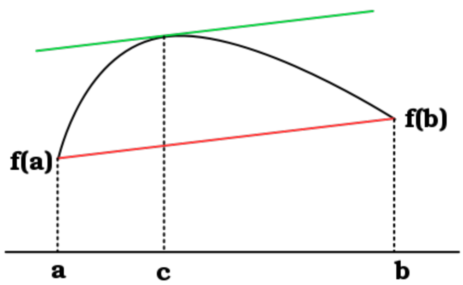
Veta 14 (Fermatova veta) *Nech f je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$, ktorá v bode $\psi \in (a, b)$ nadobúda svoju najväčšiu (alebo najmenšiu) hodnotu. Potom, ak existuje $f'(\psi)$, tak $f'(\psi) = 0$.*



Veta 15 (Rolleova veta) *Nech f je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$, ktorá je f diferencovateľná na (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje bod $\psi \in (a, b)$ tak, že $f'(\psi) = 0$.*



Veta 16 (Lagrangeova veta) *Nech f je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$, ktorá je f diferencovateľná na (a, b). Potom existuje bod $\psi \in (a, b)$ tak, že $f'(\psi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*



Veta 17 (Cauchyho veta) *Nech $f(x), g(x)$ majú nasledujúce vlastnosti:*

- *f, g sú spojité na $\langle a, b\rangle$,*
- *f, g sú diferencovateľné na (a, b),*

- *pro všetky $x \in (a,b)$, je $g'(x) \neq 0$.*

Potom existuje bod $\psi \in (a,b)$ tak, že $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)}$.

Od Cauchyho vety je už len krôčik k zjednodušeniu výpočtu limít typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Veta 18 (Prvé l'Hospitalovo pravidlo) *Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú diferencovateľné na nejakom okolí bodu c. Nech $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Nech existuje $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná.) Potom existuje aj $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Veta 19 (Druhé l'Hospitalovo pravidlo) *Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú diferencovateľné na nejakom okolí bodu c. Nech je $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = \lim\limits_{x \to c} |g(x)| = \infty$. Nech existuje $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná.) Potom existuje aj $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 14 *Podobné vety platia aj pre $\lim\limits_{x \to c^-}$ a pre jednostranné limity. V prípade $c = \pm\infty$ použijeme substitúciu $t = \frac{1}{x}$.*

Aplikovanie l'Hospitalových pravidiel si vyskúšame na príkladoch. Prvý príklad je ukážkou toho, že vždy treba overiť, či sú splnené predpoklady pre použitie l'Hospitalovho pravidla:

Príklad 43 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+3}$.

Riešenie. *Po dosadení $x = 1$ vidíme, že sa nejedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, ani $\frac{\infty}{\infty}$ a preto nemôžeme použiť ani jedno l'Hospitalovo pravidlo. Zrejme*

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0.$$

Keby sme bez tejto kontroly použili l'Hospitalovo pravidlo, tak by sme dostali nesprávny výsledok, vyšlo by nám 2.

Príklad 44 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Riešenie. *Po dosadení $x = 0$ vidíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ a preto môžeme použiť prvé l'Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Príklad 45 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.
Riešenie. *Po dosadení $x = 0^+$ vidíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a preto môžeme použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Príklad 46 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1-x}$.
Riešenie. *Po dosadení $x = 0$ vidíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ a preto môžeme použiť prvé l'Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x - 1 - x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}.$$

Po dosadení $x = 0$ opäť vidíme, že sme dostali limitu typu $\frac{0}{0}$ a preto môžeme znovu použiť prvé l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)'}{\left(e^x - 1\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = 2.$$

Príklad 47 *Vypočítajte:* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$.
Riešenie. *Vidíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a preto môžeme použiť druhé l'Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(2^x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x}.$$

Opäť vidíme, že sme dostali limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a preto môžeme znovu použiť druhéé l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(2^x \ln 2\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{2} = +\infty.$$

Úlohy:

1. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$. Výsledok: $\frac{2}{3}$
2. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Výsledok: 0
3. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1}$. Výsledok: 0
4. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$. Výsledok: $\frac{3}{2}$
5. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$. Výsledok: 1

6. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$. Výsledok: 2

7. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x}$. Výsledok: 0

8. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{1-\cos x}$. Výsledok: 2

9. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$. Výsledok: 6

10. Vypočítajte: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2-\sin x}$. Výsledok: 0

3.6 Lokálne extrémy

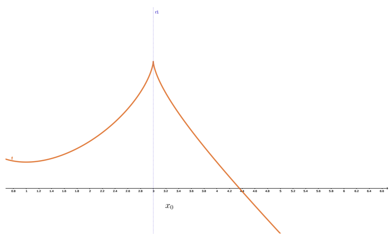
V tejto časti sa budeme venovať dôležitej aplikácii diferenciálneho počtu a to konkrétne optimalizácii. Vysvetlíme si napr., ako hľadať najmenšie, resp. najväčšie hodnoty funkcií.

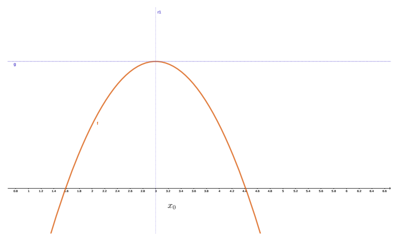
Najskôr si objasníme pojmy lokálne maximum a lokálne minimum:

Definícia 22 *Funkcia f má v bode x_0* **lokálne maximum (minimum)** *ak existuje okolie $\mathcal{U}(x_0) \subset D_f$ také, že*

$$x \in \mathcal{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Lokálne maximá a minimá nazývame spoločným pojmom lokálne extrémy. Z definície lokálnych extrémov vyplýva, že ak má funkcia v bode x_0 napr. lokálne maximum, tak musí existovať nejaké okolie tohto bodu, na ktorom má bod x_0 zo všetkých bodov tohto okolia najväčšiu hodnotu. Ak je navyše funkcia na tomto okolí diferencovateľná, tak podľa Fermatovej vety je v bode x_0 prvá derivácia rovná nule. My už vieme, že napriek tomu, ze funkcia je v bode spojitá, nemusí byť v tomto bode diferencovateľná a práve aj tieto body môžu byť z pohľadu lokálnych extrémov zaujímavé. Na nasledujúcich obrázkoch máme dve funkcie, obe v bode x_0 nadobúdajú lokálne maximum, pričom v prvom prípade je $f'(x_0) = 0$ a v tom druhom prípade prvá derivácia v bode x_0 neexistuje.



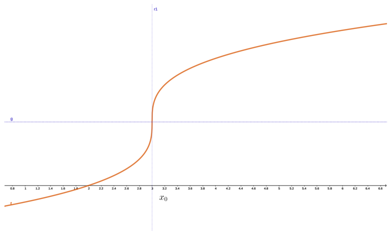
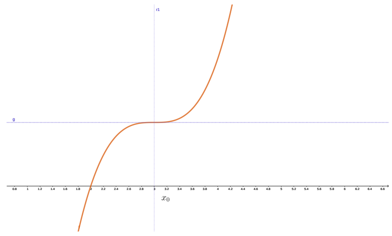


Teraz už asi nikoho neprekvapí nasledujúca veta:

Veta 20 *Ak f má v x_0 extrém, tak $f'(x_0) = 0$ alebo $f'(x_0)$ neexistuje.*

Definícia 23 *Bod x_0, v ktorom je $f'(x_0) = 0$ sa nazýva* **stacionárny bod.**

Predchádzajúca veta sa však nedá otočiť, čo vidíme na nasledujúcich obrázkoch, kde v bode x_0 máme namiesto extrému infexný bod.

Ak si dobre pozrieme obrázky s funkciami, kde v x_0 boli extrémy a porovnáme ich s tými, kde v x_0 boli inflexné body, tak by sme si mohli uvedomiť, že hlavný a zároveň rozhodujúci rozdiel je v tom, že ak je v bode x_0 maximum, tak funkcia naľavo od x_0 rastie a napravo od x_0 klesá, ale v prípade inflexného bodu sa monotónnosť v bode x_0 nezmenila. Preto, ak budeme hľadať lokálne extrémy, tak najskôr nájdeme body, v ktorých je prvá derivácia nulová, alebo neexistuje, tzv. body podozrivé z extrému. Potom sa pozrieme na monotónnosť funkcie, teda si určíme znamienko prvej derivácie. Lokálne extrémy bude mat funkcia len v tých podozrivých bodoch, v ktorých sa zmení znamienko prvej derivácie. Ostatné podozrivé body môzžeme vylúčiť. Túto dôležitú tému si teraz ešte objasníme pri riešení príkladov:

Príklad 48 *Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$.*

Riešenie. *Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak $D_f = \mathbb{R}$. Lokálne extrémy sú v bodoch, pre ktoré je $f'(x) = 0$ alebo kde $f'(x)$ neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie f.*

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(x^2 - x\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 - x\right)' =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x \cdot (x-1))^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1).$$

Zrejme $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ a $f'(x)$ neexistuje pre $x \in \{0, 1\}$. Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly: $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, \infty)$. Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:

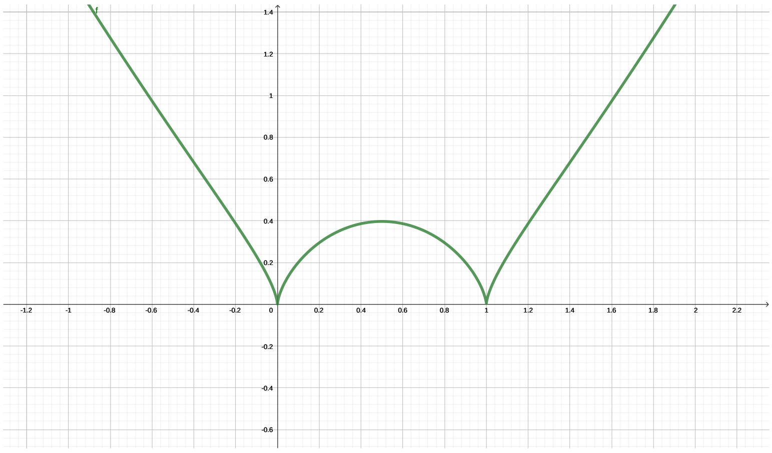
- $f'(x) > 0$ *pre* $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *a pre* $x \in (1, \infty)$.
- $f'(x) < 0$ *pre* $x \in (-\infty, 0)$ *a pre* $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

To znamená, že funkcia f:

- *rastie na intervale* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ *a* $(1, \infty)$,
- *klesá na intervale* $(-\infty, 0)$ *a* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Funkcia vľavo od bodu 0 *klesá, napravo od bodu* 0 *rastie, preto je v bode* 0 *lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode* $\frac{1}{2}$ *je lokálne maximum a v bode* 1 *lokálne minimum.*

Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si obe lokálne minimá a porovnajte s lokálnym maximom-v bodoch, v ktorých má funkcia lok. minimá derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia rovná nule.

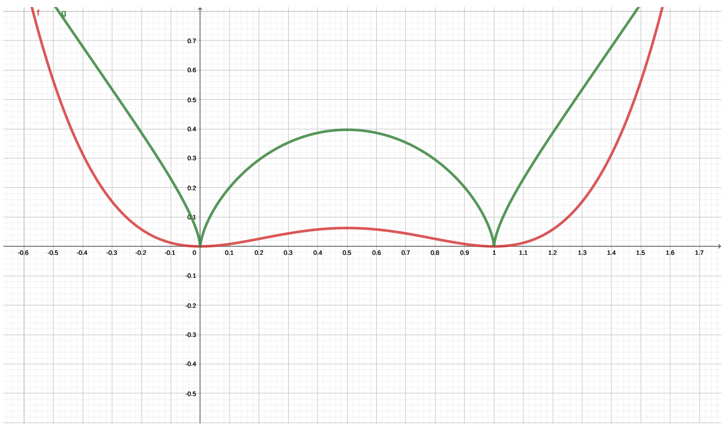


Teda lokálne minimá sú v bodoch $x_1 = 0$ *a* $x_2 = 1$, *ich hodnota je* $f(0) = f(1) = 0$. *Lokálne maximum je v bode* $x_3 = \frac{1}{2}$ *a jeho hodnota je* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

Pozor, dosadzujeme do pôvodnej funkcie f.

Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov:

Vzhľadom k tomu, ze $\sqrt[3]{x}$ *je rastúca funkcia, tak funkcie* $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$ *a* $g(x) = (x^2 - x)^2$ *majú lokálne extrémy v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.*

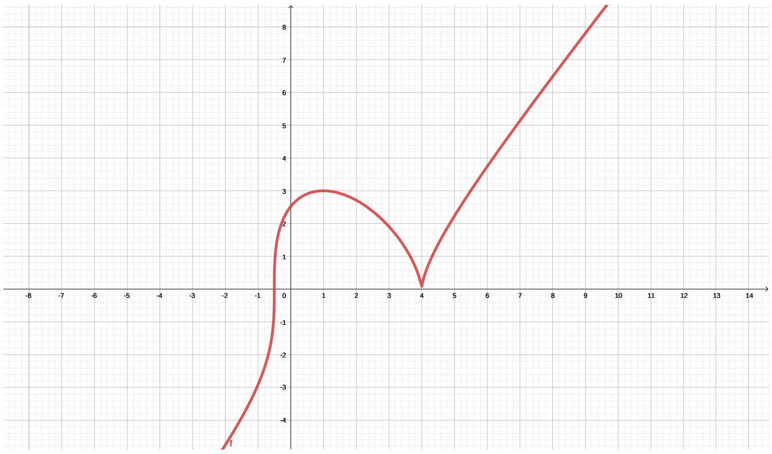


Funkcie f a g majú lokálne extrémy v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu g je jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie. Prekonajte svoju lenivosť a vyskúšajte si to.

Príklad 49 *Nájdite lokálne extrémy funkcie* $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)\cdot(x-4)^2}$.
Riešenie.

- *Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Lokálne extrémy sú v bodoch, pre ktoré je* $f'(x) = 0$ *alebo kde* $f'(x)$ *neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie* f.
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}\cdot\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)' =$$
$$= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(2\,(x-4)^2 + (2x+1)\cdot 2(x-4)\right) =$$
$$= \frac{2\cdot(x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-4)^{\frac{1}{3}}}.$$
- *Zrejme* $f'(x) = 0 \iff x = 1$ *a* $f'(x)$ *neexistuje pre* $x \in \{-\frac{1}{2}, 4\}$.
- *Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly:* $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), (1, 4), (4, \infty)$.
- *Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:*
  - $f'(x) > 0$ *pre* $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, *pre* $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *a pre* $x \in (4, \infty)$.
  - $f'(x) < 0$ *pre* $x \in (1, 4)$.
- *To znamená, že funkcia* f*:*
  - *rastie na intervale* $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *a* $(4, \infty)$.
  - *klesá na intervale* $(1, 4)$.
- *Funkcia vľavo od bodu 4 klesá, napravo od bodu 4 rastie, preto je v bode 4 lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode 1 je lokálne maximum a v bode* $-\frac{1}{2}$ *nie je ani lokálne minimum, ani lok. maximum (funkcia vpravo, aj vľavo od* $-\frac{1}{2}$ *rastie).*

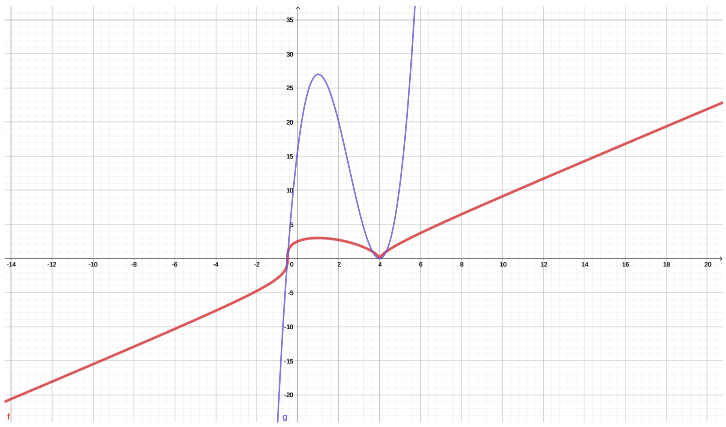
Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si lokálne minimum a porovnajte s lokálnym maximom-v bode, v ktorom má funkcia lok. minimum derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia rovná nule. A všimnite *si funkciu v bode* $-\frac{1}{2}$, *tam derivácia tiež neexistuje a nie je v ňom ani extrém.*



Teda lokálne minimum je v bode $x_1 = 4$ *a jeho hodnota je* $f(4) = 0$.
Lokálne maximum je v bode $x_2 = 1$ *a jeho hodnota je* $f(1) = 3$.

Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov:

Vzhľadom k tomu, ze $\sqrt[3]{x}$ *je rastúca funkcia, tak funkcie* $\color{red}{f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)\cdot(x-4)^2}}$ *a* $\color{blue}{g(x) = (2x+1)\cdot(x-4)^2}$ *majú lokálne extrémy v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.*



Fukcie f *a* g *majú lokálne extrémy v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu* g *je určite jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie.*

Úlohy:

1. $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1)\cdot(x+2)^2}$,
   [lok.max. v bode -2, lok. min. v bode $-\frac{8}{9}$]
2. $f_2(x) = \sqrt{|6x - x^2|}$,
   [lok.max. v bode 3, lok. min. v bodoch 0 a 6]

3. $f_3(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
[bez lok. extrémov]

4. $f_4(x) = x^3 - 2|x|$.
[lok.max. v bode 0, lok. min. v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}$]

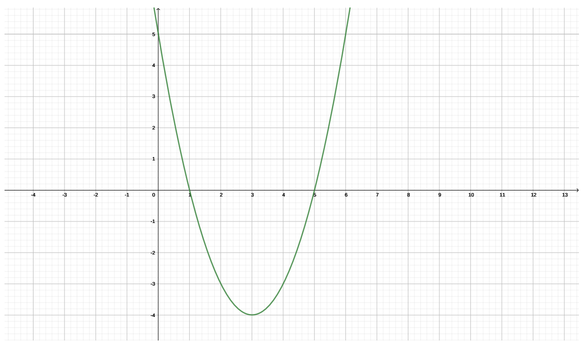
3.7 Globálne extrémy

V tejto časti sa budeme venovať hľadaniu najväčšej a najmenšej hodnoty funkcie na množine. Množinou bude zvyčajne uzavretý interval. Weierstrassova veta nám zaručuje existenciu maxima a minima spojitej funkcie f na uzavretom intervale. Teda už vieme, že najväčšia aj najmenšia hodnota spojitej funkcie f na množine existuje. Takéto hodnoty sa nazývajú globálne extrémy funkcie.

Funkcia môže tieto extrémy nadobudnúť buď v krajných bodoch intervalu, alebo v nejakých vnútorných bodoch intervalu. Otázka je, v ktorých vnútorných bodoch by tieto extrémy funkcia mohla nadobnúť. Po skúsenostiach s lokálnymi extrémami, je zrejmé, že sa stačí zamerať len na tie vnútorné body, v ktorých funkcia nadobúda lokálne extrémy.

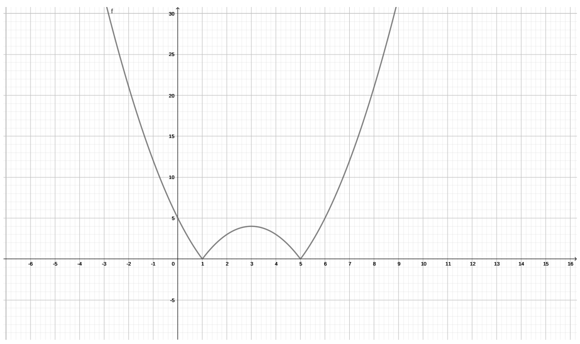
Takže podobne ako pri hľadaní lokálnych extrémov, najskôr nájdeme tie body, v ktorých je prvá derivácia funkcie f nulová, alebo neexistuje. Potom z nich vyberieme len tie, ktoré sú vnútornými bodmi daného intervalu (množiny). A na záver vypočítame funkčné hodnoty v týchto bodoch a v krajných bodoch intervalu. Tieto hodnoty porovnáme a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

Príklad 50 *Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie* $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ *na intervale* $\langle -5, 5 \rangle$.
Riešenie. *Zrejme* $f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-5)(x-1)|$. *Úlohu vyriešime graficky, najskôr nakreslíme graf funkcie* $g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$*:*



Vrchol tejto paraboly je v bode $x = 3$.

Teraz si nakreslíme graf funkcie $f(x) = |g(x)|$*:*



Úlohu vyriešime bez toho, aby sme museli funkciu derivovať. Zrejme body, v ktorých by funkcia f *mohla nadobudnúť najväčšiu a najmenšiu hodnotu sú krajné body intervalu, teda* -5 *a* 5 *a potom body, v ktorých je derivácia nulová, alebo neexistuje. Z priebehu funkcie je zrejmé, že derivácia neexistuje v bodoch* 1 *a* 5*. Derivácia je nulová v bode* 3*. Teraz stačí porovnať funkčné hodnoty v týchto bodoch a vybrať najväčšiu a najmenšiu hodnotu. Najmenšia hodnota je* 0 *a funkcia ju nadobúda v bodoch* 1 *a* 5*, najväčšiu hodnotu nadobúda v bode* -5 *a a je to hodnota* 60*.*

Príklad 51 *Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *na intervale* $\langle -2, 1\rangle$*.*
Riešenie.

Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-3)(x-1).$$

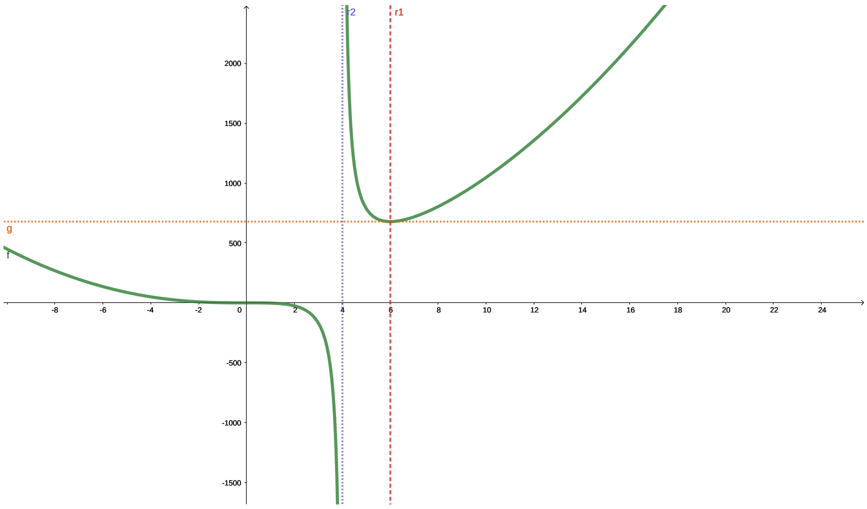
Derivácia existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$*. Teda "podozrivé"body sú*

- *krajné body intervalu:* $-2, 1$,
- *body, kde je prvá derivácia nulová:* $0, 1, 3$.

Zrejme $3 \notin \langle -2, 1\rangle$*, preto sa ním ďalej nebudeme zaoberať a svoju pozornosť sústredíme len na body* $-2, 0, 1$*. V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.*

$$f(-2) = -151, f(0) = 1, f(1) = 2.$$

Takže funkcia f *nadobúda najmenšiu hodnotu v bode* $x = -2$ *a je to hodnota* -151 *a najväčšiu hodnotu v bode* $x = 1$ *a je to hodnota* 2*. Situáciu si môžeme* *aj graficky znázorniť.*



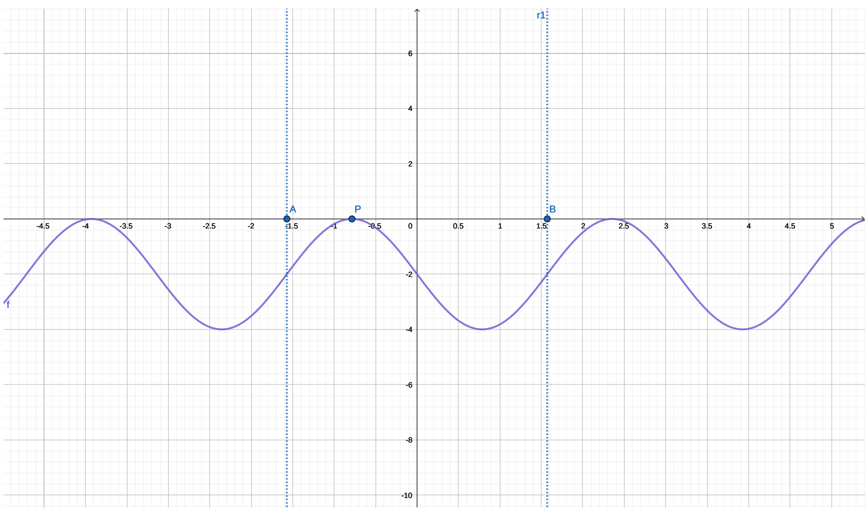
Príklad 52 *Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie* $f(x) = \cos 2x - 2x$ *na intervale* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Riešenie.

Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2 = -2(\sin(2x) + 1).$$

Derivácia existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$. *Graf prvej derivácie na danom intervale je takýto.*



Zrejme $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}$. *Bod, v ktorom je* $f'(x) = 0$ *vieme určiť aj výpočtom.*

$$f'(x) = -2(\sin(2x) + 1) \ \text{a} \ f'(x) = 0 \iff \sin(2x) = -1.$$

Zrejme $\sin 2x = -1 \iff 2x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
Potom $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
Vzhľadom k tomu, že úlohu riešime len na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, *máme jediné riešenie:*

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}.$$

Teda "podozrivé"body sú:

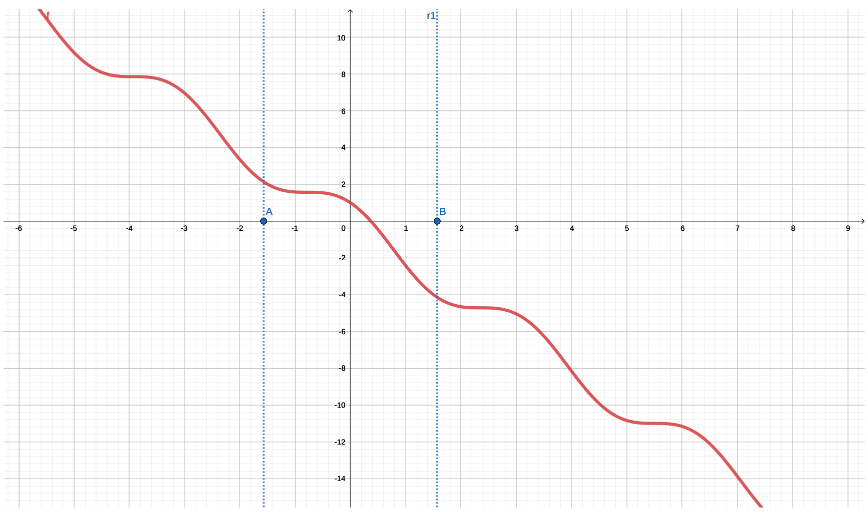
- *krajné body intervalu:* $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,
- *bod, kde je prvá derivácia nulová:* $-\frac{\pi}{4}$.

V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \pi - 1, f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = -1 - \pi.$$

Takže funkcia f *nadobúda najmenšiu hodnotu v bode* $x = \frac{\pi}{2}$ *a je to hodnota* $-1 - \pi$ *a najväčšiu hodnotu v bode* $x = -\frac{\pi}{2}$ *a je to hodnota* $\pi - 1$.

Situáciu si môžeme aj graficky znázorniť.



Úlohy: Nájdite maximum a minimum nasledujúcich funkcií na daných intervaloch:

1. $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1)\cdot(x+2)^2}, \langle 0, 5 \rangle$,
   [Max. v bode 5, min. v bode 0]

2. $f_2(x) = \sqrt{|6x - x^2|}, \langle 1, 2 \rangle,$
   [Max. v bode 2, min. v bode 1]

3. $f_3(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}, \langle 0, 2 \rangle,$
   [Max. v bode 2, min. v bode 0]

4. $f_4(x) = x^3 - 2|x|, \langle 0, 2 \rangle.$
   [Max. v bode 2, min. v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}$]

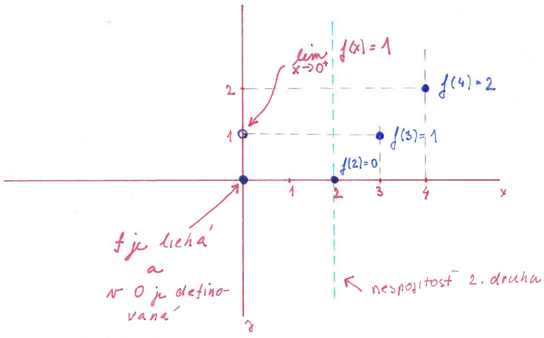
3.8 Priebeh funkcie

Už poznáme geometrický význam prvej, aj druhej derivácie a teda tieto vedmosti teraz využijeme pri kreslení grafov funkcí, teda budeme vy setrovať ich priebeh. Zvyčajne sa držíme nasledujúceho štandardného postupu:

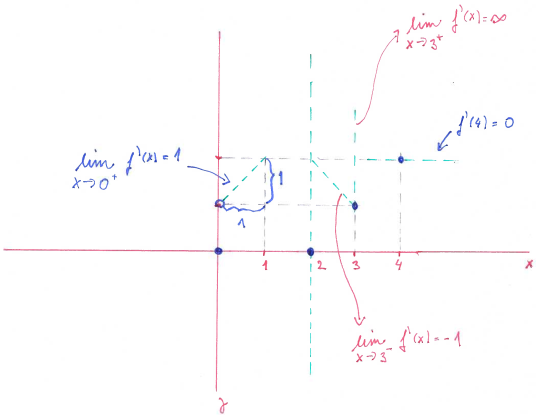
1. Nájdeme definičný obor funkcie.
2. Zistíme vlastnosti: parita, periodicita.
3. Nájdeme významné body– napr. nulové body funkcie, body nespojitosti.
4. Určíme rovnice asymptôt grafu funkcie.
5. Určíme intervaly monotónnosti funkcie a jej lokálne extrémy.
6. Určíme intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.
7. Spokojne načrtneme graf funkcie.
8. Po náročnej práci odpočívame.

Nasledujúca úloha je trochu iná, nebudeme musieť nič počítat, všetky podstatné údaje máme zadané. V tejto úlohey si zopakujeme geometrickú interpretáciu derivácií a ďalších dôležitých pojmov.

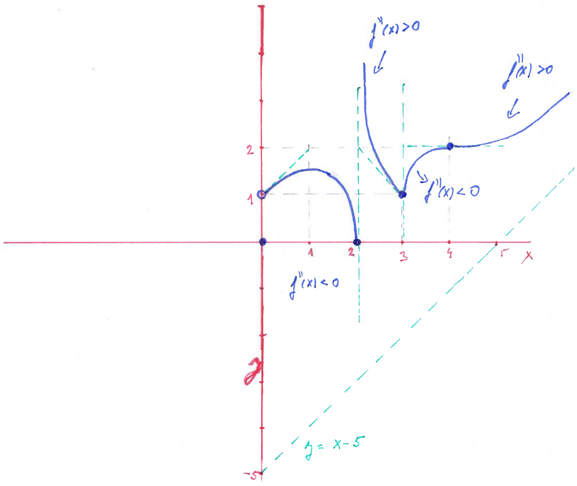
Príklad 53 Načrtnite graf funkcie f, pre ktorú platí:
$D_f = \mathbb{R}$, v $x = 2$ má nespojitosť 2. druhu, pričom je tam spojitá zľava, funkcia je lichá (nepárna);
$f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$*;*
$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1, \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = -1, \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \infty, f'(4) = 0$*;*
$f''(x) > 0$ *pre* $x \in (2,3)$ *a pre* $x \in (4,\infty)$*,* $f''(x) < 0$ *pre* $x \in (0,2)$ *a pre* $x \in (3,4)$*; pre* $x \to \infty$ *má asymptotu* $y = x - 5$*.*
Do obrázku zakreslite asymptoty a dotyčnice, resp. polodotyčnice v bodoch, kde je známa derivácia.
Riešenie. *Túto úlohu som postupne rozkreslila, aby bol zrejmý postup. Na prvom obrázku vidíme len zaznačené funkčné hodnoty vo vybraných bodoch, teda* $f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2$*, ďalej zvislú asymptotu v bode* 2*, kde má byť nespojitosť druhého typu a je tam vyznačená funkčná hodnota v bode* 0*, ktorá síce nebola zadaná, ale vzhľadom k tomu, že* f *je lichá a je definovaná aj pre* $x = 0$*, musí byť* $f(0) = 0$*, toto si premyslite. Ďalej je tam prázdny puntík v bode* $(0,1)$*, lebo* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$*. Plný nemôže byť, lebo plný je už v* $(0,0)$*, kreslíme funkciu, na to nesmieme zabudnúť.*



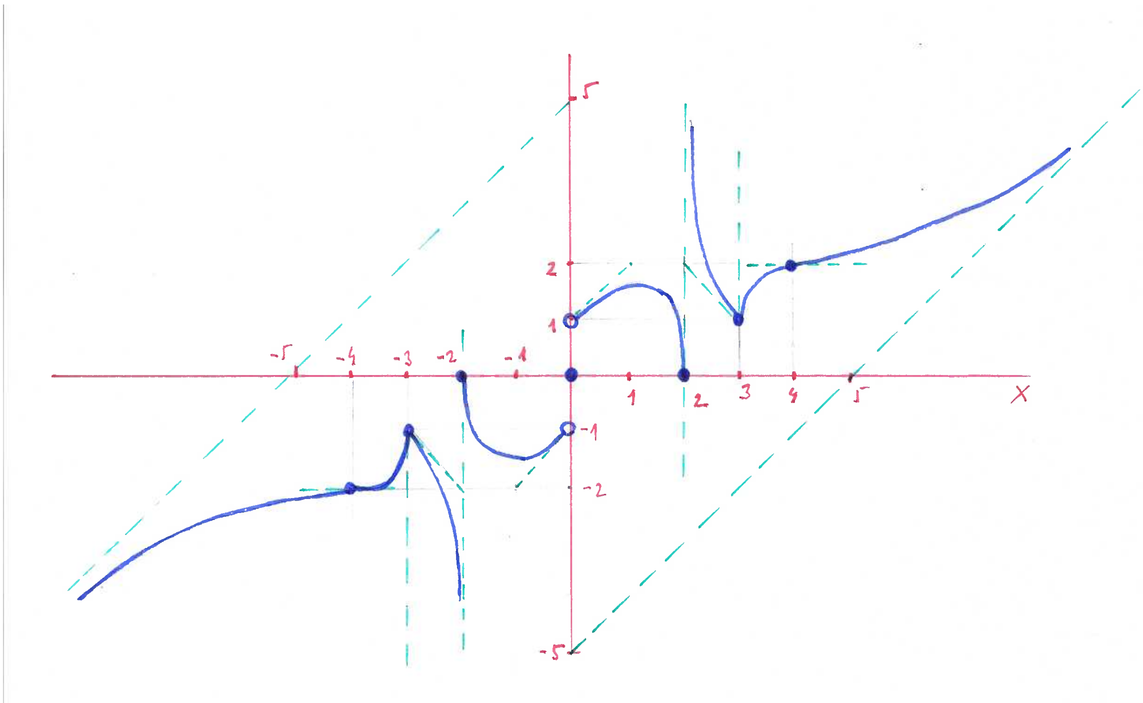
Na ďalšom obrázku máme zaznačené všetky tečny a polotečny. Teda kreslíme úsečky, ktoré prechádzajú vybranými bodmi a majú smernicu takú, aká je derivácia v príslušnom bode. Napr. $f'(4) = 0$*. Vieme, že* $f(4) = 2$*, takže bodom* $(4, f(4))$ *vedieme úsečku, ktorá má smernicu* 0*, teda je rovnobežná s osou* x*.*



Na nasledujúcom obrázku už máme takmer výsledok. Pridali sme asymptotu v ∞ *a podľa znamienka druhej derivácie sme kreslili buď konvexnú alebo konkávnu časť funkcie. Ešte treba myslieť na to, že* f *je v bode* 2 *zľava spojitá. Tečny a polotečny z predchádzajúceho obrázku nám poslúžili* *ako "mantinely".*



A v poslednom obrázku sme len, vzhľadom na lichosť funkcie, dokreslili zvyšnú časť grafu:



Príklad 54 *Vyšetrite priebeh funkcie*

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Riešenie.

- *Def. obor je* $\mathbb{R}$. *V menovateli nehrozí nula a pod odmocninou tiež žiadne záporné číslo nebude, lebo* $x^4+1\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}$.

- *Funkcia je lichá (nepárna):*

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^4+1}}=\frac{-x^3}{\sqrt{x^4+1}}=-f(x).$$

- *Monotónnosť. Určíme prvú deriváciu funkcie* f :

$$f'(x)=\frac{3x^2.\sqrt{x^4+1}-x^3\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)}{x^4+1}=$$

$$=\frac{3x^2.\sqrt{x^4+1}-\frac{2x^6}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}=\frac{\frac{3x^2(x^4+1)-2x^6}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}=\frac{3x^6+3x^2-2x^6}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}.$$

Teda po úprave

$$f'(x)=\frac{x^2\cdot(x^4+3)}{\sqrt{(x^4+1)^3}}.$$

Zřejme

$$f'(x)\geq 0, \forall x\in R \quad a \quad f'(x)=0 \iff x=0.$$

Preto funkcia f *je rastúca* $\forall x\in R$.

- *Konvexnosť a konkávnosť. Určíme druhú deriváciu funkcie* f :

$$f''(x)=\frac{(6x^5+6x).(x^4+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^4+1)^{\frac{1}{2}}.4x^3.(x^6+3x^2)}{(x^4+1)^3}=$$

$$=\frac{6x(x^4+1)(x^4+1)^{\frac{3}{2}}-x^2(x^4+3)6x^3(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+1)^3}=$$

$$=\frac{6x(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\left[(x^4+1)^2-x^4(x^4+3)\right]}{(x^4+1)^3}=\frac{6x(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\left[x^8+2x^4+1-x^8-3x^4\right]}{(x^4+1)^3}.$$

Posledná úprava:

$$f''(x)=\frac{6x(1-x^4)\sqrt{x^4+1}}{(x^4+1)^3}.$$

Zrejme

$$f''(x)=0 \iff x=-1\vee x=0\vee x=1.$$

Na znamienko druhej derivácie majú vplyv len výrazy x *a* $1-x^4$ *(výraz* $\frac{6\sqrt{x^4+1}}{(x^4+1)^3}$ *je vždy kladný). Teda druhá derivácia je záporná na intervaloch* $(-1,0),(1,\infty)$ *a preto* f *je na týchto intervaloch konkávna. Na* *intervaloch $(-\infty,-1),(0,1)$ je druhá derivácia kladná, teda funkcia f je tam konvexná. Všimnite si, že zmena konvexnosti na konkávnosť (a naopak) nastáva v bodoch $-1,0,1$, teda sú to inflexné body.*

- *Asymptoty.*
  Funkcia nemá zvislé asymptoty, lebo nemá body nespojitosti (pozri def. obor).
  Ak existuje šikmá asymptota v nekonečne, tak platí

$$y=ax+b; a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax.$$

Podobne by sme zisťovali asymptotu v $-\infty$, ale funkcia f je lichá, tak nám stačí informácia pre $+\infty$. Teda

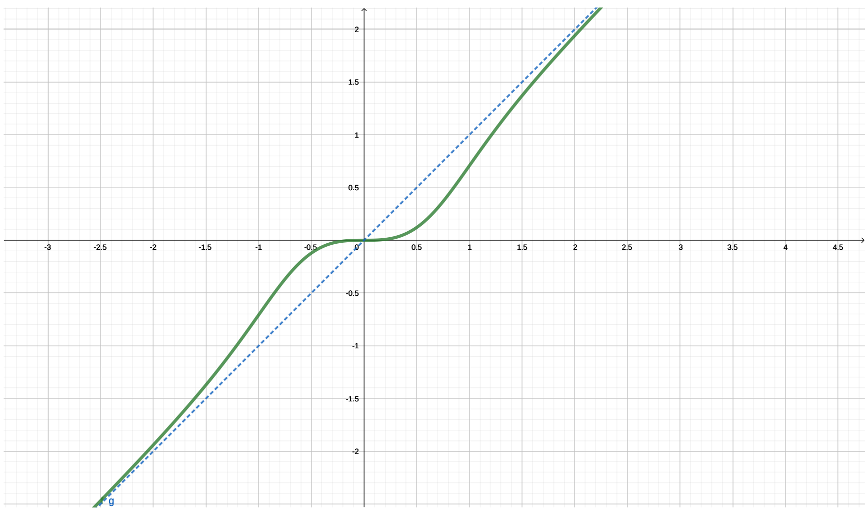
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x.\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x.\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^4})}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}-1.x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x.\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4+1}}\cdot\frac{x^3+x.\sqrt{x^4+1}}{x^3+x.\sqrt{x^4+1}}=$$

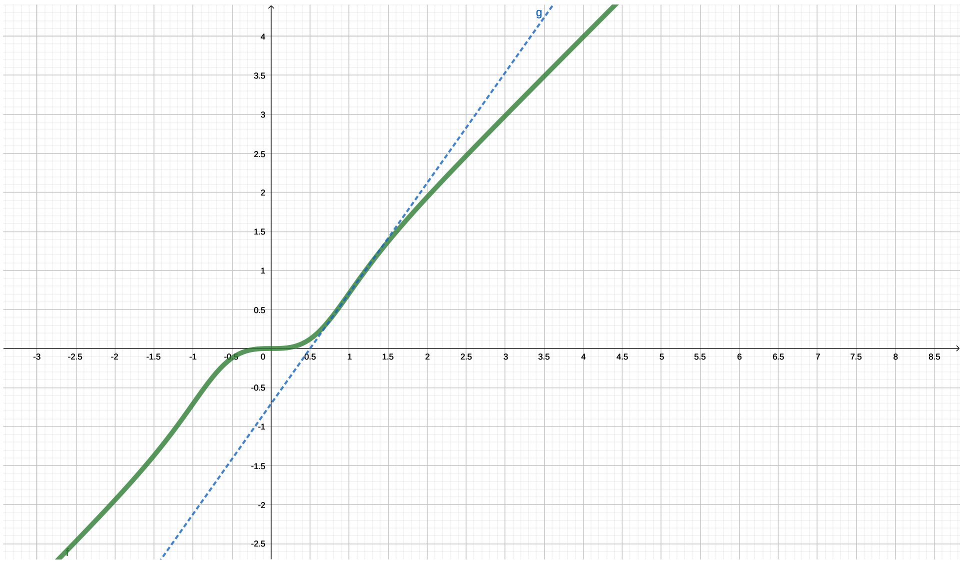
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^2(\sqrt{x^4+1})^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3+x.\sqrt{x^4+1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3+x.\sqrt{x^4+1})}=0$$

Asymptota má predpis $y=x$, vďaka tomu, že f je lichá, bude spoločná aj pre $-\infty$ (toto si premyslite).

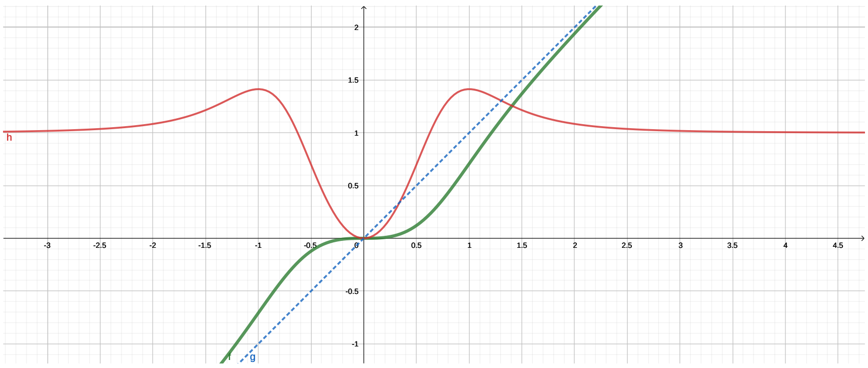
- **Graf funkcie, aj s asymptotou je:**



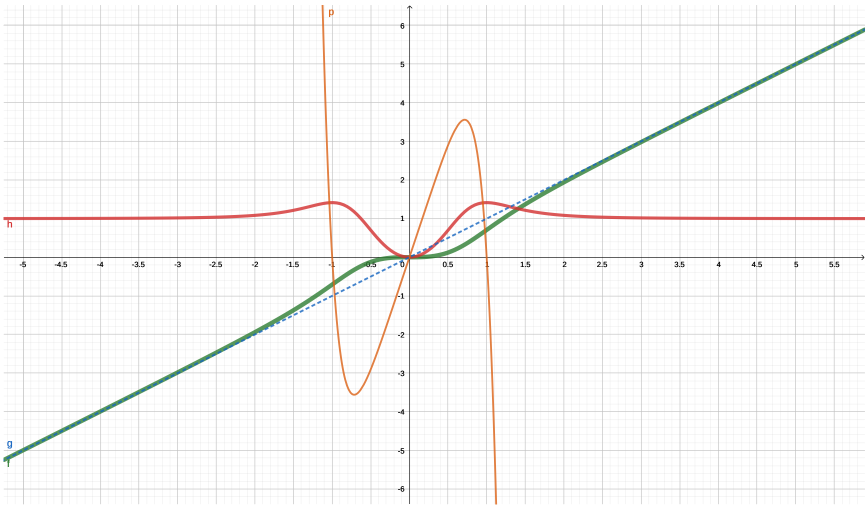
- **Detial inflexného bodu 1, aj s dotyčnicou je na nasledujúcom obrázku.** *Všimnite si,že konvexná časť funkcie je nad dotyčnicou a* *konkávna pod dotyčnicou.*



- *Na nasledujúcom obrázku je zelenou farbou nakreslená funkcia* f *a červenou farbou jej prvá derivácia:*



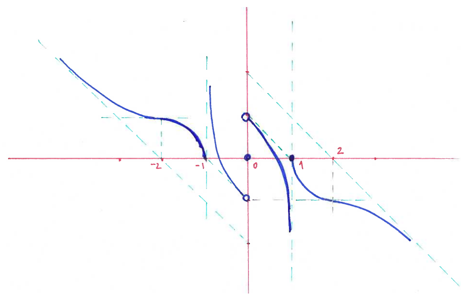
- *Na poslednom obrázku je okrem funkcie* f*, jej prvej derivácie aj druhá derivácia (oranžová farba):*



V nasledujúcich úlohách máte hneď po zadaní výsledok. Doporučujem najskôr samostatne graf nakresliť a potom porovnať.

Úlohy:

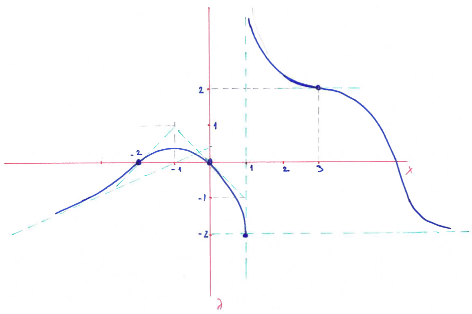
1. Načtrnite graf funkcie f, pre ktorú platí:
   $D_f = \mathbb{R}, f$ je lichá, v $x = 0$ má nespojitosť 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitosť 2. druhu, pričom je tam spojitá sprava.
   $f(1) = 0, f(2) = -1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty, f'(2) = 0$. $f''(x) > 0$ pre $x \in (1,2), f''(x) < 0$ pre $x \in (0,1)$ a pre $x \in (2,\infty)$, pre $x \to \infty$ má asymptotu $y = 2 - x$.
   Do obrázku zakreslite asymptoty a dotyčnice, resp. polodotyčnice v bodoch, kde je známa derivácia.
   Výsledok:

2. Načtrnite graf funkcie f, pre ktorú platí:
   $D_f = \mathbb{R}, f$ v bode $x = 1$, má nespojitosť 2. druhu, pričom je tam spojitá zľava.
   $f(3) = 2, f(1) = -2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = -1$.
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, f'(x) \le 0$ pre $x \in (1,\infty)$.
   $x = -2$ a $x = 3$ sú inflexné body, pričom $f'(-2) = 1, f'(3) = 0$.
   Priamka $y = -2$ je jej asympota pre $x \to \infty$, priamka $y = \frac{1}{2}(1 + x)$ je asympota pre $x \to -\infty$.
   Do obrázku zakreslite asymptoty a dotyčnice, resp. polodotyčnice v

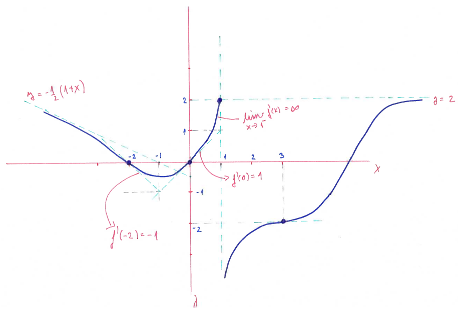
bodoch, kde je známa derivácia.

Výsledok:



3. Načtrnite graf funkcie f, pre ktorú platí
   $D_f = \mathbb{R}, f$ v bode $x = 1$, má nespojitosť 2. druhu, pričom je tam spojitá zľava.
   $f(3) = -2, f(1) = 2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = 1$.
   $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty, f'(x) \geq 0$ pre $x \in (1, \infty)$.
   $x = -2$ a $x = 3$ sú infl. body, pričom $f'(-2) = -1,\ f'(3) = 0$.
   Přímka $y = 2$ je jej asympota pre $x \to \infty$, priamka $y = -\frac{1}{2}(1 + x)$ je asympota pre $x \to -\infty$.
   Do obrázku zakreslite asymptoty a dotyčnice, resp. polodotyčnice v bodoch, kde je známa derivácia.

Výsledok:



4. Načtrnite graf funkcie f, pre ktorú platí
   Funkcia f je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$.
   $f(0) = f(-1) = 0, \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
   $f'(0) = -2, \lim\limits_{x \to -1} f'(x) = \infty$,
   $f''(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -1), x \in (0, 1)$ a $x \in (1, \infty)$, $f''(x) < 0$ pre $x \in (-1, 0)$.
   Priamka $y = x$ je jej asympota pre $x \to \infty$.
   Do obrázku zakreslite asymptoty a dotyčnice, resp. polodotyčnice v bodoch, kde je známa derivácia.

Výsledok: