INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematický seminář

Edita Kolářová

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně,
realizovaném na Vysokém učení technickém v Brně.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalován software Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v elektronické bance příkladů.

Obsah

Předmluva

Předmět matematický seminář v prvním semestru FEKT VUT v Brně slouží k doplnění a sjednocení úrovně středoškolské matematiky, aby studenti zvládli matematické předměty na naší fakultě. Vzhledem k zavedení státních maturit došlo ke změnám osnov středoškolské matematiky a předmět BMA1, probíhající také v prvním semestru, byl rovněž pozměněn. Bylo proto nutné změnit i výuku matematického semináře.

Skripta Matematický seminář jsou inovací stejnojmenných skript z roku 2005. Příklady k procvičování probírané látky jsou doplněné o Maplety.

Byla vytvořena banka příkladů k matematickému semináři v Maple T.A. formou uzavřených i otevřených testovacích otázek. Zvládnutí takového testu by mělo sloužit studentům k ověření středoškolských znalostí na dostatečné úrovni. Automatické ohodnocení testu pak učitelům zjednoduší udělení zápočtu za předmět.

31. 3. 2014 E. Kolářová

1 Základy matematické logiky

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1. *Výrok* je vyslovená nebo napsaná myšlenka, která sděluje něco, co může být pouze pravdivé nebo nepravdivé.

Poznámka 1.2. Jednoduché výroky označujeme velkými písmeny, např. $A, B, V, \ldots$.

Pomocí logických spojek dostáváme složené výroky. Nejdůležitější jsou:

- $\overline{A}$ ($nonA$; A'; $\neg A; \ldots$) – *negace* výroku A (není pravda, že A).
- $A \wedge B$ – *konjunkce* (A a zároveň B).
- $A \vee B$ – *disjunkce* (A nebo B; platí alespoň jeden).
- $A \Rightarrow B$ – *implikace* (jestliže A, pak B; z A plyne B).
- $A \Leftrightarrow B$ – *ekvivalence* (A platí tehdy a jen tehdy, když platí B;
  A platí právě tehdy, když platí B).

Kvantifikované výroky jsou výroky, udávající počet:

- $\forall$ – *obecný kvantifikátor* (čteme: ke každému, pro každé, pro všechna) vyjadřující, že každý (všichni, libovolný, kterýkoliv) uvažovaný objekt má - nebo nemá - požadovanou vlastnost.
- $\exists$ – *existenční kvantifikátor* (čteme: existuje alespoň jeden) vyjadřuje, že některé (alespoň jeden, někteří, lze nalézt, existuje,...) objekty mají vlastnost, o kterou jde.

Příklad 1.3. Výrok A je "rok má 13 měsíců" a výrok B je "$2 \times 2 = 4$." Utvořte $\overline{A}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ a rozhodněte, jsou-li pravdivé nebo nepravdivé.

Řešení. $\overline{A}$: "rok nemá 13 měsíců" - pravdivý výrok
$A \vee B$: "rok má 13 měsíců nebo $2 \times 2 = 4$" - pravdivý výrok
$A \wedge B$: "rok má 13 měsíců a $2 \times 2 = 4$" - nepravdivý výrok
$A \Rightarrow B$: " má-li rok 13 měsíců, pak $2 \times 2 = 4$" - pravdivý
$A \Leftrightarrow B$: "rok má 13 měsíců právě tehdy, je-li $2 \times 2 = 4$" - nepravdivý výrok □

Příklad 1.4. Vyslovte negaci výroku A:
$a)$ Všechny kořeny mnohočlenu jsou rovny nule.
$b)$ Ne všechna reálná čísla jsou kladná.
$c)$ $2 < -7$
$d)$ Levná výroba proudu.

Řešení. $a)$ Alespoň jeden kořen mnohočlenu je nenulový;
$b)$ Všechna reálná čísla jsou kladná;
$c)$ $2 \geq -7$;
$d)$ není výrok □

Příklad 1.5. Výrok A "číslo a je dělitelné osmi", výrok B "číslo a je dělitelné dvěma". Formulujte $A \Rightarrow B$, a rozhodněte zda je pravdivý.

Řešení. Je-li číslo a dělitelné osmi, pak je dělitelné dvěma. Pravdivá implikace. □

Příklad 1.6. Vyjádřete tvrzení "Součet každých dvou přirozených čísel se nerovná nule" jako výrok s kvantifikátory.

Řešení. $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$ platí, že $x + y \neq 0$. □

Příklad 1.7. Zapište pomocí vhodné proměnné v oboru reálných čísel:
$a)$ Součet libovolného reálného čísla a jeho převrácené hodnoty.
$b)$ Vztah, že druhá mocnina reálného čísla je vždy reálné číslo.
$c)$ Vztah, že existuje přirozené číslo, jehož odmocnina není racionální číslo.

Řešení. $a)$ $a + \dfrac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

$b)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$ platí, že $x^2 \in \mathbb{R}$.

$c)$ $\exists\ n \in \mathbb{N}$, takové, že $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. □

1.2 Operace s množinami

Definice 1.8. *Množinou* rozumíme souhrn libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost.

Základní operace s množinami:

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ – *inkluze množin* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ – *rovnost množin* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.
- $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ – *sjednocení množin.*
- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ — *průnik množin.*
- $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ – *rozdíl množin.*
- $\mathcal{A}'_{\mathcal{B}}$ – *doplněk množiny* $\mathcal{A}$ *v množině* $\mathcal{B}$.

Připomínáme ještě *intervaly*, jejich názvy a znázornění na číselné ose:

- *uzavřený interval* – $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$:
- *otevřený interval* – $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$:
- *polootevřený (polouzavřený) interval* – $(a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$:
  ev. $\langle a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$:
- *neomezený interval* – $\langle a; \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$:
  $(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$:
  $(-\infty; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$:
  $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$:
- *oboustranně neomezený interval* – $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$:

Příklad 1.9. $\mathcal{M}$ je množina všech sudých čísel, $\mathcal{P}$ množina všech lichých čísel, která nejsou dělitelná třemi, $\mathcal{R}$ množina všech čísel, která jsou dělitelná třemi. Určete množiny $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}, \mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}, \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.

Řešení. $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$; $\mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R} = \mathbb{Z}$ a $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}$ je množina všech celých čísel dělitelných šesti. □

Příklad 1.10. $\mathcal{M}$ je množina všech sudých přirozených čísel menších než deset. Najděte všechny její podmnožiny.

Řešení. $\mathcal{M} = \{2, 4, 6, 8\}$. Jednoprvkové $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$;
dvouprvkové $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$;
trojprvkové $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$;
čtyřprvkové $\{2, 4, 6, 8\}$ a prázdná množina. □

Cvičení

1. Nechť množina $\mathcal{M}$ je množina všech řešení rovnice $\cos \frac{\pi x}{2} = 0$, množina $\mathcal{N}$ je množina všech řešení rovnice $\sin \pi x = 0$. Najděte $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

2. Najděte sjednocení a průnik intervalů:

   a) $\langle 2; 3)$ a $\langle -1; \infty)$

   b) $(-\infty; 3\rangle$ a $(-8; 15)$

3. Vyřešte graficky následující příklady na sjednocení a průnik intervalů:

   a) $(-\infty; 4\rangle \cap (-1; 5)$

   b) $\langle -2; 10) \cap \Big((-\infty; 3\rangle \cup \langle 6, \infty)\Big)$

1.3 Věty a důkazy

Základem logické výstavby matematiky je soubor *axiomů*, t.j. matematických výroků, které se považují za pravdivé a nedokazují se. K zavedení nových pojmů slouží *definice*, která stanoví název pojmu a určí jeho základní vlastnosti. *Věta* v matematice je pravdivý výrok, který musíme logicky odvodit - dokázat - z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Podle použitých postupů rozlišujeme důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí.

Příklad 1.11. Věta: Součin dvou libovolných sudých čísel je dělitelný čtyřmi.

Řešení. Důkaz přímý: Jde o součin $2l \cdot 2k = 4lk$ $(l, k \in \mathbb{Z})$. □

Příklad 1.12. Nechť rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má celočíselné koeficienty, $a \neq 0, b$ je číslo liché. Dokažte, že rovnice nemůže mít dvojnásobný kořen.

Řešení. Důkaz sporem: Předpokládáme, že rovnice má dvojnásobný kořen. Pak diskriminant je nulový. Víme, že $b = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$. Tedy $D = (2k+1)^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4k^2 + 4k + {} + 1 = 4ac$. Na levé straně rovnice je liché číslo, na pravé straně sudé a to je spor. Neplatí tedy předpoklad, že kvadratická rovnice má za daných podmínek dvojnásobný kořen. □

Příklad 1.13. Matematickou indukcí dokažte, že součet čtverců prvních n přirozených čísel je roven $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Řešení. Matematickou indukcí dokazujeme výrok $V(n)$ tak, že nejprve dokážeme platnost $V(a)$, kde a je nejmenší přirozené číslo pro danou úlohu. Pak předpokládáme platnost $V(n)$ a ukážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Pak $V(n)$ platí pro všechna n.
V našem případě: $V(1) : S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, což odpovídá $S_1 = 1^2$.
Předpokládáme $V(n) : S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Počítáme $V(n+1) : S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + {} + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. □

Cvičení

1. Přímým důkazem dokažte:
   a) Zvětší-li se číslo a o x, zvětší se jeho druhá mocnina o $x(2a+x)$.
   b) Zvětší-li se číslo x o h, zvětší se jeho dekadický logaritmus o $\log(1 + \frac{h}{x})$.
   c) Součet dvou čísel lichých je sudé číslo.

2. Sporem dokažte:
   a) Rovnice $ax = b$, kde $a \neq 0$, má jediné řešení.
   b) V každém trojúhelníku leží proti stejným úhlům stejné strany.

3. Metodou matematické indukce dokažte:
   a) $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
   b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

2 Analytická geometrie

2.1 Operace s vektory

Definice 2.1. *Vektorem* nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Je-li $\vec{u} = \vec{AB}$ libovolný nenulový vektor s počátečním bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a koncovým bodem $B[b_1; b_2; b_3]$, pak *souřadnice vektoru* $\vec{u}$ jsou: $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$. Zapisujeme $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$. Je-li $A = B$, pak dostáváme vektor nulový $\vec{o}(0; 0; 0)$. U vektorů v rovině vypustíme třetí souřadnici.

Pro vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ zavádíme:

- *velikost vektoru* $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- *rovnost vektorů* $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge (u_3 = v_3)$
- *součet vektorů* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$
- *rozdíl vektorů* $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$
- *opačný vektor k* $\vec{u}$ $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$
- *k-násobek vektoru* $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3),\ k \in \mathbb{R}, k \neq 0$
- *skalární součin* $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- *úhel φ dvou vektorů* $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},\ \varphi \in \langle 0; 2\pi)$

2.2 Přímka v rovině

Přímka v rovině má následující rovnice:

- *Parametrické rovnice* – Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2)$, jsou její parametrické rovnice $x = a_1 + ts_1$, $y = a_2 + ts_2$, $t \in \mathbb{R}$. Budeme používat i zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2],\ t \in \mathbb{R}\}$.
- *Obecná rovnice* – Vyloučením parametru t z parametrických rovnic dostaneme obecnou rovnici přímky $p \equiv ax + by + c = 0$.

- *Směrnicový tvar rovnice přímky* – Je-li v obecné rovnici $b \neq 0$, lze najít směrnicový tvar $\quad p \equiv y = kx + q; \quad k, q \in \mathbb{R}$.

Vzdálenost bodu $M[x_0; y_0]$ od přímky $p \equiv ax + by + c = 0$ je dána

$$d(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro odchylku dvou přímek $p_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lze odvodit

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Jsou-li přímky p_1 a p_2 kolmé, pak pro jejich směrnice k_1 a k_2 platí $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Příklad 2.2. Přímka je určena body $A[6; -1]$, $B[2; 3]$. Najděte všechny tvary rovnice této přímky.

Řešení. Směrový vektor této přímky je $\vec{s} = (-4; 4)$. Parametrické rovnice tedy jsou

$$x = 6 - 4t, \ y = -1 + 4t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Sečtením těchto rovnic a vyloučením parametru t dostaneme obecnou rovnici

$$x + y - 5 = 0.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$, připomínáme tímto úsekový tvar rovnice přímky. Úseky, které přímka vytíná na souřadnicových osách, jsou stejné a rovny pěti.
Z obecného tvaru odvodíme směrnicový $y = -x + 5$. Vidíme, že směrnice $k = -1$, úhel přímky s kladným směrem osy x je $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. □

Příklad 2.3. V trojúhelníku ABC, kde $A[7; 8], B[5; -2], C[-3; -6]$, určete velikost výšky v_a a napište rovnici přímky, na níž leží výška v_a.

Řešení. Výška v_a má velikost rovnou vzdálenosti bodu A od přímky p, na níž leží strana BC. Je $\vec{BC} = C - B = (-8; -4)$.
Parametrické rovnice přímky p jsou: $x = -3 - 8t, \ y = -6 - 4t$.
Odtud obecná rovnice $x - 2y - 9 = 0$. Tedy $v_a = d(A, p) = \dfrac{|1 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$.
Směrnicová rovnice přímky p je $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$, směrnice výšky v_a je tedy

$$k = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Rovnice přímky rovnoběžné s výškou pak je $y = -2x + q$ a posunutí q dostaneme z podmínky, že výška v_a bodem A prochází, tedy $8 = -2 \cdot 7 + q \ \Rightarrow q = 22$.
Je tedy $y = -2x + 22$ rovnice přímky, na níž výška v_a leží. □

Příklad 2.4. Určete odchylku přímek

$$p_1 \equiv 3x - 2y + 10 = 0 \text{ a } p_2 \equiv 5x + y - 13 = 0.$$

Řešení. $\cos\varphi = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \dfrac{|3\cdot 5 - 2\cdot 1|}{\sqrt{9+4}\sqrt{25+1}} = \dfrac{|13|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

□

2.3 Přímka v prostoru a rovnice roviny

Zadání přímky v prostoru:

- Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2; s_3)$, jsou její *parametrické rovnice*

  $$x = a_1 + ts_1,\ y = a_2 + ts_2,\ z = a_3 + ts_3,\ t \in \mathbb{R}.$$

  Zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2; a_3 + ts_3],\ t \in \mathbb{R}\}$.
- Přímku v prostoru lze také zadat jako průsečnici dvou různoběžných rovin.

Rovina ϱ v prostoru má následující rovnice:

- *Parametrické rovnice* – Je-li rovina ϱ určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvěma nenulovými, nekolineárními vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, jsou její parametrické rovnice: $x = a_1 + tu_1 + rv_1, y = a_2 + tu_2 + rv_2, z = a_3 + tu_3 + rv_3,\ t, r \in \mathbb{R}$. Zkrácený zápis $\varrho \equiv \{[a_1 + tu_1 + rv_1; a_2 + tu_2 + rv_2; a_3 + tu_3 + rv_3],\ t, r \in \mathbb{R}\}$.
- *Obecná rovnice* – Vyloučením parametrů t, r z parametrických rovnic dostaneme obecnou (normálovou) rovnici roviny ϱ ve tvaru

  $$ax + by + cz + d = 0,$$

  kde alespoň jeden z koeficientů a, b, c je nenulový. Vektor $\vec{n}(a; b; c)$ je *normálový* vektor roviny ϱ.

Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny ϱ je $d(X, \varrho) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Příklad 2.5. Najděte rovnici roviny ϱ, která prochází bodem $A[5; -1; 0]$ a má normálový vektor $\vec{n}(-1; 1; 2)$.

Řešení. Souřadnice normálového vektoru jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny. Tedy $\varrho \equiv -x + y + 2z + d = 0$. Bod A leží v rovině, potom $-5 - 1 + 0z + d = 0 \Rightarrow d = 6$. Dostali jsme $\varrho \equiv -x + y + 2z + 6 = 0$. □

Příklad 2.6. Rovina ϱ je určena body $A[4;0;3], B[4;1;5], C[1;2;-3]$. Najděte parametrické vyjádření a obecnou (normálovou) rovnici ϱ.

Řešení. Je $\vec{AB} = (0;1;2), \vec{AC} = (-3;2;-6)$. Pak parametrické rovnice roviny ϱ jsou

$$x = 4 + 0t - 3r,\ y = 0 + t + 2r,\ z = 3 + 2t - 6r,\ t, r \in \mathbb{R}.$$

Vyloučením parametrů t, r z těchto rovnic dostaneme $\varrho \equiv 10x + 6y - 3z - 31 = 0$. □

Příklad 2.7. Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin: $\varrho_1 \equiv 4x - 2y - 2z - 3 = 0$, $\varrho_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0$.

Řešení. V rovině ϱ_1 volíme například bod $X(0;0;-\frac{3}{2})$. Potom

$$d(\varrho_1, \varrho_2) = d(X, \varrho_2) = \frac{|\frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

□

Cvičení

1. Jsou dány tři po sobě jdoucí vrcholy rovnoběžníka $ABCD$, kde $A = [2;-2;2]$, $B = [4;2;0]$, $C = [7;4;3]$. Určete vrchol D.

2. Najděte vnitřní úhly trojúhelníku o vrcholech $A = [2;-4;9]$, $B = [-1;-4;5]$, $C = [6;-4;6]$.

3. Pro jakou hodnotu parametru a jsou přímky $p \equiv 3ax - 8y + 13 = 0$ a $q \equiv (a+1)x - 2ay - 21 = 0$ rovnoběžné?

4. Určete a tak, aby přímka $p \equiv ax + 3y - 1 = 0$ svírala s kladným směrem osy x úhel $\frac{3}{4}\pi$.

5. Najděte rovnici přímky, která prochází bodem $A[4;-2]$ a má od počátku vzdálenost $d = 2$.

6. Přímka p je dána rovnicemi $x = 1 + 2t, y = 3 - t, t \in \mathbb{R}$. Určete parametrické rovnice přímky q, je-li přímka p kolmá na q $(p \perp q)$ a dále q prochází bodem $Q[1;3]$.

7. Najděte číslo n, aby body $A = [3;-4]$, $B = [1;n]$, $C = [-1;2]$ ležely na jedné přímce.

8. Určete odchylku φ rovin $\varrho \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ a $\sigma \equiv x - y + z = 0$.

9. Rozhodněte, která z rovin $\varrho \equiv x - y - 3 = 0, \sigma \equiv x + y - z + 1 = 0$ má větší vzdálenost od počátku souřadnic.

10. Určete rovnici průsečnice rovin $\varrho \equiv 3x + y - z = 0$ a $\sigma \equiv y + z = 0$.

3 Výrazy, rovnice, nerovnice

3.1 Úpravy algebraických výrazů

Při úpravách algebraických výrazů používáme poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na nejjednodušší tvar.

- *Pravidla pro počítání s mocninami* – Pro každé reálné r, s a každé $a > 0,\ b > 0$, (respektive pro každé celé r, s a každé $a \neq 0,\ b \neq 0$) platí:

$$a^0 = 1; \qquad (a^r)^s = a^{rs}; \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}; \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r;$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}; \qquad a^r : a^s = a^{r-s}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

- *Pravidla pro počítání s odmocninami* – Nechť $m, n \in \mathbb{N},\ a \geq 0 \wedge b \geq 0$. Pak platí:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (\sqrt[n]{0} = 0,\ \sqrt[1]{a} = a); \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad b \neq 0; \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

- *Rozklady nejjednodušších mnohočlenů:*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- *Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů* – Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, pak

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Definice 3.1. Každému reálnému číslu a přiřazujeme právě jedno nezáporné číslo $|a|$, *absolutní hodnotu* čísla a, takto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Jestliže a, b jsou reálná čísla, pak absolutní hodnota má tyto vlastnosti:

1) $|a| = max\{a, -a\}$ 2) $|a| = |-a|$ 3) $a \leq |a|$

4) $|a| = \sqrt{a^2}$ 5) $|ab| = |a| \cdot |b|$ 6) $|a^n| = |a|^n$, pro $n \in \mathbb{N}$

7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$ 8) $|a+b| \leq |a| + |b|$, (trojuhelníková nerovnost)

9) Nechť $\varepsilon > 0$, pak pro $\forall\ a, x \in \mathbb{R}$ platí: $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - a| < \varepsilon$.

Příklad 3.2. Upravte výraz $|-2x|^3 - |(-2x)^2| + |-2x|^2 + \frac{|2x|}{x}$, $x \neq 0$.

Řešení. Pro $x > 0$: $V = [-(-2x)]^3 - 4x^2 + [-(-2x)]^2 + \frac{2x}{x} = 8x^3 + 2.$

Pro $x < 0$: $V = (-2x)^3 - 4x^2 + (-2x)^2 + \frac{-2x}{x} = -8x^3 - 2$ □

Příklad 3.3. Upravte výrazy $U = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$ a $V = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2} + 1} + \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - \sqrt{x^2}}$ na nejjednodušší tvar.

Řešení. $U = \frac{x(x^2-1) - 3(x^2-1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x}$,

platí pro $x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 3$.

$$V = \frac{(x^3 + x^2 - x - 1)(1 - \sqrt{x^2}) + (x^3 - x^2 - x + 1)(1 + \sqrt{x^2})}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2|x| + 2|x|}{1 - x^2} = 2\frac{x(x^2-1) - |x|(x^2-1)}{1 - x^2} = 2(|x| - x);$$

Pro $x \neq 1 \ \wedge x \geq 0$: $V = 0$, pro $x \neq -1 \ \wedge x < 0$: $V = -2x$ □

Cvičení

1. Zjednodušte následující výrazy:

a) $\frac{x - 2y}{x + y} - \frac{2x - y}{y - x} - \frac{2x^2}{x^2 - y^2}$,

b) $\frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$.

c) $\frac{a^2b^{-2} - ab^{-1} + a^{-2}b^2 - a^{-1}b}{(a^{-1} - b^{-1})(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)}$

d) $\left(\frac{2x}{x + y} + \frac{y}{x - y} - \frac{y^2}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{1}{x + y} + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)$

e) $$\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)}{\left(\frac{a^4}{b^2}-\frac{b^4}{a^2}\right):(a^2-b^2)}$$

f) $$1+\frac{(4-a^2)^{-\frac{1}{2}}-(2-a)^{-\frac{1}{2}}}{(2+a)^{-\frac{1}{2}}+(4-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-a}{1-\sqrt{2-a}}$$

g) $$\left(\frac{x^2+y^2}{x}+y\right):\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$$

h) $$\left(v+\frac{u-v}{1+uv}\right):\left(1-\frac{v(u-v)}{1+uv}\right)$$

i) $$\frac{\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}}{\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{x^2-x+1}}:\frac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x^2-x}{x+1}}$$

2. Usměrněte zlomky:

a) $$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

b) $$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$$

3. Užitím rozkladu kvadratického trojčlenu převeďte na součin:

a) $x^5-x^4-56\,x^3$

b) $x^4+2\,x^2-3$

c) $x^4-13\,x^2+40$

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení úpravy algebraických výrazů:

1. výrazy,
2. úpravy výrazů.

3.2 Rovnice

3.2.1 Lineární rovnice

Lineární rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru $ax + b = 0$, kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$. Graficky tento kořen určíme jako průsečík přímky $y = ax + b$ s osou x.

Rovnice řešíme ekvivalentními úpravami (násobení rovnice nenulovým číslem, přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice), proto nemusíme provádět zkoušku. Zkouška pak má jen charakter kontroly výpočtu.

Příklad 3.4. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{2(x-1)}{11} - \dfrac{x-3}{2} = 9 - \dfrac{5(x+1)}{8}$.

Řešení. Celou rovnici vynásobíme $8 \cdot 11$, tím se zbavíme zlomků:

$$16(x-1) - 44(x-3) = 792 - 55(x+1)$$

a po roznásobení je $16x - 16 - 44x + 132 = 792 - 55x - 55$,

sloučíme $-28x + 116 = 737 - 55x$ a k oběma stranám rovnice přičteme $55x - 737$

$$27x - 621 = 0$$

a to je rovnice tvaru $ax + b = 0$. Takže $x = \dfrac{621}{27} = 23$.

□

Příklad 3.5. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $2 + \dfrac{3}{x+7} = \dfrac{x+10}{x+7}$.

Řešení. Řešíme za předpokladu $x + 7 \neq 0$, tzn. $x \neq -7$, úpravou:

$$\begin{aligned} 2(x+7) + 3 &= x + 10 \\ 2x + 14 + 3 &= x + 10 \\ x &= -7 \qquad \text{což je spor} \Rightarrow x \in \{\ \} \end{aligned}$$

□

Příklad 3.6. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\dfrac{3+2x}{2} - \left(\dfrac{7}{6} - \dfrac{12x-1}{3}\right) = 5x$.

Řešení. Zbavíme se zlomků

$$\begin{aligned} 3(3+2x) - 7 + 2(12x-1) &= 30x \\ 9 + 6x - 7 + 24x - 2 &= 30x \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení $x = t,\ t \in \mathbb{R}$. □

3.2.2 Kvadratická rovnice

Kvadratickou rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Kořeny kvadratické rovnice můžeme vypočítat podle vzorce: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Kořeny závisí na hodnotě diskriminantu $D = b^2 - 4ac$:

- Pro $D > 0$ dostaneme dva reálné různé kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
- Pro $D = 0$ dostaneme jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$.
- Pro $D < 0$ nemá rovnice v $\mathbb{R}$ řešení (má komplexní kořeny).

Graficky kořeny určíme jako průsečíky paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s osou x.

Nechť x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$, potom platí rovnost

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q = 0.$$

Z toho odvodíme vztah mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty p, q : $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Příklad 3.7. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Řešení. $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{2} \ \vee \ x_2 = -3$

Můžeme psát $2x^2 + 5x - 3 = 2(x - \dfrac{1}{2})(x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$.

□

Příklad 3.8. Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = -3\sqrt{3}$ a $x_2 = 2\sqrt{3}$.

Řešení. $(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow (x + 3\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \ x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0$. □

3.2.3 Rovnice s absolutní hodnotou

Při řešení *rovnic s absolutní hodnotou* vycházíme z definice absolutní hodnoty a řešíme rovnice v intervalech, které dostaneme pomocí tzv. kritických bodů.

Příklad 3.9. V oboru reálných čísel řešte rovnici s absolutní hodnotou $3 + 4|x - 2| = 5x$.

Řešení. Pro $x \in (-\infty, 2)$: rovnice přejde v rovnici $3 - 4(x - 2) = 5x$.

Tato má řešení $x = \dfrac{11}{9}$, které patří do daného intervalu.

Pro $x \in \langle 2, \infty)$: $3 + 4(x - 2) = 5x \Rightarrow x = -5 \notin \langle 2, \infty)$. Řešení pak je pouze $x = \dfrac{11}{9}$. □

Příklad 3.10. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici s absolutními hodnotami $|2x-7|+|x-2|=3$.

Řešení. $x \in (-\infty, 2) : -2x+7-x+2=3 \Rightarrow x=2 \notin (-\infty, 2)$

$x \in \langle 2, \frac{7}{2}) : -2x+7+x-2=3 \Rightarrow x=2 \in \langle 2, \frac{7}{2})$

$x \in \langle \frac{7}{2}, \infty) : 2x-7+x-2=3 \Rightarrow x=4 \in \langle \frac{7}{2}, \infty)$. Závěr: $x \in \{2, 4\}$.

□

Příklad 3.11. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici s absolutní hodnotou $3x-|2x-1|=x+1$.

Řešení. Pro $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) : 3x+2x-1=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \notin (-\infty, \frac{1}{2})$.

Pro $x \in \langle \frac{1}{2}, \infty) : 3x-2x+1=x+1 \Rightarrow 0=0$. Závěr: $x \in \langle \frac{1}{2}, \infty)$ □

3.2.4 Rovnice s parametrem

Rovnice s parametrem jsou rovnice, které kromě neznámých obsahují ještě další proměnné - parametry. Řešení rovnic s parametry spočívá v určení kořenů v závislosti na parametrech a v úplném rozboru všech možností parametrů.

Příklad 3.12. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $x+1-\dfrac{2x+a+1}{a}=\dfrac{a-x}{a}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení. Pro $a=0$ rovnice nemá smysl.
Pro $a \neq 0$ dostaneme $ax+a-2x-a-1=a-x \Rightarrow$

$$(a-1)x=a+1= \left\langle \begin{array}{l} \text{pro } a=1: \ 0\cdot x=2, \text{ spor} \\ \text{pro } a\neq 1: \ x=\frac{a+1}{a-1} \end{array} \right.$$

Závěr: $a=0$ rovnice nemá smysl
$a=1$ rovnice nemá řešení
$a\neq 0 \wedge a\neq 1$ rovnice má jediné řešení $x=\dfrac{a+1}{a-1}$ □

Příklad 3.13. Pro které hodnoty parametru t má kvadratická rovnice $2x^2+tx+2=0$ reálné různé kořeny?

Řešení. $D=t^2-16>0 \ \Rightarrow \ t^2>16 \ \Rightarrow \ |t|>4 \ \Rightarrow \ t \in (-\infty,-4)\cup(4,\infty)$. □

3.2.5 Iracionální rovnice

Iracionální rovnice obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentní úpravou - umocněním, proto je nutně součástí řešení zkouška.

Příklad 3.14. V oboru reálných čísel řešte iracionální rovnici $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x}=3$.

Řešení. Řešíme za předpokladu $x-7 \geq 0 \wedge 5-x \geq 0 \Rightarrow x \in \{\}$. Rovnice nemá řešení. □

Příklad 3.15. V oboru reálných čísel řešte iracionální rovnici $x - 4 = \sqrt{2x}$.

Řešení. Řešíme za předpokladu $x - 4 \geq 0 \wedge 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$
Umocněním dostaneme

$$(x-4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$x_1 = 8$ a $x_2 = 2$. Podmínce řešitelnosti vyhovuje pouze $x = 8$. Umocnění je neekvivalentní operace, provedeme zkoušku: $\left.\begin{array}{l} L(8) = 8 - 4 = 4 \\ P(8) = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 8.$ □

3.2.6 Logaritmické rovnice a exponenciální rovnice

Logaritmické rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Jestliže stanovíme podmínky řešitelnosti a řešíme ekvivalentními úpravami, pak zkouška není nutná.
Exponenciální rovnice jsou rovnice, kde neznámá $x \in \mathbb{R}$ se vyskytuje v exponentu nějaké mocniny. Rovnice řešíme buď logaritmováním, nebo porovnáním exponentu při stejném základu, často až po úpravách.

Příklad 3.16. V oboru reálných čísel řešte logaritmickou rovnici $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$.

Řešení. Podmínky: $x > 0 \wedge \log x \neq 0 \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Rovnici vynásobíme $\log x$, dostaneme $\log^2 x - 4\log x + 3 = 0$. Odtud $\log x_1 = 3 \vee \log x_2 = 1$, je tedy $x_1 = 10^3 \vee x_2 = 10^1$. Obě řešení patří do oboru řešitelnosti. □

Příklad 3.17. Řešte v $\mathbb{R}$ logaritmickou rovnici $\frac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$.

Řešení. Podmínky $x > \frac{3}{2} \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3$. Úpravou $\log(2x-3) = 2\log(x-3)$. Pak $2x - 3 = (x-3)^2$, neboli $2x - 3 = x^2 - 6x + 9$. Z toho $0 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$. Podmínkám vyhovuje pouze $x_1 = 4$. □

Příklad 3.18. Řešte v $\mathbb{R}$ exponenciální rovnici $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\dfrac{125}{8}\right)^{4x-1} = \dfrac{5}{2}$.

Řešení. Upravíme vše na mocniny o základu $a = \frac{5}{2}$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2(x+3)} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3(4x-1)} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x-6+12x-3} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow$$

$$-2x - 6 + 12x - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 10x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

□

Příklad 3.19. V oboru reálných čísel řešte exponenciální rovnici $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Řešení. Položíme $3^x = y$, pak $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+3) = 0$.

$y_1 = 1 \Rightarrow 3^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$; $\quad y_2 = -3$ není možné, neboť $3^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \; x = 0$. □

Cvičení

1. Řešte v $\mathbb{R}$ následující kvadratické rovnice:

   a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
   b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
   c) $5x^2 - 4x + 8 = 0$
   d) $x^2 + 6x = 0$
   e) $5x^2 - 4 = 0$
   f) $x^2 + 16 = 0$

2. V oboru reálných čísel řešte rovnice s absolutními hodnotami:

   a) $|3x - 2| + 4 = 2x + 3$
   b) $|(x-2)(x-4)| = (x-2)(x-4)$
   c) $|(x-4)(x-3)| = |x-4||x-3|$
   d) $|(x-2)(x-5)| = -(x-2)(x-5)$
   e) $\left|\dfrac{x-0,5}{x-1,2}\right| \dfrac{|x-0,5|}{|x-1,2|}$
   f) $\left|\dfrac{3-x}{x-2}\right| = \dfrac{3-x}{x-2}$

3. Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

   a) $|3x - 2| + 4 = 2x + 3$
   b) $-2 < x < 2 \iff |x| < 2$
   c) $-1 \le x < 3 \iff |x-1| \le 2$
   d) $|2x - 1| < 3 \iff |x| < 4$
   e) $d)\ x \in \langle -3; 5) \iff |x| < 5$

4. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\quad \dfrac{1-x}{x-2} - \dfrac{x-2}{1-x} = -\dfrac{8}{3}.$

5. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $x - \dfrac{2}{a^3} = \dfrac{1}{a^2}(4x+1)$, parametr $a \in \mathbb{R}$.

6. Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice $6a - ax + 2x = 15, x \in \mathbb{R}$ měla kladný kořen.

7. Najděte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$.

8. Pro které reálné hodnoty parametru má rovnice

   a) $x^2 - tx + 1 - 2t^2 = 0$ reálné různé kořeny?
   b) $x^2 - x + m^2 - m = 12$ jeden kořen roven nule?

9. Řešte v $\mathbb{R}$ iracionální rovnice:

   a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$

c) $x-3\sqrt{x}-4=0$

d) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=2$

e) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

10. Řešte v $\mathbb{R}$ logaritmické rovnice:

a) $\log(4x+6)-\log(2x-1)=1$

b) $2\log(x-2)=\log(14-x)$

c) $\log(x+1)+\log(x-1)=\log x+\log(x+2)$

d) $\frac{1}{2}\log(2x-3)=\log(x-3)$

11. Řešte v $\mathbb{R}$ exponenciální rovnice:

a) $5^x+1-3\cdot 5^x=-49$

b) $3^{x+1}+3^x=4^{x-1}+4^x$

c) $3\cdot 2^{2x+1}+2\cdot 3^{2x+3}=3\cdot 2^{2x+4}-3^{2x+2}$

d) $\dfrac{64}{25}\cdot\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}}=\left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení řešení rovnic:

1. lineární rovnice,
2. rovnice s absolutní hodnotou,
3. kvadratické rovnice,
4. kubické rovnice,
5. exponenciální rovnice,
6. logaritmické rovnice.

3.3 Soustavy lineárních rovnic

Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být současně splněny, tvoří *soustavu rovnic*. Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic.

Při řešení soustavy se používají *ekvivalentní úpravy soustavy rovnic,* tj. takové úpravy, jimiž se nemění řešení soustavy. V takovém případě není nutná zkouška, ale je vhodná pro kontrolu.

Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:

- Násobení libovolné rovnice soustavy nenulovým číslem.

- Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
- Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

My se budeme zabývat *soustavou lineárních rovnic.* Základním typem metod řešení lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, jejichž podstatou je postupná eliminace (vylučování) neznámých z rovnic soustavy. Podle způsobu, jimž eliminujeme jednu neznámou, rozlišujeme několik metod řešení:

Metoda sčítací - rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.

Příklad 3.20. Metodou sčítací řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavu rovnic. $2x - y = 1,\ x + 3y = 11.$

Řešení. První rovnici vynásobíme třemi, dostáváme rovnici $6x - 3y = 31$. Získali jsme tímto způsobem ekvivalentní soustavu $6x - 3y = 3,\ x + 3y = 11$. Rovnice teď sečteme, tím vyloučíme neznámou y a pro neznámou x dostáváme rovnici

$$7x = 14,\ x = 2.$$

Obdobně lze vyloučit neznámou x vynásobením druhé rovnice minus dvěma a sečtením s první rovnicí. Dostáváme rovnici

$$-7y = -21,\ y = 3.$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y],\ x = 2,\ y = 3.$ □

Metoda dosazovací - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do dalších rovnic, čímž se jedna neznámá ze soustavy vyloučí.

Příklad 3.21. Metodou dosazovací řešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soustavu rovnic. $2x - y = 5,\ 3x + 4y = $ $= -9.$

Řešení. Z první rovnice vyjádříme $y = 2x - 5$, a dosadíme do druhé rovnice. Dostáváme

$$3x + 4(2x - 5) = -9, \quad 11x = -9 + 20, \quad x = 1.$$

Potom $y = 2x - 5 = 2 - 5 = -3$. Dostali jsme řešení $x = 1,\ y = -3.$ □

Metodu sčítací a dosazovací můžeme také kombinovat.

Příklad 3.22. V $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ řešte soustavy rovnic:

a) $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 14x + 4y &= 13 \\ 7x + 2y &= 12 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= 10 \end{aligned}$

Řešení. a) $\begin{aligned} x + y &= 4 \quad / \cdot (-3) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -3x - 3y &= -12 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = 5,\ y = -1$

b) $\begin{aligned} 14x + 4y &= 13 \\ 7x + 2y &= 12 \quad / \cdot 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 14x + 4y &= 13 \\ 14x + 4y &= 24 \end{aligned} \quad \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

c) $$\begin{aligned} 2x-3y&=5 \quad / \cdot 2 \\ 4x-6y&=10 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 4x-6y&=10 \\ 4x-6y&=10 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení $x=t,\ y=\frac{1}{3}(2t-5),\ \ t\in\mathbb{R}$. □

Gaussova eliminační metoda – při řešení více než dvou rovnic je nejvýhodnější použití Gaussovy eliminační metody, která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic ekvivalentními úpravami na tzv. trojúhelníkový tvar.

Příklad 3.23. Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 9x+5y-2z&=15 \qquad (1)\\ 8x+6y+3z&=15 \qquad (2)\\ 3x-7y+4z&=27 \qquad (3)\end{aligned}$$

Řešení. Nejprve soustavu upravíme tak aby v první rovnici koeficient u neznámé x byl 1. Bylo by možné toho dosáhnout dělením první rovnice číslem 9, tím bychom ovšem dostali v první rovnici desetinná čísla. Raději od první rovnice odečteme druhou, čímž dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x-y-5z&=0 \qquad (1)\\ 8x+6y+3z&=15 \qquad (2)\\ 3x-7y+4z&=27 \qquad (3)\end{aligned}$$

Dále v získané soustavě od druhé rovnice odečteme 8-krát první, a od třetí rovnice odečteme 3-krát první. Tím eliminujeme neznámou x v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu:

$$\begin{aligned} x-y-5z&=0 \qquad (1)\\ 14y+43z&=15 \qquad (2)\\ -4y+19z&=27 \qquad (3)\end{aligned}$$

Nyní druhou rovnici dělíme čtrnácti, abychom u neznámé y získali koeficient 1. Dále k třetí rovnici přičteme 4-krát druhou, čímž v ní eliminujeme neznámou y. Tím přecházíme k této soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} x-y-5z&=0 \qquad (1)\\ y+\frac{43}{14}z&=\frac{43}{15} \qquad (2)\\ 219z&=219 \qquad (3)\end{aligned}$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a její řešení určíme snadno takto: Z třetí rovnice po dělení číslem 219 dostáváme: $z=1$. Dosazením do druhé rovnice vypočteme

$$y=\frac{1}{14}(15-43)=-2$$

a po dosazení do první rovnice vychází $x=-2+5=3$.
Dostali jsme řešení $x=3,\ y=-2,\ z=1$. □

Příklad 3.24. V $\mathbb{R}^3$ řešte soustavy rovnic:

a) $$\begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ 3x-y+z&=6\\ x+y+z&=4\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ x+3y+5z&=2\\ 2x+5y+8z&=12\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y+6z&=2\\ x-y+z&=4\end{aligned}$$

Řešení. Soustavy budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ 3x-y+z&=6\\ x+y+z&=4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ -7y-8z&=-15\\ y+2z&=3 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=7\\ y+2z&=3\\ 6z&=6 \end{aligned}$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a můžeme jej snadno vyřešit. Postupně dostáváme $z=1,\ y=3-2z=1,\ x=7-2y-3z=7-2-3=2.$
Dostali jsme tedy řešení $x=2,\ y=1,\ z=1.$

$$\text{b)}\ \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ x+3y+5z&=2\\ 2x+5y+8z&=12 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ y+2z&=1\\ y+2z&=10 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ y+2z&=1\\ 0&=9 \end{aligned}$$

Z trojuhelníkového tvaru vidíme, že soustava nemá řešení.

$$\text{c)}\ \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y+6z&=2\\ x-y+z&=4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 0&=0\\ 3y+2z&=-3 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 3y+2z&=-3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení. Zvolíme-li $z=t$, pak postupně máme $y=-\frac{2}{3}t-1,\quad x=1+\frac{4}{3}t+2-3t=3-\frac{5}{3}t.$
Řešením soustavy je uspořádaná trojice $x=3-\dfrac{5}{3}t,\ y=-1-\dfrac{2}{3}t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R}.$ □

Cvičení

1. Řešte v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 8x-3y+12&=0\\ 3x+2y-33&=0 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x-6y&=-2\\ x-3y&=\ 4 \end{aligned} \qquad \text{c)}\ \begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+4y&=8 \end{aligned}$$

2. Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavy rovnic:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 2x-3y+4z&=8\\ 3x+5y-z&=10\\ 7x-y+7z&=15 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} x+4y-3z&=0\\ x-3y-z&=0\\ 2x+y-4z&=0 \end{aligned} \qquad \text{c)}\ \begin{aligned} x+2y+4z&=31\\ 5x+y+2z&=29\\ 3x-y+z&=10 \end{aligned}$$

3. Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v $\mathbb{R}^4$ soustavy rovnic:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 2x-3y+6z-u&=1\\ x+2y-z\quad&=\text{‘}0\\ x+3y-z-u&=-2\\ 9x-y+15z-5u&=1 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} x+2y-z-2u&=-2\\ 2x+y+z+u&=8\\ x-y-z+u&=1\\ x+2y+2z-u&=4 \end{aligned}$$

4. Určete vzájemnou polohu tří rovin: $\alpha:\ 2x-3y+z=0;\ \beta:\ x+2y-z-3=0;$ $\gamma: 2x+y+z-12=0.$

5. Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic v závislosti na parametru a.
$2x+9y+2z=7a-4$

$$3x + 3y + 4z = 3a - 6$$
$$4x - 6y + 2z = -a - 8$$

3.4 Nerovnice

3.4.1 Řešení nerovnic

Definice 3.25. Jsou-li f a g funkce proměnné x definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha: „najděte všechna $x \in \mathcal{D}$, která po dosazení do jednoho ze vztahů:

$$f(x) < g(x), \ f(x) > g(x), \ f(x) \le g(x), \ f(x) \ge g(x)$$

dají pravdivou nerovnost“ znamená *řešit nerovnici* s neznámou x.

Při řešení nerovnic používáme *ekvivalentní úpravy*:

- Záměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice:

  $f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$

- Přičtení konstanty nebo funkce $h(x)$, definované v $\mathcal{D}$, k oběma stranám nerovnice:

  $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

- Násobení nenulovou konstantou nebo funkcí $h(x)$ definovanou v $\mathcal{D}$:

  a) $h(x) > 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x)$

  b) $h(x) < 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x)$

- Umocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

  $0 \le f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^n(x) < g^n(x), n \in \mathbb{N}$

- Odmocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

  $0 \le f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$

Pokud používáme při řešení nerovnic ekvivalentní úpravy, není potřeba provádět zkoušku, snad jen pro vyloučení vlastních chyb.

3.4.2 Lineární nerovnice

Příklad 3.26. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\dfrac{2x-17}{4} - \dfrac{8-x}{2} - 2 \le x - 4 + \dfrac{x}{8}$.

Řešení. Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením.

$$\begin{aligned}
2(2x-17) - 4(8-x) - 16 &\le 8(x-4) + x \\
4x - 34 - 32 + 4x - 16 &\le 8x - 32 + x \\
4x + 4x - 8x - x &\le -32 + 34 + 32 + 16 \\
-x &\le 50 \setminus \cdot (-1) \\
x &\ge -50 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -50; \infty)
\end{aligned}$$

□

Příklad 3.27. Řešte v $\mathbb{N}$ nerovnici $\dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{5-6x}{2} - 2 \leq 8 + \dfrac{3x}{2}$.

Řešení. Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením, stejně jako když hledáme řešení nerovnice v $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} - 2 &\leq 8 + \frac{3x}{2} \setminus \cdot 4 \\
3x - 1 - 2(5-6x) &\leq 32 + 2\cdot 3x \\
3x - 1 - 10 + 12x &\leq 32 + 6x \\
3x + 12x - 6x &\leq 32 + 1 + 10 \\
9x &\leq 43 \\
x &\leq \frac{43}{9} \ \wedge \ x \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Hledáme řešení v oboru přirozených čísel. Dostaneme $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. □

Příklad 3.28. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici v podílovém tvaru $\dfrac{12-x}{x-4} > 0$.

Řešení. Nerovnice v podílovém tvaru. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{12-x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \ & [(12-x) > 0 \ \wedge \ (x-4) > 0] \ \vee \ [(12-x) < 0 \ \wedge \ (x-4) < 0] \\
& [x < 12 \ \wedge \ x > 4] \ \vee \ [x > 12 \ \wedge \ x < 4] \\
& 4 < x < 12 \ \vee \ x \in \{\ \} \quad \Rightarrow \quad x \in (4; 12).
\end{aligned}$$

Jiný způsob řešení: Najdeme tzv. nulové body čitatele a jmenovatele - to jsou body, ve kterých je polynom v čitateli nebo ve jmenovateli rovný nule - a v intervalech mezi nulovými body zjistíme znaménko čitatele, jmenovatele a nakonec celého zlomku.

	$(-\infty; 4)$	$(4; 12)$	$(12; \infty)$
$12 - x$	$+$	$+$	-
$x - 4$	-	$+$	$+$
podíl	-	$+$	-

Máme ostrou nerovnost, takže řešením naší nerovnice je $x \in (4; 12)$. □

Příklad 3.29. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\dfrac{2-x}{4+x} \leq 1$.

Řešení. Upravíme na podílový tvar:

$$\frac{2-x-4-x}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2(x+1)}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{4+x} \geq 0.$$

Můžeme využít nulových bodů čitatele a jmenovatele, pak dostaneme řešení
$x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty)$. □

3.4.3 Kvadratická nerovnice

Příklad 3.30. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Řešení. $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \geq 0$. Po vyřešení pomocí nulových bodů dostaneme řešení $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)$

Úlohu můžeme řešit také graficky:

$y = x^2 - 4x - 5$ je rovnice paraboly,

její vrcholový tvar je $y + 9 = (x-2)^2$,

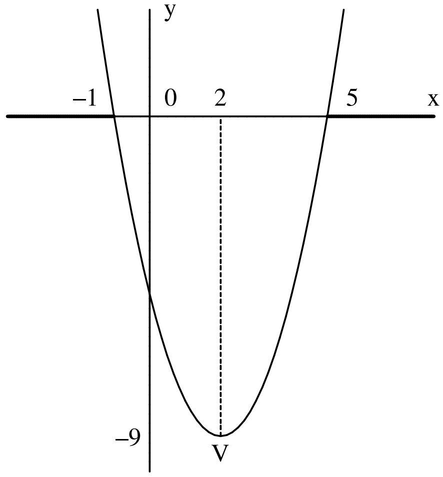
vrchol je $V[2; -9]$, průsečíky s osou x :

$P_1[-1; 0] \qquad P_2[5; 0]$,

protože $(x-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3$

$\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1$. Načrtneme graf.

Vidíme, že $y \geq 0$ pro $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)$.



$\square$

Příklad 3.31. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\dfrac{x+3}{x-1} + \dfrac{x+4}{x-4} \geq 2$.

Řešení. Převedeme na podílový tvar

$$\frac{(x+3)(x-4) + (x+4)(x-1) - 2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \geq 0 \quad \text{a po úpravě} \quad \frac{12(x-2)}{(x-1)(x-4)} \geq 0.$$

Řešíme pomocí nulových bodů:

	$(-\infty; 1)$	$(1; 2\rangle$	$\langle 2; 4)$	$(4; \infty)$
$x-1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
zlomek	-	+	-	+

$x \in (1; 2\rangle \cup (4; \infty)$

$\square$

3.4.4 Nerovnice s absolutními hodnotami

Příklad 3.32. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $|12 - x| > 15 - |x+3|$.

Řešení. Pomocí nulových bodů výrazů v absolutních hodnotách rozdělíme $\mathbb{R}$ na intervaly, ve kterých nerovnice řešíme. Pro $\underbrace{x \in (-\infty; -3\rangle : \quad 12 - x > 15 + (x+3) \Rightarrow x < -3.}_{x < -3}$

Pro $\underbrace{x \in (-3;12\rangle: \quad 12 - x > 15 - (x+3) \Rightarrow 12 < 12.}_{x \in \{\,\}}$

Pro $\underbrace{x \in (12;\infty): \quad -12 + x > 15 - (x+3) \Rightarrow x > 12.}_{x > 12} \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty;-3) \cup (12;\infty).$ □

3.4.5 Iracionální nerovnice a soustavy nerovnic

Příklad 3.33. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\sqrt{x-3} < 5$.

Řešení. Nerovnice má smysl pouze pro $x - 3 \geq 0$ t.j. $x \geq 3$, potom na obou stranách nerovnice jsou nezáporná čísla a lze umocnit: $x - 3 < 25 \Rightarrow x < 28$. Řešení je pak $x \in \langle 3;28)$. □

Příklad 3.34. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x + 1 < \sqrt{6x - 14}$.

Řešení. Řešíme za předpokladu $6x - 14 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0$, tedy $x \geq \frac{7}{3}$. Po umocnění $x^2 + 2x + 1 < 6x - 14 \Rightarrow x^2 - 4x + 15 < 0$. Kvadratická rovnice $x^2 - 4x + 15 = 0$ má komplexní kořeny ($D < 0$). Parabola $y = x^2 - 4x + 15$ nikde neprotne osu x, proto řešení je $x \in \{\,\}$. □

Příklad 3.35. Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu nerovnic $\frac{1}{x+1} > 0 \quad \wedge \quad x^3 - x^2 < 0$.

Řešení. Ekvivalentní soustava je $x + 1 > 0 \quad \wedge \quad x^2(x-1) < 0$. Na znaménko polynomu nemají vliv kořeny se sudou násobností.

Tedy $x \in (-1;0) \cup (0;1)$. □

Cvičení

1. Která přirozená čísla splňují nerovnici $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{2x+6}{3} > \dfrac{4x-2}{5}$?

2. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice: a) $\dfrac{1-3x}{x+4} < 2$ b) $\dfrac{x+2}{1-x} \leq -2$ c) $\dfrac{3x-1}{x+1} < 2$ d) $\dfrac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1$

3. V množině celých záporných čísel řešte nerovnici $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x-2}{3} - 5 > \dfrac{x-1}{2}$.

4. Jaké musí být číslo k, aby rovnice $5kx - 9 = 10x - 3k$ měla kladné řešení?

5. Řešte v $\mathbb{R}$ kvadratické nerovnice:

   a) $2x^2 - 3x - 2 > 0$ b) $20x - x^2 \geq 36$

   c) $x^2 + x + 1 < 0$ d) $x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 \leq 0$

6. Pro která $m \in \mathbb{R}$ bude platit $x^2 + 6x + (5m-1)(m-1) > 0$ pro všechna reálná x?

7. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{2x-1}{3x+1} \geq 0$ b) $x(x^2 - 7x + 10) > 0$

c) $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - x - 2} < 0$ d) $\dfrac{x^4}{x+2} + \dfrac{x^4}{3-x} < \dfrac{(10x-6)x^2}{-x^2+x+6}$

8. V oboru reálných čísel řešte nerovnice: a) $|x-3| > 5$ b) $|x+2| < 8$

9. Pomocí absolutní hodnoty zapište nerovnice: a) $-2 < x < 2$ b) $1 \leq x \leq 3$ c) $-3 \leq x \leq -1$

10. Najděte množinu všech řešení nerovnic s absolutní hodnotou:

a) $|x| + \dfrac{1}{x} < 0$ b) $\dfrac{|x|}{x} - 1 < 0$

c) $|x+1| + |x| \leq 2$ d) $1 - |x| \leq |x+1|$

e) $\dfrac{|2x-2|}{2-x} < 1$ f) $|x| \leq |x-1|$

g) $|3x+1| < 2x$ h) $|x+2| - 2|2x+4| \leq |3x-1|$

i) $|x-3| \cdot |x-2| \cdot |x+4| > 0$

11. Řešte v $\mathbb{R}$ iracionální nerovnice:

a) $\sqrt{x^2 + x - 12} \leq 6 - x$ b) $x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$

c) $\sqrt{x+2} < \sqrt{2x-8}$ d) $\sqrt{x-2} + x > 4$

e) $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > \sqrt{3}$

12. Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu nerovnic $x^2 - 4x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x^2 - 8x + 15 < 0.$

13. Najděte $x \in \mathbb{R}$, která splňují složenou nerovnost.

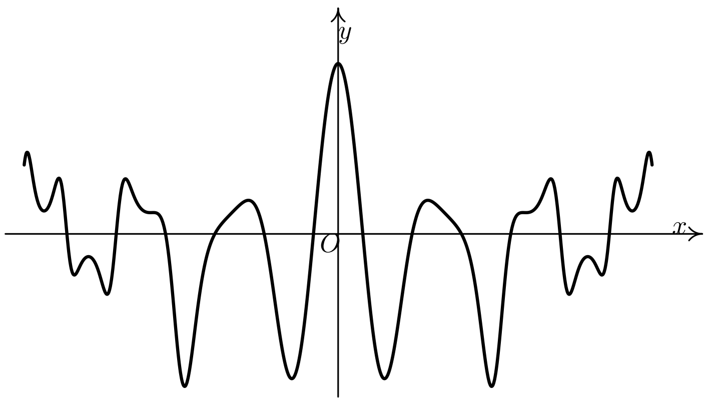
a) $\dfrac{x}{2} - 1 < |x| < \dfrac{x}{2} + 1$ b) $|3x-1| < x < |3x+1|$

14. Najděte zlomek, pro nějž platí: zmenšíme-li jmenovatele o 1, je zlomek roven $\frac{1}{2}$, zvětšíme-li čitatele o 20, dostaneme zlomek z intervalu (2;3).

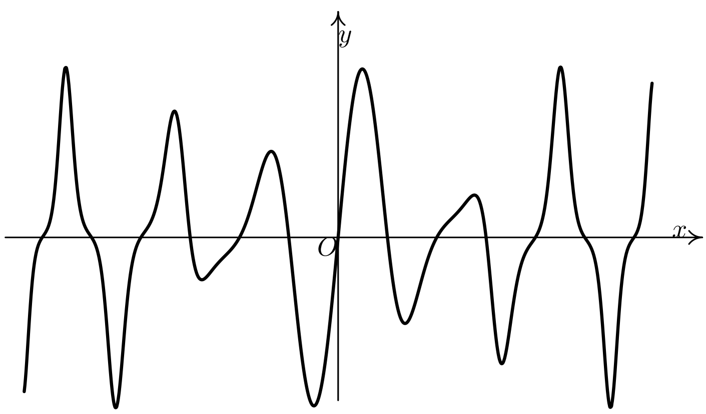
4 Funkce jedné proměnné

4.1 Vlastnosti funkcí

Definice 4.1. Nechť je f funkce definovaná na množině $D(f) \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
Říkáme, že funkce f je *sudá funkce,* jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$.
Podobně funkce f se nazývá *lichá funkce,* jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$.



Obr. 4.1: Graf sudé funkce



Obr. 4.2: Graf liché funkce

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Příklad 4.2. Zjistěte, zda funkce a) $y = x^2$, b) $y = x^3$, c) $y = (x-1)^2$ je sudá nebo lichá.

Řešení. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Funkce je sudá.
b) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Funkce je lichá.
c) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \neq f(x)$, $(x+1)^2 \neq f(-x)$. Funkce není ani sudá ani lichá. $\square$

Definice 4.3. Funkce f se nazývá *periodická funkce*, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$. Číslo p se nazývá *perioda funkce* f.

Jestliže p je perioda funkce f, potom platí, že $f(x + kp) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$ a každé celé k. Má-li tedy periodická funkce f periodu p, pak také každé číslo kp, ($k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce f. Nejvýznamnějšími příklady periodických funkcí jsou goniometrické funkce.

Definice 4.4. Funkce f se nazývá *zdola omezená na množině* $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$. Podobně funkce f se nazývá *shora omezená na množině* $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo h, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$. Funkce f se nazývá *omezená na množině* $M \subset D(f)$, právě když je zdola omezená a shora omezená na množině M.

Definice 4.5. Funkce se nazývá *monotonní* na množině $M \subset D(f)$, pokud má některou z následujících vlastnosti:

- Funkce f se nazývá *rostoucí na množině* $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
  Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá *klesající na množině* $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
  Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá *neklesající na množině* $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
  Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá *nerostoucí na množině* $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
  Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají *ryze monotonní funkce na množině* M.

Cvičení

1. Zjistěte zda je funkce :

   $a)\ y = \dfrac{x^3}{\sin x}$ $\quad b)\ y = x^2 \sin x$ $\quad c)\ y = \dfrac{\sin x}{x-1}$ $\quad d)\ y = e^x \cos x$

   sudá nebo lichá.

2. Najděte příklad (načrtněte graf) funkce, která je :

   $a)$ omezená zdola na svém definičním oboru

   b) omezená shora na svém definičním oboru

   c) omezená shora i zdola na intervalu $(0, 5)$

   d) rostoucí na svém definičním oboru

   e) klesající na intervalu $(-6, 0)$

   f) periodická na svém definičním oboru

4.2 Inverzní funkce

Definice 4.6. Funkce f s definičním oborem $D(f)$ se nazývá *prostá funkce,* právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice 4.7. Je-li f prostá funkce s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to *funkce inverzní k funkci* f a značíme ji f^{-1}.

Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$ právě když $y = f(x)$. Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Příklad 4.8. Určete funkci inverzní k funkci $f : y = 3x + 2$.

Řešení. Funkce f je lineární a je prostá.

Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme x a y a z nové rovnice vyjádříme y.

$f^{-1} : x = 3y + 2$ Z toho $f^{-1} : y = \frac{1}{3}(x - 2)$.

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$. □

Příklad 4.9. Určete funkci inverzní k funkcím : a) $y = \ln(2x + 8)$ $\quad$ b) $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$

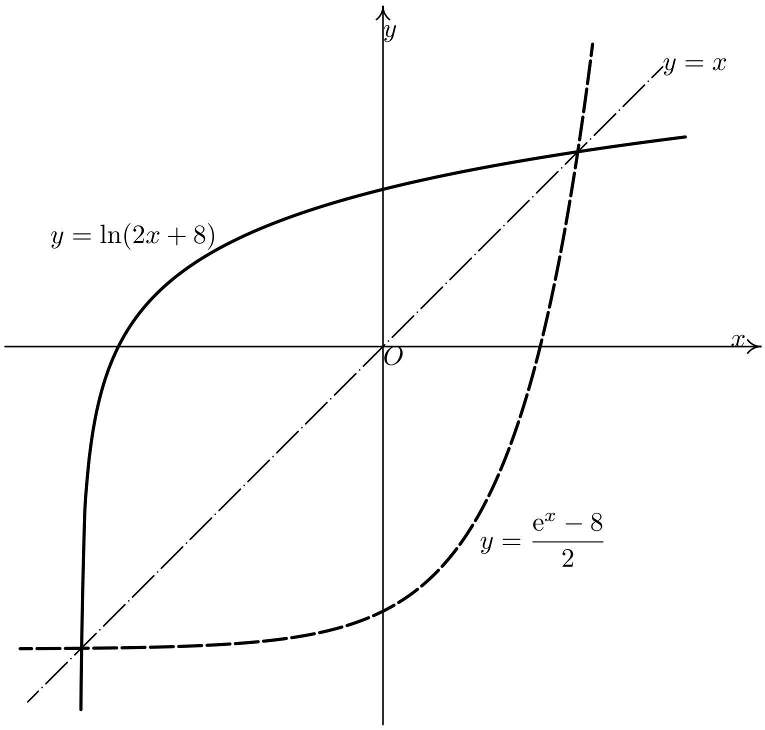
Řešení. a) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $2x + 8 > 0$. Dostaneme $D(f) = (-4, \infty)$. Funkce f je logaritmická funkce složená s lineární. Je to funkce složená ze dvou prostých funkcí, tedy je i f prostá funkce. Zaměníme x a y a z této nové rovnice vyjádříme y.

$$f^{-1} : x = \ln(2y + 8)$$

Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:

$$e^x = 2y + 8 \qquad e^x - 8 = 2y$$

Proto inverzní funkce k funkci $f : y = \ln(2x + 8)$ je funkce $f^{-1} : y = \frac{e^x - 8}{2}$.



Obr. 4.3: Graf funkce $y = \ln(2x + 8)$ a funkce k ní inverzní

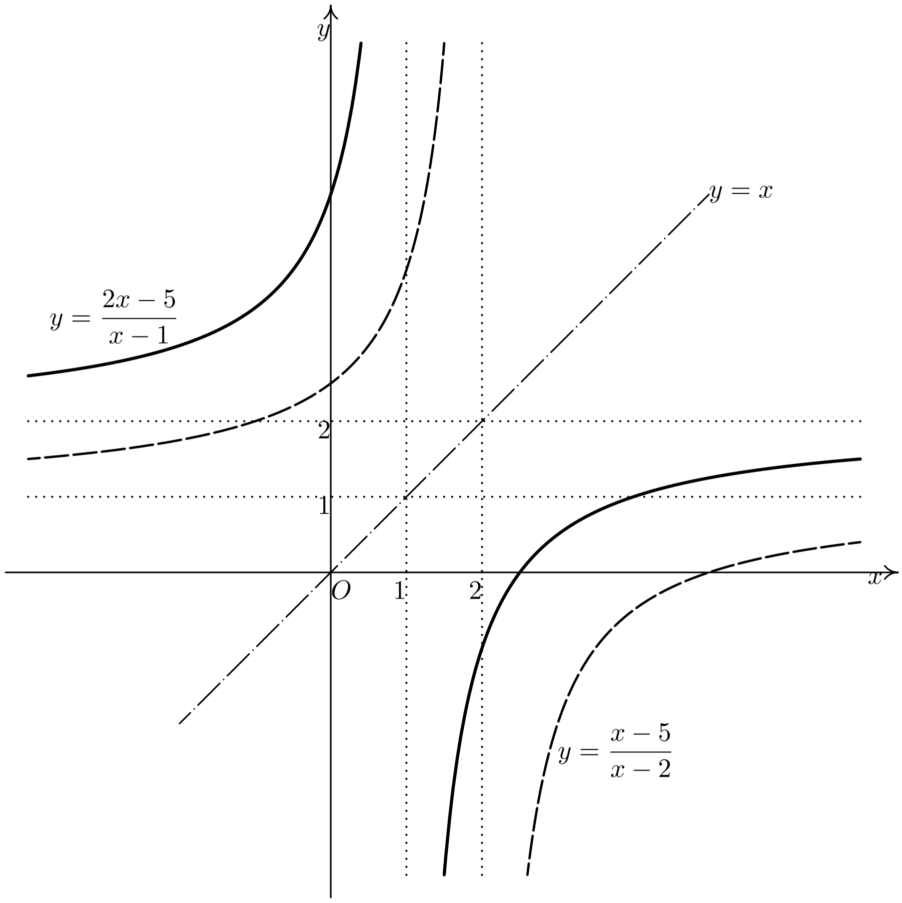
Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$, a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že $H(f^{-1}) = D(f) = (-4, \infty)$.

b) Aby byla funkce $y = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$ definovaná, musí být $x \neq 1$. Můžeme tedy psát, že $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Funkce f je lineární lomená funkce, a je i prostá (grafem této funkce je hyperbola). Pro výpočet inverzní funkce zaměníme v zadání funkce x a y.

$$f^{-1} : x = \frac{2y - 5}{y - 1} \Rightarrow$$

$$x(y - 1) = 2y - 5 \;\Rightarrow\; xy - x = 2y - 5 \;\Rightarrow\; xy - 2y = x - 5 \;\Rightarrow\; y(x - 2) = x - 5$$

$$f^{-1} : y = \frac{x - 5}{x - 2}$$



Obr. 4.4: Graf funkce $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ a funkce k ní inverzní

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $x \neq 2$. $D(f^{-1}) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = H(f)$, a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že $H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. $\square$

Cvičení

1. Určete funkci inverzní k funkcím : a) $y = 3x - 4$, b) $y = 10^x + 5$, c) $y = \dfrac{2x+1}{3x-6}$.

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení inverzní funkce:

1. inverzní funkce.

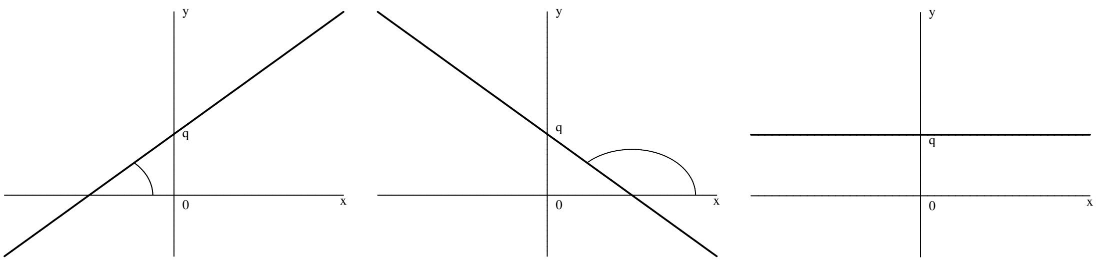
4.3 Základní elementární funkce

4.3.1 Mocninné funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci f, která je daná předpisem

$$f : y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}.$$

Grafem lineární funkce je vždy přímka různoběžná s osou O_y. Definiční obor $\mathcal{D}$ lineární funkce f (značíme $\mathcal{D}(f)$) je $\mathbb{R}$. Obor hodnot funkce f pro $k \neq 0$ (značíme $\mathcal{H}(f)$) je $\mathbb{R}$. Pro $k = 0$ dostáváme *konstantní funkci*. Význam konstant k a q je vidět z následujícího obrázku:



$k > 0$	$k < 0,$	$k = 0$
$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}$	$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha > \frac{\pi}{2}$	$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha = 0$
rostoucí funkce	klesající funkce	konstantní funkce

Řešení.

Příklad 4.10. Určete lineární funkci, jejíž graf prochází body $[-2; -3]$, $[-1; -4]$ a jejíž obor funkčních hodnot je interval $\langle -6; 0\rangle$. Sestrojte graf.

Řešení. $y = kx + q$. Dosadíme souřadnice bodů.

Pak $-3 = -2k + q \ \wedge\ -4 = -k + q$.

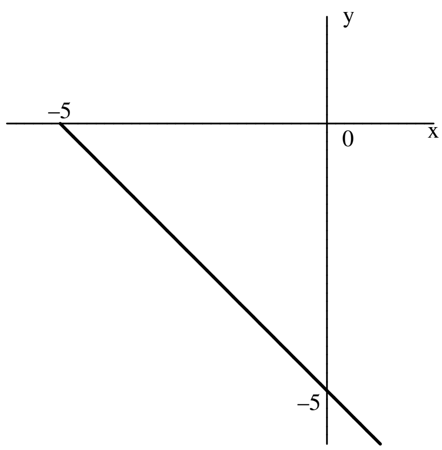
Řešením této soustavy dostaneme

$k = -1,\ q = -5$.

Lineární funkce pak je $y = -x - 5$.

$y \in \langle -6; 0\rangle \quad \Rightarrow \quad$ krajní body úsečky jsou

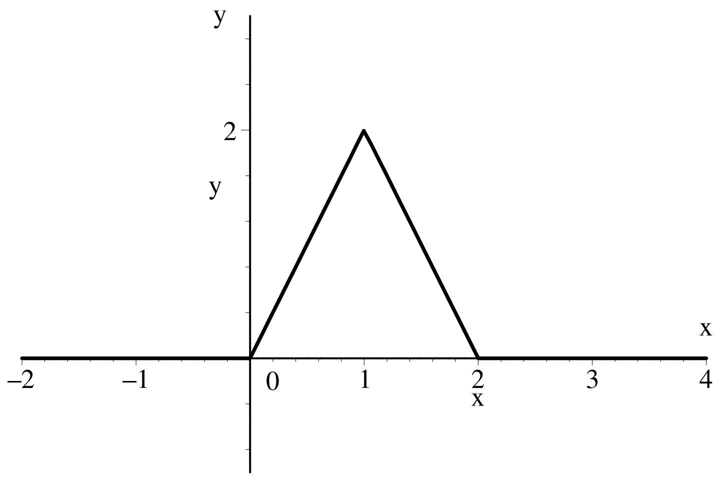
$[1; -6],\ [-5; 0]$.



Příklad 4.11. Nakreslete graf funkce $y = |x| - 2|x - 1| + |x - 2|$.

Řešení. Body $x = 0, 1, 2$ rozdělí osu x na čtyři intervaly a určíme tvar funkce y v jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;0\rangle$	$(0;1\rangle$	$(1;2\rangle$	$(2;\infty)$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x	x
$-2\lvert x-1\rvert$	$-2(-x+1)$	$-2(-x+1)$	$-2(x-1)$	$-2(x-1)$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
y	0	$2x$	$-2x+4$	0



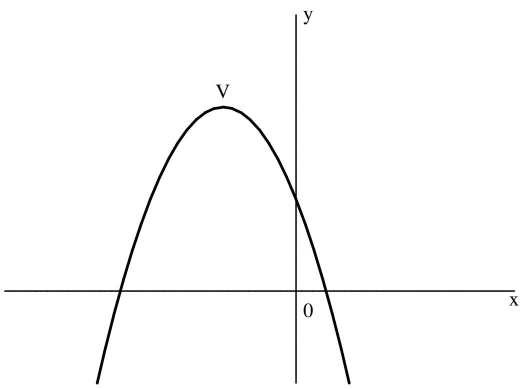
$y = |x| - 2|x-1| + |x-2|$

□

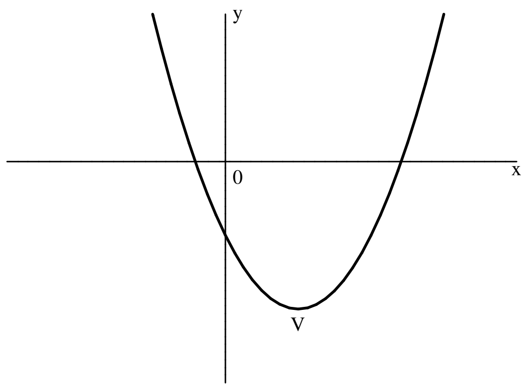
Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, která je daná předpisem

$$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Definiční obor kvadratické funkce f je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou s osou y.



$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$



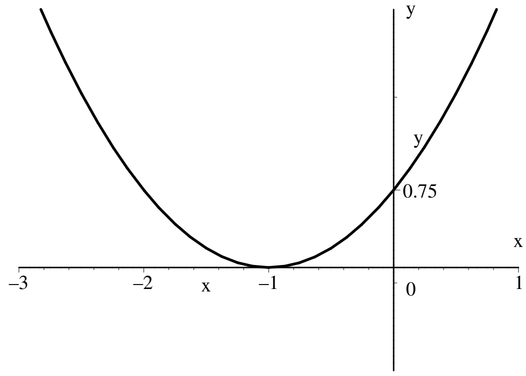
$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Máme-li sestrojit graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$, vyjdeme ze základní paraboly $y = x^2$ a postupnými transformacemi určíme souřadnice vrcholu. Je také vhodné určit průsečíky s osami. Obecně platí, že rovnoběžným posunutím paraboly $y = ax^2$ do vrcholu

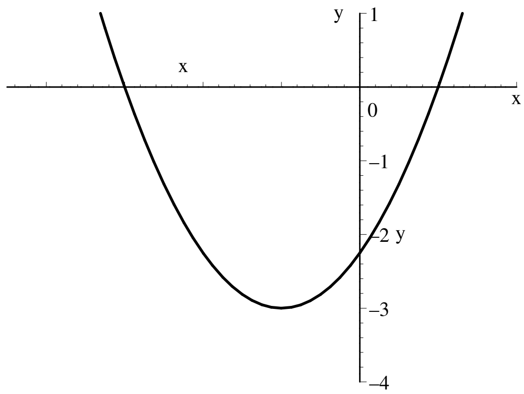
$V(m;n)$ dostaneme parabolu $y - n = a(x - m)^2$. Osa paraboly zůstává rovnoběžná s osou y.

Příklad 4.12. Načrtněte graf kvadratické funkce $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

Řešení. Předpis upravíme na tvar $y + 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$ a postupně sestrojíme $y_1 = x^2,\ y_2 = (x + 1)^2,\ y_3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2,\ y = \frac{3}{4}(x + 1)^2 - 3$ neboli $y - 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$.



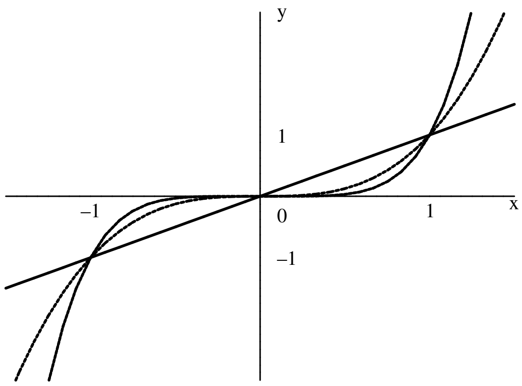
$y_3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$



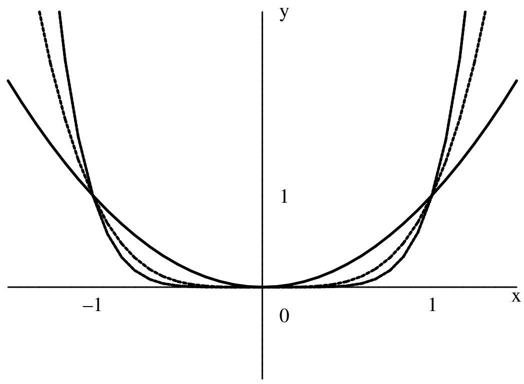
$y - 3 = \frac{3}{4}(x + 1)^2$

$\square$

Mocninná funkce s přirozeným exponentem je funkce $f : y = x^n,\ \ n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je tato funkce lineární, pro $n = 2$ kvadratická. Definiční obor mocninné funkce je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.



liché n, $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$



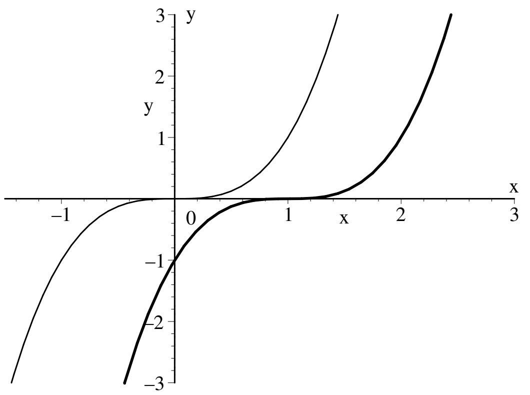
sudé n, $\mathcal{H}_f = \langle 0; \infty)$

Příklad 4.13. Načrtněte grafy funkcí $f_1 : y = (x - 1)^3,\ f_2 : y = |x^4 - 3|$.

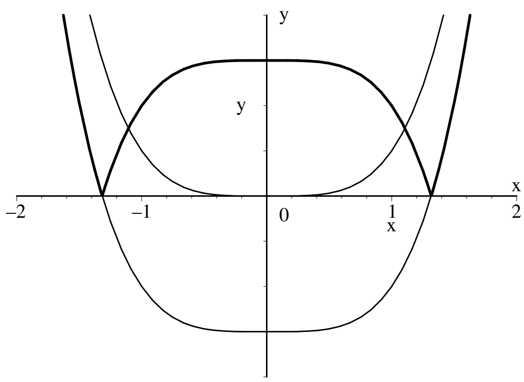
Řešení. Upravíme analogicky jako u kvadratické funkce:

$f_1 : y + 0 = (x-1)^3,\ V[1;0]$

f_2 : Nakreslíme postupně grafy $y_1 + 3 = x^4$ a pak $y = |y_1|$.



$f_2 : y + 0 = (x-1)^3$



$f_4 : y = |x^4 - 3|$

□

Příklad 4.14. Bez výpočtu rozhodněte, které z čísel $4^{300},\ 3^{400}$je větší.

Řešení. Upravíme $4^{300} = (4^3)^{100},\ 3^{400} = (3^4)^{100}$.
Obě mocniny lze chápat jako hodnoty funkce $y = x^{100}$.
Tato funkce je pro $x \in \langle 0 : \infty)$ rostoucí, $4^3 < 3^4$, proto $4^{300} < 3^{400}$.

□

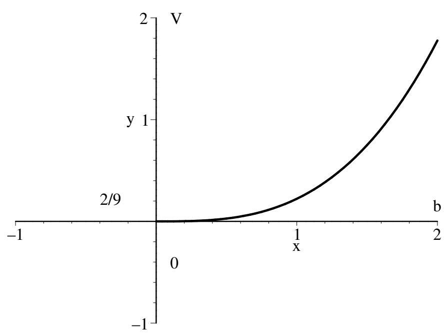
Příklad 4.15. Uvažujme množinu všech kvádrů, jejichž délky hran jsou v poměru 1 : 2 : 3. Určete funkci vyjadřující závislost objemu kvádru na délce jeho nejdelší hrany a načrtněte její graf.

Řešení.

Označme délku nejdelší hrany b,

pak $a = \frac{b}{3};\ c = \frac{2}{3}b$ pro $b > 0$.

Pak $V = \frac{2}{9}b^3$.



□

Příklad 4.16. Určete definiční obor funkcí: a) $y = \sqrt{2x-6}$, b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Řešení. a) Aby byla funkce $y = \sqrt{2x-6}$ definovaná, musí být $2x - 6 \geq 0$, tedy $x \geq 3$. Můžeme tedy psát, že $D(f) =< 3, \infty)$.

b) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0,\ x \neq -1$.

Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $x = -1$ a $x = 1$.
Dostaneme $D(f) = (-\infty, -1) \cup < 1, \infty)$. $\square$

Mocninná funkce s celým záporným exponentem je funkce $f : y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definiční obor této funkce $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Lineární lomená funkce je funkce daná předpisem

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0.$$

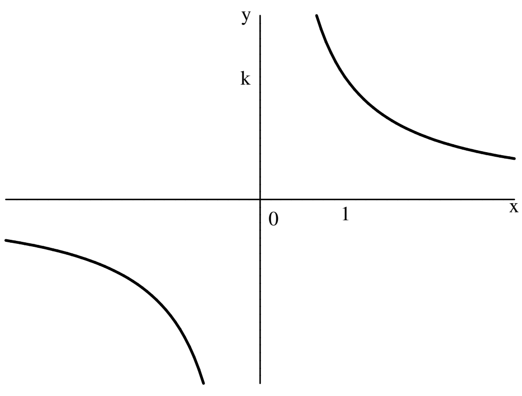
Definiční obor této funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$. Nejjednodušší případ nastane pro $a = d = 0$, pak $y = \frac{k}{x}$ a grafem je *rovnoosá hyperbola.*

V případě, kdy $ad - cb \neq 0$, dostaneme po úpravě $y - \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ opět rovnoosou hyperbolu se středem v bodě $S\left[-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right]$, asymptoty procházejí středem a jsou rovnoběžné s osami souřadnými.

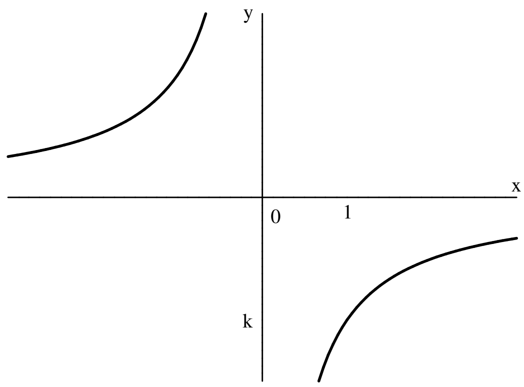
Příklad 4.17. Nakreslete grafy funkcí: a) $f : y = \dfrac{k}{x}$ (nepřímá úměrnost),

b) $f : y = \dfrac{1 - x}{x - 2}$.

Řešení. a) Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola v I. a III. kvadratu pro $k > 0$, a v II. a IV. kvadratu pro $k < 0$.



$f : y = \frac{k}{x}$, $k > 0$

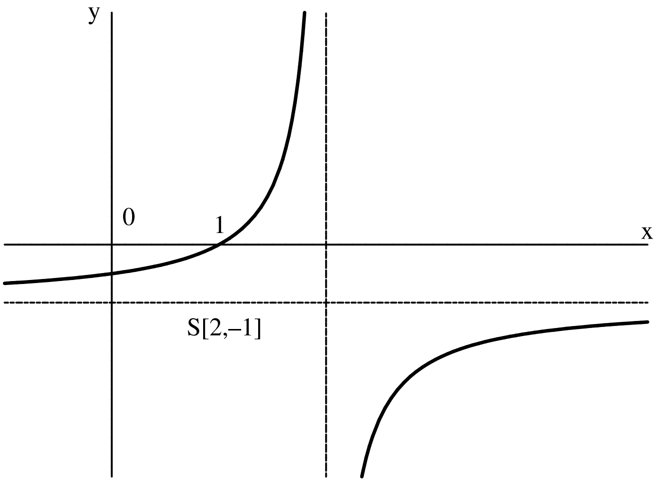


$f : y = \frac{k}{x}$, $k < 0$

b) Upravíme $y = \dfrac{1 - x + 2 - 2}{x - 2} = \dfrac{-x + 2 - 1}{x - 2} = -1 - \dfrac{1}{x - 2}$, tedy $y + 1 = \dfrac{-1}{x - 2}$.

Asymptoty procházejí bodem $S[2; -1]$. Můžeme určit průsečíky se souřadnými osami:

$X[1; 0]$, $Y[0; -0{,}5]$



□

4.3.2 Exponenciální funkce a logaritmická funkce

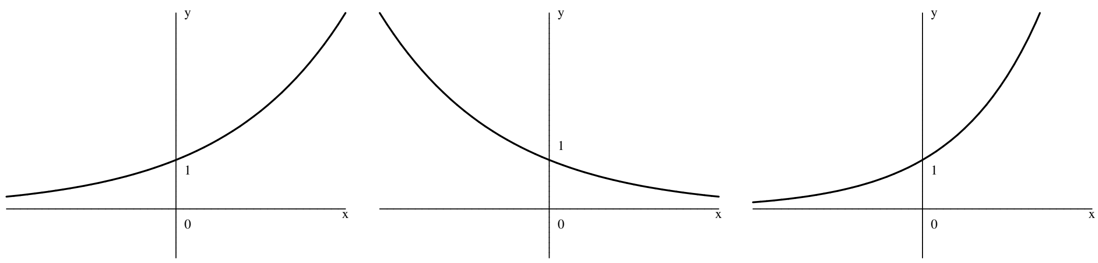
Exponenciální funkce o základu $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$ je každá funkce

$$f : y = a^x.$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Obor hodnot $\mathcal{H}_f = (0; \infty)$.

Pro případ $a = e$ dostaneme *přirozenou* exponenciální funkci.

Graficky:



$y = a^x, \ a > 1$ $\quad$ $y = a^x, \ 0 < a < 1$ $\quad$ $y = e^x$

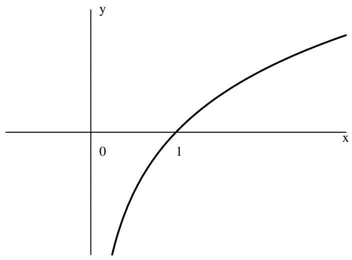
Inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$ je *logaritmická funkce o základu* $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$. Značíme

$$f : y = \log_a x.$$

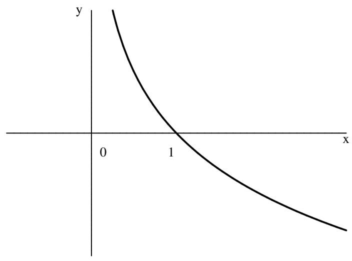
Definiční obor $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Obor hodnot $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

Pro základ $a = e$ dostaneme *přirozený* logaritmus, který používáme nejčastěji.

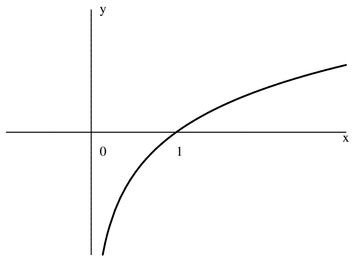
Graficky:



$y = \log_a x,\ a > 1$



$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



$y = \ln x$

Cvičení

1. Načrtněte grafy funkcí:

   a) $y = 2|x+1| - 3|x-1|,\ x \in \mathbb{R}$ *b)* $y = |x| + x,\ x \in \mathbb{R}$

   c) $y = \sqrt{(x-1)^2},\ x \in \langle -3; \infty)$

2. Úpravou rovnice paraboly určete souřadnice vrcholu a průsečíky P_1 a P_2 s osou O_x, průsečík Q s osou O_y. a) $y = 2x^2 - 4x - 6$, b) $y = -x^2 + 4x$.

3. Najděte všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž exponenciální funkce $\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^x$ je a) rostoucí, b) klesající.

4. Najděte definiční obor těchto funkcí:

   a) $y = \log_a(x+3)$ *b)* $y = \log_3 x^2$ *c)* $y = \log_5(-x)$

   d) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$ *e)* $y = \log_5 \sqrt{4-x}$ *f)* $y = \sqrt{\log_3 x}$

   g) $y = \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{\frac{x}{3-2x}}$ *h)* $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

5. Najděte definiční obor následujících funkcí:

   a) $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$ *b)* $y = 2^{\sqrt{9-x^2}} + \log(3x-5)$

   c) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \ln\,(x+2)$ *d)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}}$

   e) $y = \sqrt{1 - \log \frac{1-x}{1+x}}$ *f)* $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{\log\,(2x+5)}$

6. Sestrojte graf lineární lomené funkce a) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, b) $y = \dfrac{1+4x}{x}$, c) $y = \dfrac{2x}{2+x}$.

7. V téže kartézské soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí:

   a) $y = 1{,}5^x,\ y = 1{,}5^{|x|},\ y = 1{,}5^{-|x|},\ y = -1{,}5^{|x|}$

   b) $y = \log_3 x,\ y = \log_3(x-2),\ y = \log_3(x+2),\ y = 2 - \log_3 x$

Maplety

Odkaz na maplety k procvičení elementárních funkcí:

1. kreslení grafu,
2. skládání funkcí.

4.4 Goniometrické funkce

4.4.1 Oblouková míra

V matematice, ve fyzice a v technické praxi se používá na určování velikosti úhlu tzv. *oblouková míra.* Je dán úhel ABC. Sestrojíme kružnici se středem v bodě B (ve vrcholu úhlu). Jestliže r je poloměr kružnice a s je délka oblouku kružnice uvnitř úhlu ABC, potom velikost tohoto úhlu je $\frac{s}{r}$ radiánů.

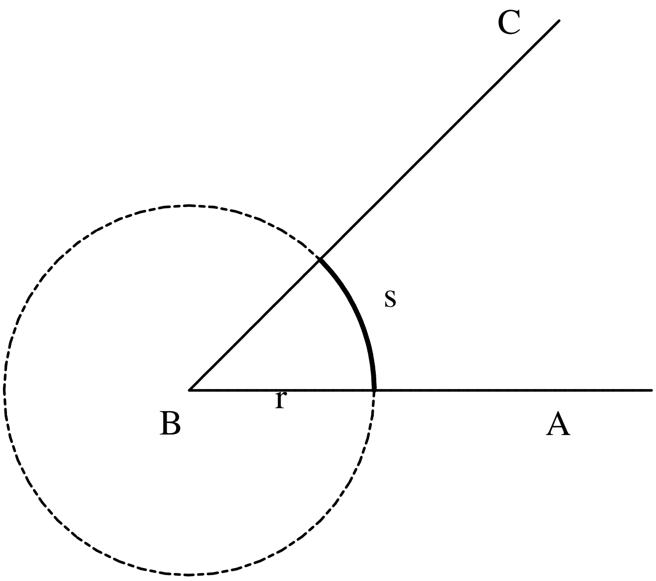
$$\angle ABC = \frac{s}{r}\ \text{rad}.$$

Toto číslo nezávisí na poloměru kružnice.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radiánů}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radiánů}$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$



Příklad 4.18. Vyjádřete úhel 15° v obloukové míře.

Řešení. Kružnice má délku $2\pi r$ a velikost úhlu $360°$ v radiánech je $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Z toho $1° = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$ radiánů. Tedy $15° = 15 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{12}$. □

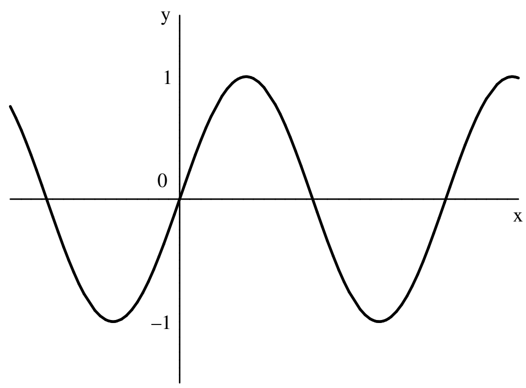
Dále budeme pracovat s orientovanými úhly. *Orientovaný úhel* si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky (nejlépe kladné poloosy O_x) otáčející se kolem svého počátku a to v jednom ze dvou navzájem opačných smyslů. Buď proti pohybu hodinových ručiček, tak dostaneme kladné úhly (např. $\frac{\pi}{2}, 6\pi$, atd), nebo ve směru hodinových ručiček a tak dostaneme záporné úhly (např. $-\frac{\pi}{12}, -4\pi$, atd).

4.4.2 Goniometrické funkce

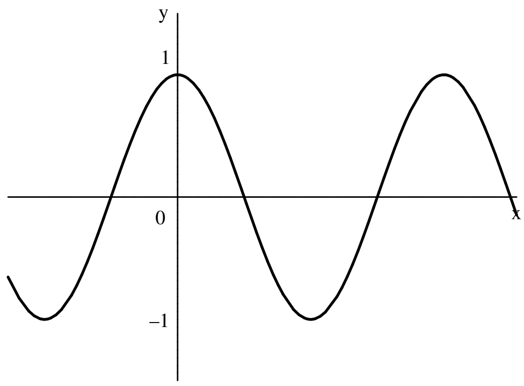
Definice 4.19. V kartézské souřadnicové soustavě sestrojme kružnici o středu v počátku a poloměru 1. Uvažujme orientovaný úhel o velikosti ψ radiánů, jehož vrchol je v počátku a počáteční rameno kladná poloosa x. Druhé rameno protne kružnici v bodě P. Potom definujeme *kosinus* úhlu ψ jako x-ovou souřadnici bodu P. Označujeme $\cos\psi$. Podobně y-ová souřadnice bodu P se nazývá *sinus* úhlu ψ. Označujeme $\sin\psi$.

Obě funkce jsou periodické, jejich nejmenší perioda je 2π. Definičním oborem obou funkcí je $\mathbb{R}$, oborem hodnot je $\langle -1; 1\rangle$. Grafem je sinusoida (kosinusoida).

Snadno se dá ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

Funkce $f : y = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je lichá: $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce $f : y = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je sudá: $\cos(-x) = \cos x$.

Definice 4.20. *Tangens* je funkce, která každému reálnému číslu x, pro něž je $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo

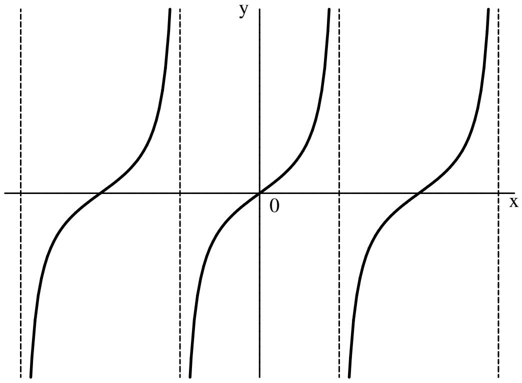
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, kde k je celé číslo $\}$. Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

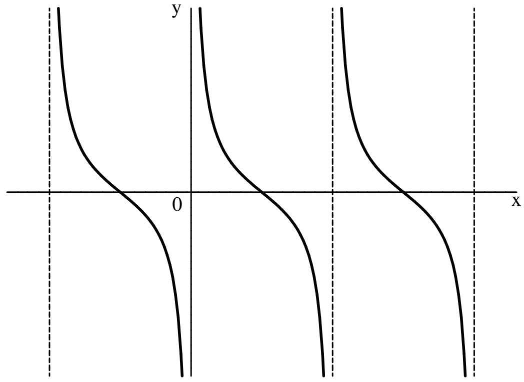
Definice 4.21. *Kotangens* je funkce, která každému reálnému číslu x, pro něž je $\sin x \neq$ $= 0$, přiřadí číslo

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$, kde k je celé číslo $\}$. Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{cotg} x$

Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou periodické funkce s periodou π.

Obě funkce jsou liché: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ pro všechna x z definičního oboru.

V následující tabulce jsou vypočteny hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in \langle 0; 2\pi)$, které je vhodné si pamatovat.

Tab. 4.1: Hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0	
$\operatorname{cotg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Dále uvedeme některé důležité vzorce, které budou užitečné při řešení úloh souvisejících s goniometrickými funkcemi. Pro každé $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí:

- $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$
- $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$
- $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$
- $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$

Příklad 4.22. Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí v daných bodech :

a) $\alpha = \dfrac{5}{3}\pi$ b) $\alpha = -\dfrac{2}{3}\pi$ c) $\alpha = \dfrac{25}{4}\pi$

Řešení. a) $\alpha = \frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi \;\Rightarrow\; \sin(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$: Funkce $\sin x,\ \cos x$ jsou periodické s periodou 2π. Platí:

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\frac{4}{3}\pi = \sin(\pi + \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\frac{4}{3}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\alpha = \frac{25}{4}\pi, \quad \sin(\frac{25}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(\frac{25}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = 1$ □

Pro každé reálné x platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Pro každé reálné x a celé $k,\ x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$ platí: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu:

- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin 2x = 2\sin x\cos x$; $\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

Součtové vzorce:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \neq \frac{2k+1}{2}\pi: \ \operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

Příklad 4.23. Vypočítejte $\cos \frac{5}{12}\pi$.

Řešení. $\cos \dfrac{5}{12}\pi = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

□

Příklad 4.24. Vypočtěte hodnoty funkcí $\cos\alpha$, $\sin(2\alpha)$, $\operatorname{tg}(2\alpha)$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, jestliže $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Řešení. $|\cos\alpha| = \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{25} = \dfrac{24}{25}$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \dfrac{24}{7}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ 0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{10}}$ □

4.4.3 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, které obsahují neznámou jako argument jedné nebo několika goniometrických funkcí.

Příklad 4.25. Vyřešte v $\mathbb{R}$ goniometrické rovnice:

a) $2\sin(3x) = \sqrt{2}$ b) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$ c) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

Řešení. a) Upravíme: $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Sinus má kladné hodnoty v I. a II. kvadrantu.

Tedy $3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Odtud

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Upravíme levou stranu rovnice: $\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x)$.

Potom rovnice má tvar $-\cos(2x) = 0{,}5$, tzn. $\cos(2x) = -0{,}5$. Funkce kosinus má záporné hodnoty v II. a III. kvadrantu.

Potom $2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Odtud

$$x = \frac{1}{3}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Upravíme levou stranu rovnice:

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = -2\cos^2 x - 5\cos x + 3$$

Potom rovnice má tvar $-2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$ t.j. $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$. Položíme $y = \cos x$ a dostaneme kvadratickou rovnici $2y^2 + 5y - 3 = 0$. Tato rovnice má kořeny $y_1 = -3$ a $y_2 = \frac{1}{2}$. Protože $|-3| > 1$, řešíme jen rovnici $\cos x = \frac{1}{2}$. Funkce kosinus má kladné hodnoty v I. a IV. kvadrantu. Dostaneme

$$x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Cvičení

1. Vypočítejte následující úhly v obloukové míře: a) $\alpha = 135°$ b) $\alpha = -75°$ c) $\alpha = 200°$

2. Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ v daných bodech :

   a) $\alpha = -\dfrac{7}{3}\pi$ b) $\alpha = \dfrac{21}{4}\pi$ c) $\alpha = \dfrac{5}{6}\pi$ d) $\alpha = -\dfrac{11}{4}\pi$

3. Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ jestliže platí, že $\operatorname{cotg} x = -3$ a $x \in \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \rangle$.

4. Vyřešte v $\mathbb{R}$ goniometrické rovnice:

   a) $\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

   c) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} = 1$ d) $\sqrt{3}\ \operatorname{tg}^2 x - 4\ \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

   e) $2\sin x = \sqrt{3}\ \operatorname{tg} x$ f) $\sin x + \cos 2x = 1$

   g) $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$ h) $1 + \sin x = 2\cos^2 x$

5. Řešte v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ rovnici $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$.

6. Řešte v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ rovnici $\sin^2 x + \mathrm{tg}^2\, x = \dfrac{3}{2}$.

7. Upravte následující výrazy pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které jsou definovány:

a) $\dfrac{2\sin x + \sin 2x}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ b) $\dfrac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^3 x - \cos x}$

c) $\dfrac{\sin^2 x - \mathrm{tg}^2\, x}{\cos^2 x - \mathrm{cotg}^2\, x}$ d) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$

8. Načrtněte grafy funkcí: a) $y = -\sin(3x)$ b) $y = 1 + \cos x$ c) $y = 2\sin(x + \pi)$.

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení kreslení grafů goniometrických funkcí:

1. kreslení grafu.

5 Diferenciální počet

5.1 Limita a spojitost funkce

Funkce jedné proměnné $f : y = f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže v případě, kdy se hodnota x blíží k číslu a, funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k hodnotě (limitě) L. K vyjádření blízkosti dvou bodů $x, a \in \mathbb{R}$ používáme v matematice pojem okolí bodu.

Definice 5.1. *r-okolím bodu* a $(a, r \in \mathbb{R},\ r > 0)$ označovaným $U(a; r)$ se rozumí otevřený interval

$$U(a; r) = (a - r, a + r)$$

Číslo $r > 0$ se nazýva *poloměr okolí* $U(a; r)$. Místo $U(a; r)$ se někdy píše $U(a)$, pokud hodnota poloměru okolí není v dané situaci podstatná.

Definice 5.2. Říkáme, že *funkce* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *limitu* $L \in \mathbb{R}$, právě když ke každému libovolně zvolenému ε-okolí $U(L; \varepsilon)$ bodu L existuje δ-okolí $U(a; \delta)$ bodu a takové, že pro všechna $x \neq a$ z $U(a; \delta)$ příslušné hodnoty $f(x)$ jsou ve zvoleném okolí $U(L; \varepsilon)$. Symbolicky pak píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Symbolický zápis definice vlastní limity funkce ve vlastním bodě:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f) : x \in U(a; \delta),\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in U(L; \varepsilon).$$

Platí, že funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu. Každá základní elementární funkce f má v každém bodě definičního oboru $D(f)$ limitu rovnou funkční hodnotě v tomto bodě.

Mají-li funkce f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$ limity, tj. existují-li limity $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, pak mají v tomto bodě limity i funkce $f + g$, $f - g$, fg, cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta , a je-li $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, také funkce $\dfrac{f}{g}$ a platí:

- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Příklad 5.3. Určete limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+7)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1}$

Řešení. a) Funkce $f : y = x^2 - 5x + 7$ je polynomická funkce, která je definována na celém $\mathbb{R}$, tedy i v bodě $x = 1$. Dostaneme:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-5x+7) = 1^2 - 5\cdot 1 + 7 = 3$$

Podobně postupujeme i v části b) a c).

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 - \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1 - 1 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x+1}{\lim\limits_{x\to -1} x-1} = \dfrac{-1+1}{-1-1} = 0$ $\square$

Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Příklad 5.4. Určete limity následujících funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2-\sqrt{x+9}}{x+5}$

Řešení. a) Funkce $f : y = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ není v bodě $x = 1$ definována. Můžeme však v $\mathbb{R} - \{1\}$ provést následující úpravu:

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2 = g(x)$$

Danou limitu pak vypočteme užitím poslední věty:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 1 + 2 = 3$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}+1)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}+1\right) = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

c)Lomený výraz rozšíříme dvojčlenem $2 + \sqrt{x+9}$.

$$\lim_{x\to -5}\frac{2-\sqrt{x+9}}{x+5} = \lim_{x\to -5}\frac{2-\sqrt{x+9}}{x+5}\cdot\frac{2+\sqrt{x+9}}{2+\sqrt{x+9}} = \lim_{x\to -5}\frac{4-(x+9)}{(x+5)(2+\sqrt{x+9})} =$$

$$\lim_{x\to -5}\frac{-(x+5)}{(x+5)(2+\sqrt{x+9})} = \lim_{x\to -5}\frac{-1}{2+\sqrt{x+9}} = \frac{-1}{2+\sqrt{-5+9}} = \frac{-1}{4}$$ $\square$

Cvičení

1. Určete limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2 - 6x + 7)$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

2. Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

3. Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + x^3}{x^4 - 2x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7} - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení limit:

1. limita.

5.2 Derivace funkce

Definice 5.5. Je-li funkce definována v okolí bodu x_0 a existuje limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)},$$

nazýváme ji *derivací funkce* f *v bodě* x_0. Značíme ji $f'(x_0)$. Má-li funkce f derivaci v každém bodě x jisté množiny M, potom funkci

$$f' : \; y = f'(x), \; x \in M$$

nazýváme derivací funkce f na množině M.

Derivace $f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f, pak tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Je-li dána funkční závislost hodnot nějaké fyzikální veličiny na čase, pak její derivace vyjadřuje okamžitou rychlost změny hodnot této veličiny.

Nechť $s = s(t)$ je rovnice dráhy přímočarého pohybu hmotného bodu, přičemž t značí čas měřený od jistého počátečního okamžiku a s značí dráhu, kterou hmotný bod urazil po přímce od zvoleného počátečního bodu. Derivace dráhy $s(t)$ podle času t pro $t = t_0$ definuje okamžitou rychlost pohybu hmotného bodu v čase t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Z definice se dají odvodit vzorce pro derivaci elementárních funkcí. Nejdůležitější vzorce najdete v následující tabulce.

Funkce f	Vzorec pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce
$y = c,\ (c \in \mathbb{R})$	$c' = 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^n,\ n \in \mathbf{N}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^r,\ r \in \mathbf{R},$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$x \in (0, \infty)$
$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Tab. 5.1: Vzorce pro derivace elementárních funkcí

Příklad 5.6. Určete rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 1$ v bodě $[2, 3]$.

Řešení. Pro směrnici tečny v bodě $[2,3]$ platí

$$k = y'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1-3}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ obdržíme $y-3 = 4(x-2)$ tj. $t : 4x - y - 5 = 0.$ □

Příklad 5.7. Zderivujte funkce : a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = 5^x$

Řešení. a) $y = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow y' = (-3)x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $y' = 5^x \ \ln 5$ □

> Jestliže funkce $f : u = f(x)$, $g : v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak platí následujíci vzorce pro všechna $x \in M$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$):
>
> $$(u+v)' = u' + v'$$
> $$(u-v)' = u' - v'$$
> $$(cu)' = cu',\ c \in \mathbb{R}$$
> $$(uv)' = u'v + uv'$$
> $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$$

Příklad 5.8. Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných předpisy:

a) $y = 5x^4 - 6e^x$ b) $y = 6x^2 - \sqrt{x}$ c) $y = (x-1)(x^2+3x-5)$ d) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

Řešení. a) $y' = 20x^3 - 6e^x$ b) $y' = 12x - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování součinu.

$y' = (x^2+3x-5) + (x-1)(2x+3) = x^2 + 3x - 5 + 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 3x^2 + 4x - 8$

d) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování podílu.

$y' = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ □

Jestliže je dána funkce $F:\ y = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $F = f \circ g$ má derivaci F' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí:

$$F'(x) = f'(u)g'(x).$$

Příklad 5.9. Vypočtěte derivace funkcí: a) $y = \ln(x^2 - 8)$ b) $y = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$ c) $y = e^x \sin^2 x$

Řešení. a) $y' = \dfrac{1}{x^2-8} \cdot (2x - 0) = \dfrac{2x}{x^2-8}$

b) $y' = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2}{x^2-1}$

c) $y' = e^x \sin^2 x + e^x 2 \sin x \cos x = e^x \sin x\, (\sin x + 2\cos x)$

□

Jestliže funkce $f^{-1}:\ y = f^{-1}(x),\ x \in (a_1, b_1)$, je inverzní funkce k funkci $f:\ y = f(x),\ x \in (a_2, b_2)$, která je na intervalu (a_2, b_2) spojitá a ryze monotonní a má na něm nenulovou derivaci f', pak také inverzní funkce má na intervalu (a_1, b_1) derivaci $(f^{-1})'$, přičemž platí:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Příklad 5.10. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x.

Řešení. Průsečíky dané křivky s osou x určíme řešením rovnice $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Rovnici převedeme na součinový tvar $x(x-1)(x+2) = 0$ a dostaneme kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.
Hledáme tedy rovnice tečen dané křivky v bodech $T_1 = [-2, 0]$, $T_2 = [0, 0]$, $T_3 = [1, 0]$.

Pro směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, y(x_0)]$ platí $k = y'(x_0)$. Protože

$$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

dostaneme $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 2$. Směrnice tečen uvažované křivky v bodech T_1, T_2, T_3 jsou

$$k_1 = y'(-2) = 6,$$

$$k_2 = y'(0) = -2,$$

$$k_3 = y'(1) = 3.$$

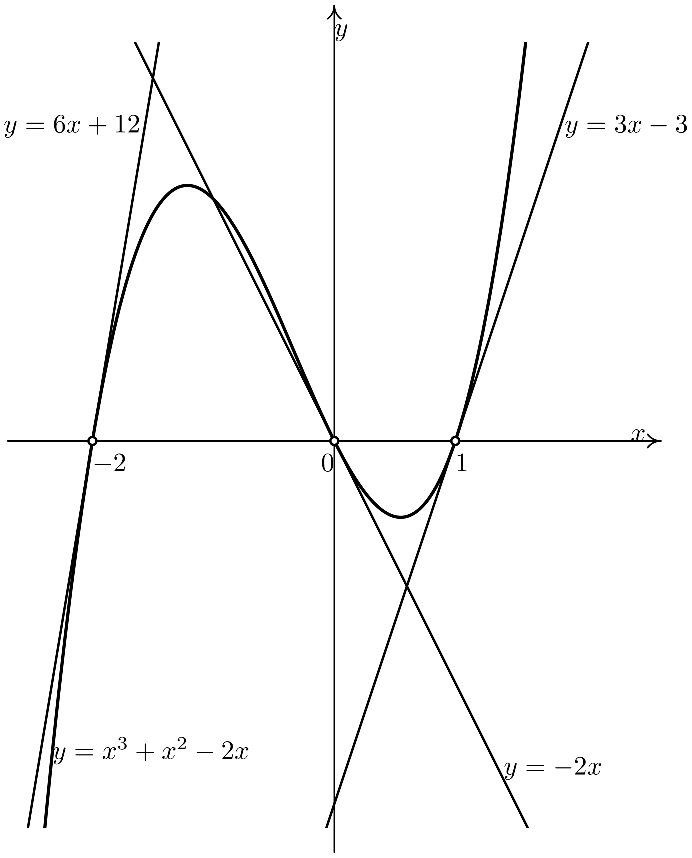
Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

$$\text{pro } T_1 = [-2, 0] \ a \ k_1 = 6: \ y = 6(x+2) \quad \text{tj. } 6x - y + 12 = 0$$

$$T_2 = [0, 0], \ k_2 = -2: \ y = -2x \ \text{ tj. } 2x + y = 0$$

$$T_3 = [1, 0], \ k_3 = 3: \ y = 3(x-1) \ \text{ tj. } 3x - y - 3 = 0.$$

□



Obr. 5.1: Graf funkce $x^3 + x^2 - 2x$ s tečnami v průsečících s osou x

Cvičení

1. Vypočtěte derivace funkcí:

   a) $y = \pi x^3 - 7x$ b) $y = e^x(x^2 - 1)$ c) $y = \dfrac{x+5}{x^2}$ d) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

2. Určete derivaci funkcí:

   a) $y = \sqrt{\sin x}$ b) $y = \dfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ c) $y = e^{\sin x}$ d) $y = \cos e^x$

3. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f: \; y = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ v bodě $T=[1,?]$.

4. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v jejich průsečících s osou x.

Maplety

Odkaz na maplet k procvičení kreslení derivací:

1. derivování,
2. hledání tečny ke grafu funkce.

5.3 L´Hospitalovo pravidlo

K aplikacím diferenciálního počtu patří metoda výpočtu limit pomocí derivací. Vyjadřuje ji *l´Hospitalovo pravidlo:*

> Nechť funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (ev. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$) a nechť existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí
>
> $$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Příklad 5.11. Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2+6}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^5+1}$

Řešení. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x)'}{(\sin 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x}{5\cos 5x} = \dfrac{2\cos 0}{5\cos 0} = \dfrac{2}{5}.$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2+6} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x^2+6)'} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^5+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^3+1)'}{(x^5+1)'} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2}{5x^4} = \dfrac{3}{5}$ □

6 Komplexní čísla

6.1 Tvary komplexního čísla

Komplexní číslo je číslo $z = a+ib$, kde a, b jsou reálná čísla a $i^2 = -1$. Výraz je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí $[a; b]$, kde a, b jsou reálná čísla.

Pro komplexní čísla se dají operace sčítání a násobení definovat takto:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d),$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc),$$

kde $a+ib$ a $c+id$ jsou libovolná komplexní čísla. Sčítání a násobení komplexních čísel jsou operace asociativní a komutativní. Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

Příklad 6.1. Vypočítejte součin $(2+i)(3+i)$.

Řešení. $(2+i)(3+i) = 6 + 3i + 2i - 1 = (6-1) + i(3+2) = 5 + 5i$ □

Definice 6.2. Zápis $z = a+ib$ nazýváme *algebraickým tvarem* komplexního čísla. Reálné číslo a nazýváme *reálnou částí* z. Reálné číslo b nazýváme *imaginární částí* z:

$$z = a+ib,\ a = \mathbf{Re}\, z,\ b = \mathbf{Im}\, z.$$

Číslo $\overline{z} = a - ib$ nazýváme *komplexně sdruženým* číslem k číslu $z = a+ib$.

Při dělení komplexních čísel využíváme komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}; \quad a+ib, c+id \in \mathbb{C},\ c, d \neq 0$$

Příklad 6.3. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $\dfrac{2+i}{1-i}$.

Řešení. $\dfrac{2+i}{1-i} = \dfrac{2+i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} = \dfrac{2-1+3i}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ □

Komplexní čísla zjednodušujeme podle pravidel: $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \dots,$

to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $i^{4k} = 1,\quad i^{4k+1} = i,\quad i^{4k+2} = -1,\quad i^{4k+3} = -i.$

Příklad 6.4. Vypočítejte $i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9$.

Řešení. $i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9 = i + i^2 i + i^4 i + i^4 i^3 + (i^4)^2 i = i - i + i - i + i = i$ □

Definice 6.5. *Absolutní hodnotou* komplexního čísla $a + ib$ nazýváme nezáporné číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Komplexní číslo z, pro které je $|z| = 1$, nazýváme *komplexní jednotkou.*

Komplexní rovina (Gaussova rovina komplexních čísel) je rovina s kartézským systémem souřadnic, ve které je každé komplexní číslo $a + ib$ znázorněno bodem $[a; b]$. Absolutní hodnota čísla $z = a + ib$ se potom rovná vzdálenosti bodu $[a; b]$ od počátku. Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

Definice 6.6. Úhel φ - orientovaný úhel mezi kladnou částí osy x a polopřímkou spojující bod $[0; 0]$ s bodem $[a; b]$ se nazývá *argumentem* komplexního čísla $z = a + ib$.

Platí, že $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ a $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Odtud $a = |z|\cos\varphi$ a $b = |z|\sin\varphi$.

Omezíme-li se na $-\pi < \varphi \leq \pi$ (ev. $0 \leq \varphi < 2\pi$), je toto číslo určeno jednoznačně.

Definice 6.7. Zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazýváme *goniometrickým tvarem* komplexního čísla z .

Příklad 6.8. Zapište v goniometrickém tvaru číslo $z = 2 + 2i$.

Řešení. $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ a $\varphi \in (-\pi; \pi\rangle \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$. Tedy: $2 + 2i = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. □

Cvičení

1. Vypočítejte:

   a) $(2 - 3i)(4 + i)$ b) $(1 + i)i$ c) $(-1 + i)^{-2}$

   d) $(-i)^{27}$ e) i^{2000} f) $5 - 8i + 6i^2 - 3i^3 + 6i^4$

2. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní čísla: a) $(i^{10} - i^{12} - 4i^{15}) : (i^5 - i^3)$,

   b) $\dfrac{2+i}{3-i} + (i-2)(4-i)$,   c) $(\dfrac{i-1}{i} + \dfrac{2i}{i-1})(2i-3) - (i-1)i$.

3. Přesvedčte se, že $\dfrac{1}{\frac{1}{1-i} - i} - \dfrac{1}{\frac{1}{1+i} + i} = 2i$.

4. Najděte dvojici komplexních čísel tak, aby jejich součet byl 4 a součin 13.

5. Určete reálná čísla x, y pro která platí: a) $\dfrac{3-2i}{1-i} = 2x + yi$

   b) $(x+y)(5-4i) + (x-y)(4-5i) = 94 - 68i$

   c) $\dfrac{x+1+(y+3)i}{5+3i} = 1 + i$

6. K číslu $z = 4 - 3i$ napište číslo komplexně združené $\overline{z}$ a vypočítejte $|z|$.

7. Určete komplexní čísla z, pro něž platí $z = \overline{z}$.

8. Vyjádřete následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

   a) $1 - i$ b) -2 c) $5i$ d) $\dfrac{i-3}{2+i}$ e) $\dfrac{2-i}{3i-1}$

9. Napište algebraický tvar komplexního čísla $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

6.2 Moivreova věta a binomická rovnice

Vyjádření komplexních čísel v goniometrickém tvaru podstatně zjednodušuje výpočty spojené s násobením a dělením komplexních čísel.

Pro každá dvě nenulová komplexní čísla $u = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $v = |v|(\cos\beta + i\sin\beta)$ platí:

$$uv = |u|\cdot|v|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)),$$
$$\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Pro umocňování platí *Moivreova věta*:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 6.9. Vypočtěte uv, u/v a u^3, jestliže $u = 2\Big(\cos\dfrac{1}{3}\pi + i\sin\dfrac{1}{3}\pi\Big)$ a $v = 6\Big(\cos\Big(-\dfrac{1}{2}\pi\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{1}{2}\pi\Big)\Big)$.

Řešení. Absolutní hodnota součinu je $2\cdot 6 = 12$ a argument $\frac{1}{3}\pi + (-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{6}\pi$.
Proto $uv = 12\Big(\cos\Big(-\dfrac{1}{6}\pi\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{1}{6}\pi\Big)\Big) = 12\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\Big) = 6\sqrt{3} - 6i$.
Absolutní hodnota podílu je $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a argument $\frac{1}{3}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{6}\pi$. Tedy

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{3}\Big(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\Big) = \frac{1}{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i.$$

Podobně dostaneme podle Moivreovy věty: $u^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1) = -8$.

□

Definice 6.10. *Binomickou rovnicí* se nazývá rovnice tvaru $z^n - a = 0$, kde $a \neq 0$ je dané komplexní číslo, z je neznámá a $n > 1$ je číslo přirozené.

Tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů. Řešit binomickou rovnici v $\mathbb{C}$ znamená využitím Moivreovy věty najít všech n komplexních řešení této rovnice.

Zapíšeme číslo a v goniometrickém tvaru: $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Podle důsledku Moivreovy věty dostaneme řešení rovnice $z^n - a = 0,\ \ a \neq 0$ ve tvaru:

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

Příklad 6.11. V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $z^3 + 27 = 0$.

Řešení. Upravíme na $z^3 = -27$. Napišme $a = -27$ v goniometrickém tvaru:

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi) = 27(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)).$$

Z Moivreovy věty dostaneme řešení $z = \sqrt{27}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2.$

$$\Rightarrow z_1 = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = -3,$$

$$z_3 = 3(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$ □

Cvičení

1. Vypočítejte algebraický tvar součinu a podílu komplexních čísel:

   a) $z_1 = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \quad z_2 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

   b) $z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

2. Pomocí Moivreovy věty vypočítejte: a) $(-1 + i\sqrt{3})^3$, b) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{100}$.

3. Jestliže $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, najděte algebraický tvar komplexního čísla $z^3 + \frac{1}{z^3}$.

4. Vyřešte v $\mathbb{C}$ kvadratické rovnice: a) $z^2 + 2z + 2 = 0$, b) $z^2 + 6z + 25 = 0$.

5. Vyřešte v $\mathbb{C}$ následující rovnice: a) $z^4 = 1$, b) $z^3 = 1/8$, c) $z^6 = -64$.

7 Posloupnosti a řady

7.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

Definice 7.1. *Nekonečnou posloupností* se nazývá každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Posloupnost je zadána buď výčtem prvků, rekurentně, nebo vzorcem pro n-tý člen.

Příklad 7.2. Posloupnost všech čísel dělitelných třemi zapište výše uvedenými způsoby.

Řešení. $\{a_n\}_1^\infty = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ výčet prvků.

$a_{n+1} = a_n + 3,\ a_1 = 3$ rekurentně.

$a_n = 3n$ vzorec pro n-tý člen. □

Příklad 7.3. Je daná posloupnost $\{a_n\}_1^\infty, a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně.

Řešení. Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log 3^n \cdot 3 = \log 3^n + \log 3$.
Zkoumanou posloupnost lze zapsat $a_{n+1} = a_n + \log 3,\ a_1 = \log 3$. □

Příklad 7.4. Posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -a_n$ vyjádřete vzorcem pro n-tý člen.

Řešení. $\{a_n\}_1^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$. Odtud $a_n = (-1)^n$. □

Definice 7.5. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *aritmetická,* právě když existuje takové číslo d (diference), že pro každé přirozené n platí: $a_{n+1} = a_n + d$, neboli $a_{n+1} - a_n = d$.

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}:\ a_n = a_1 + (n-1)d$.
Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r + (s - r)d$.

Pro součet S_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze odvodit: $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Příklad 7.6. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty, a_n = 2n-4$ je aritmetická. Určete diferenci.

Řešení. Musíme dokázat existenci čísla $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Je $a_n = 2n - 4, a_{n+1} = 2n - 2$ a tedy $a_{n+1} - a_n = 2$, čili $a_{n+1} = a_n + 2$. Posloupnost $\{2n - 4\}_1^\infty$ je aritmetická s diferencí $d = 2$. □

Příklad 7.7. Rozhodněte, které z čísel 71 a 100 je členem aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, v níž $a_1 = -10,\ d = 4{,}5$.

Řešení. V dané posloupnosti platí $a_n = -10 + (n-1) \cdot 4{,}5$.

Je-li $a_n = 71$, pak $71 = -10 + (n-1) \cdot 4{,}5$. Z toho $n = 19$. Je-li $a_n = 100$, pak $100 = -$ $-10 + (n-1) \cdot 4{,}5$. Z toho $n = \frac{229}{9}$.

Členem aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je pouze číslo 71. □

Příklad 7.8. V aritmetické posloupnosti je

a) $a_6 = 18,\ d = -2$. Vypočítejte a_9.

b) $a_{16} = 20,\ d = 1{,}5$. Vypočítejte a_1.

c) $a_1 = 12{,}6,\ d = 0{,}2,\ a_n = 27{,}4$. Určete n.

Řešení. *a)* $a_s = a_r + (s-r)d \ \Rightarrow\ a_9 = a_6 + 3d = 18 - 6 = \underline{\underline{12}}$

b) $a_{16} = a_1 + 15d \ \Rightarrow\ a_1 = a_{16} - 15d = \underline{\underline{-2{,}5}}$

c) $a_n = a_1 + (n-1)d \ \Rightarrow\ n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \underline{\underline{75}}$ □

Příklad 7.9. Vypočítejte součet všech přirozených čísel od jedné do 300.

Řešení. Je $a_1 = 1,\ d = 1$. Součet $S_{300} = \dfrac{300}{2}(a_1 + a_{300}) = 45150$. □

Definice 7.10. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *geometrická*, právě když existuje číslo q tak, že pro každé přirozené n platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, neboli $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ pro $a_1 \neq 0,\ q \neq 0$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro součet S_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ pro $q \neq 1$. Pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.

Příklad 7.11. V geometrické posloupnosti je

a) $a_1 = 18,\ q = 3$. Napište prvních pět členů.

b) $a_1 = 4,\ q = 3$. Vypočítejte a_5.

c) $a_6 = 8192,\ q = 4$. Určete a_4.

d) $a_1 = 40,\ q = -\frac{1}{4}$. Vypočítejte a_5 a S_5.

Řešení. *a*) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow\; 18, 54, 162, 486, 1458$

b) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot 3^4 = 324$

c) $a_4 = a_6 \cdot q^{4-6} = 8192 \cdot 4^{-2} = 512$

d) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 40 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5}{32} \qquad S_5 = a_1 \frac{q^5-1}{q-1} = \frac{1025}{32}$ □

Příklad 7.12. Najděte geometrickou posloupnost tak, aby $a_1 + a_3 = 5$ a $a_2 + a_4 = 10$.

Řešení. Je tedy
$$\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q^2 &= 5 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 &= 10 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} a_1(1+q^2) &= 5 \\ a_1 q(1+q^2) &= 10 \end{aligned}$$

Druhou rovnici vydělíme první, dostaneme $q = 2, a_1 = 1$. □

Příklad 7.13. Zjistěte, na jakou částku vzroste vklad a_0 Kč uložený na vkladní knížku na n let, jestliže spořitelna připisuje na konci každého roku p % z částky v tom roce uložené.

Řešení. Na konci 1. roku připíše spořitelna p % z původně vložené částky a_0, takže vklad vzroste na částku
$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} a_0 = a_0 (1 + \frac{p}{100}).$$
Na konci 2. roku připíše k této částce p % z a_1, takže vklad vzroste na částku
$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100} a_1 = a_1 (1 + \frac{p}{100}).$$

Obdobně je tomu v dalších letech. Vklady po připsání úroků v jednotlivých letech tvoří zřejmě geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a s prvním členem $a_1 = a_0 q$. Tedy podle vzorce $a_n = a_1 q^{n-1}$ dostaneme, že částka a_0 Kč při p-procentním složeném úrokování vzroste po n-letech na částku a_n Kč, kde
$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$
□

Cvičení

1. V aritmetické posloupnosti je

   a) $a_5 = 8,\; a_8 = -10$. Vypočítejte a_{20}.

   b) $a_{10} = 23,\; a_{16} = 15$. Vypočítejte a_1.

   c) $a_1 = 15,\; S_{25} = 75$. Určete d.

   d) $a_1 = 450,\; a_n = 210,\; d = -24$. Vypočítejte n a S_n.

   e) $a_n = 47,\; S_n = 245,\; d = 5$. Vypočítejte a_1 a n.

2. Ve které aritmetické posloupnosti je $a_1 + a_5 = 30,\ a_3 + a_4 = 36$?

3. Kolik členů aritmetické posloupnosti, ve které $a_1 = 2,\ d = 3$, musíme sečíst, aby součet přesáhl 2000?

4. Mezi čísla 8 a 20 vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet vložených členů byl 196.

5. V geometrické posloupnosti je

   a) $a_4 = -\frac{8}{3},\ a_6 = -\frac{32}{3}$. Vypočítejte a_1 a q.

   b) $a_1 + a_4 = 112,\ a_2 + a_3 = 48$. Vypočítejte a_1 a q.

   c) $a_1 = 6144,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = 48$. Vypočítejte n a S_n.

   d) $a_1 = 18,\ a_n = 288,\ S_n = 558$. Vypočítejte n a q.

6. Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet vložených členů byl 630.

7. Najděte kvocient geometrické posloupnosti, jestliže součet příslušné geometrické řady je 6, a součet prvních pěti členů je $\frac{93}{16}$.

8. Dělník souhlasil, že bude pracovat, jestliže jeho mzda bude za první den práce 1 Kč, za druhý den práce 2 Kč, za třetí den práce 4 Kč, atd. Kolik si vydělá za 12 dní práce?

7.2 Nekonečná geometrická řada

Definice 7.14. Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je geometrická posloupnost. Potom nekonečný součet

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \ldots$$

se nazývá *nekonečná geometrická řada s kvocientem* q.

Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$. Pak posloupnost $\{S_n\}_1^\infty,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, je konvergentní a platí:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}, \qquad \text{tj.} \qquad a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Příklad 7.15. Sečtěte geometrickou řadu: a) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \ldots,$
b) $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots.$

Řešení. a) Je $a_1 = 1,\ q = \dfrac{a_2}{a_1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Dále $|q| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, řada konverguje a

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2-\sqrt{2}.$$

b) Je $a_1 = 1,\ q = \cos^2 x$. Pro $|\cos^2 x| < 1\ \Rightarrow\ |\cos x| < 1\ \Rightarrow x \neq k\pi$ řada konverguje,

$$S = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

□

Příklad 7.16. Převeďte na zlomek číslo $8{,}\overline{4}$.

Řešení. $8{,}\overline{4} = 8 + \underbrace{\dfrac{4}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{4}{1000} + \dots}_{a_1 = \frac{4}{10},\ q = \frac{1}{10}} = 8 + \dfrac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 8 + \dfrac{4}{9} = \dfrac{76}{9}.$

Jiné řešení: Na jedné straně platí, že $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4}$.
Na druhé straně je $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4} = 84{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 76$. Potom $9 \cdot 8{,}\overline{4} = 76$.
Je tedy $8{,}\overline{4} = \frac{76}{9}$. □

Příklad 7.17. Závitnice byla sestrojena ze čtvrtkružnic poloměru $r, \dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{4}, \dfrac{r}{8}, \dots$. Vypočítejte její délku.

Řešení.

$$d = \frac{1}{4}(2\pi r + 2\pi\frac{r}{2} + 2\pi\frac{r}{4} + 2\pi\frac{r}{8}\dots) = \frac{2\pi r}{4}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = \frac{\pi r}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \pi r.$$

□

Cvičení

1. Najděte součet geometrické řady $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots$. Stanovte podmínky.

2. Řešte rovnici $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \dots$. Prověřte řešitelnost rovnice.

3. Do čtverce o straně a je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, pak kružnice atd. Vypočítejte obsah všech takto vzniklých čtverců.

4. Poločas přeměny (rozpadu jader) rádia je přibližně 20 minut. Kolik rádia zbude bez přeměny z 1mg po n hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně přibližně poloviny jader atomů té látky.)

5. Pro $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ řešte rovnici $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \dots = 2 \operatorname{tg} x$.

Přehled symboliky

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ množina všech celých čísel

$\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel

$\mathbb{R}^+$ množina všech reálných kladných čísel

$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ množina všech komplexních čísel

$\{\,\}$, $\emptyset$ prázdná množina

$a \in \mathcal{M}$ a je prvek množiny $\mathcal{M}$

$a \notin \mathcal{M}$ a není prvek množiny $\mathcal{M}$

$\{x \in \mathcal{M};\ v(x)\}$ množina všech prvků množiny $\mathcal{M}$ s vlastností v

$\forall$ obecný kvantifikátor (každý…)

$\exists$ existenční kvantifikátor (existuje…)

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{M}$ je podmnožina $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} = \mathcal{N}$ $(\mathcal{M} \subset \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \subset \mathcal{M})$; $\mathcal{M}$ se rovná $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ $\{x;\ x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$ – sjednocení množin

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ $\{x;\ x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$ – průnik množin

$\mathcal{M} - \mathcal{N}$ $\{x;\ x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\}$

$A[a_1; a_2; a_3]$ bod o souřadnicích a_1, a_2, a_3

$\vec{u} = (u_1; u_2)$ vektor o složkách u_1, u_2

$|AB|$ vzdálenost bodů A, B; velikost úsečky AB

$|a|, |z|$ absolutní hodnota reálného resp. komplexního čísla

Výsledky cvičení

Kapitola 1.2

1. $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{Z}$; $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} =$ kladná a záporná lichá čísla.
2. a) $\langle -1; \infty), \langle 2; 3)$,
   b) $(-\infty; 15), (-8; 3\rangle$.

Kapitola 2.3

1. $D = [5; 0; 5]$
2. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$
3. $a \in \{2, -\frac{2}{3}\}$
4. $a = 3$
5. $p_1 \equiv y + 2 = 0,\ p_2 \equiv 4x + 3y - 10 = 0$
6. $x = 1 + t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}$
7. $n = -1$
8. $\varphi = \frac{\pi}{2}$
9. rovina ϱ
10. $p \equiv x = 2t,\ y = -3t,\ z = 3t,\quad t \in \mathbb{R}$

Kapitola 3.1

1. a) $\frac{x-y}{x+y},\quad x \neq \pm y$
   b) $\frac{a^2(a-b)}{x},\ x \neq 0 \wedge x \neq -a \wedge a \neq -b$
   c) $b - a$, pro $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$
   d) $x,\quad x \neq \pm y \wedge 2x \neq y;$
   e) $1,\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b$
   f) $\sqrt{a+2},\quad \in (-2; 1) \cup (1; 2)$
   g) $\frac{xy^2}{x-y},\ x \neq y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$
   h) $u,\quad uv \neq -1$
   i) $\frac{1}{x^3},\quad x \neq 0 \wedge x \neq -1$
2. a) $5 + 2\sqrt{6}$ b) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}, x > 2$
3. a) $x^3(x-8)(x+7)$
   b) $(x-1)(x+1)(x^2+3)$
   c) $(x^2-5)(x^2-8) = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$

Kapitola 3.2

1. a) $x_1 = 1 \vee x_2 = -5$
   b) $x = 3$ dvojnásobný kořen
   c) v $\mathbb{R}$ nemá rovnice řešení
   d) $x_1 = 0 \vee x_2 = -6$
   e) $x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \vee x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
   f) v $\mathbb{R}$ neřešitelná rovnice
2. a) $x \in \left\{1, \dfrac{3}{5}\right\}$
   b) $x \geq 4 \vee x \leq 2$
   c) $\forall x \in \mathbb{R}$
   d) $x \in \langle 2, 5\rangle$
   e) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1{,}2\}$
   f) $x \in (2, 3\rangle$
3. a) pravdivý
   b) není pravdivý
   c) není pravdivý
   d) není pravdivý
4. $x_1 = \frac{5}{2} \vee x_2 = \frac{5}{4}$
5. $a \neq 0$; pro $a = 2$ rovnice nemá řešení; $a = -2$ nekonečně mnoho řešení $x = t, t \in \mathbb{R}$; Pro $a \notin \{-2, 0, 2\}$ je $x = \frac{1}{a(a-2)}$
6. $x = \frac{3(2a-5)}{a-2} > 0, \quad a \in (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$
7. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
8. a) $t \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
   b) $m = -3 \vee m = 4;\ x_1 = 0, x_2 = 1$
9. a) $x = 3$
   b) $x = \frac{5}{2}$
   c) $x = 16$
   d) $x \in \{\}$
   e) $x = \frac{5}{3}$
10. a) $x = 1$
    b) $x = 5$
    c) $x \in \{\ \}$
    d) $x = 6$
11. a) $x = 2$
    b) $x = 4{,}0408$
    c) $x = -\frac{1}{2}$
    d) $x = 4 \vee x = \frac{2}{3}$

Kapitola 3.3

1. a) $x = 3, y = 12$
   b) nemá řešení
   c) $x = 4 - 2a, \ , y = a; \ a \in \mathbb{R}$
2. a) nemá řešení
   b) $x = 13t/7, \ y = 2t/7, \ z = t$
   c) $x = 3, y = 4, z = 5$
3. a) soustava nemá řešení
   b) $x = 1, y = 2, z = 1, u = 3$
4. roviny se protínají v bodě $[2, 3, 5]$
5. $[x, y, z] = [a - 2, 2a/3, -a/2]$

Kapitola 3.4

1. $x \in \{49, 50, 51, \dots\}$
2. a) $(-\infty; -4) \cup (-\frac{7}{5}; \infty)$
   b) $(1; 4\rangle$
   c) $(-1; 3)$
   d) $(-\infty; 1\rangle$
3. $x \in \{-8, -9, -10, \dots\}$
4. $2 < k < 3$
5. a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
   b) $x \in \langle 2; 18\rangle$
   c) $x \in \{ \}$
   d) $x = 0{,}1$
6. $m \in (-\infty; -\frac{4}{5}) \cup (2; \infty)$
7. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; \infty)$
   b) $x \in (0; 2) \cup (5; \infty)$
   c) $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$
   d) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$
8. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (8; \infty)$
   b) $x \in (-10; 6)$
9. a) $|x| < 2$
   b) $|x - 2| \leq 1$
   c) $|x + 2| \leq 1$
10. a) $x \in (-1; 0)$
   b) $x \in (-\infty; 0)$
   c) $x \in \langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\rangle$
   d) $x \in \mathbb{R}$
   e) $x \in (0; \frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$
   f) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$

g) $x \in \emptyset$

h) $x \in \mathbb{R}$

i) $x \in \mathbb{R},\ x \neq -4, 2, 3$

11. a) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \frac{48}{13}\rangle$

b) $x \in \langle 16; \infty)$

c) $x \in (10; \infty)$

d) $x \in (3; \infty)$

e) $x \in (3; 5)$

12. $x \in (3; 5)$

13. a) $-\frac{2}{3} < x < 2$

b) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

14. $\frac{4}{9},\ \frac{5}{11}$

Kapitola 4.1

1. a) sudá

b) lichá

c) ani sudá ani lichá

d) ani sudá ani lichá

Kapitola 4.2

1. a) $(x + 4)/3$

b) $\log(x - 5)$

c) $(6x + 1)/(3x - 2)$

Kapitola 4.3

1. a) $y = x - 5,\ x \in (-\infty; -1);\ y = 5x - 1,\ x \in \langle -1; 1);\quad y = -x + 5,\ x \in \langle 1; \infty)$

b) $y = 0,\ x \in (-\infty; 0);\quad y = 2x,\ x \in \langle 0; \infty)$

c) $y = -x + 1,\ x \in \langle -3; 1);\quad y = x - 1,\ x \in \langle 1; \infty)$

2. a) $y = 2(x - 1)^2 - 8, V[1; -8], P_1[-1; 0], P_2[3; 0], Q[0; -6]$

b) $y = -(x - 2)^2 + 4, V[2; 4], P_1[0; 0], P_2[4; 0], Q[0; 0]$

3. a) $p \in (-\infty; -2)$

b) $p \in (0; \infty)$

4. a) $(-3; \infty)$

b) $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

c) $(-\infty; 0)$

d) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

e) $(-\infty; 4)$

f) $\langle 1; \infty)$

g) $(0; \frac{3}{2})$

h) $(0; 1\rangle$

5. a) $\langle 3; 4\rangle$
   b) $(\frac{5}{3}; 3\rangle$
   c) $(1; \infty)$
   d) $(-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
   e) $\langle -\frac{9}{11}; 1)$
   f) $\langle -2; \infty)$

Kapitola 4.4

1. a) $\frac{3}{4}\pi$
   b) $-\frac{5}{12}\pi$
   c) $\frac{10}{9}\pi$
2. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$
   b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$
   c) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3};$
   d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$
3. $\frac{\sqrt{10}}{10},\ \frac{3\sqrt{10}}{10},\ -\frac{1}{3}$
4. a) $\frac{13}{12}\pi + 2k\pi\ \vee\ \frac{17}{12}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   b) $2k\pi\ \vee\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \vee\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$
   c) $\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\ \vee\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   d) $\frac{\pi}{3} + k\pi\ \vee\ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   e) $k\pi\ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \vee\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   f) $k\pi\ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   g) $\frac{\pi}{3} + k\pi\ \vee\ \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   h) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\ \vee\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
5. $\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$
6. $\frac{\pi}{4}$
7. a) $4\sin x$
   b) $\operatorname{cotg} x$
   c) $\operatorname{tg}^6 x;$
   d) 1

Kapitola 5.1

1. a) 6
   b) 10
   c) 1/8
2. a) 0
   b) 4
   c) 3/2
3. a) 2

b) $-1/2$
c) $3/4$

Kapitola 5.2

1. a) $3\pi x^2 - 7$
   b) $e^x(x^2 + 2x - 1)$
   c) $(-x - 10)/x^3$
   d) $4/(x+2)^2$
2. a) $\cos x / 2\sqrt{\sin x}$
   b) $\sin^2 x$
   c) $e^{\sin x} \cos x$
   d) $-e^x \sin e^x$
3. $2x - 9y + 1 = 0$
4. $15x - y + 45 = 0,\ \ 6x + y = 0,\ 10x - y - 20 = 0$

Kapitola 6.1

1. a) $11 - 10i$
   b) $-1 + i$
   c) $i/2$
   d) i
   e) 1
   f) $5 - 5i$
2. a) $2 + i$
   b) $-13/2 + 13i/2$
   c) $-5 + 5i$
3. Platí
4. $2 + 3i,\ 2 - 3i$
5. a) $x = 5/4, y = 1/2$
   b) $x = 9, y = 13$
   c) $x = 1, y = 5$
6. $4 + 3i,\ |z| = 5$
7. $z \in \mathbb{R}$
8. a) $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$
   b) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$
   c) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$
   d) $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$
   e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4))$
9. $\sqrt{3}/2 + i/2$

Kapitola 6.2

1. a) $z_1z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$; $z_1/z_2 = 9 + 9\sqrt{3}\,i$
   b) $z_1z_2 = 12i$; $z_1/z_2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3} - i)$
2. a) 8
   b) $-1/2 - \sqrt{3}\,i/2$
3. $-\sqrt{2}$
4. a) $-1 \pm i$
   b) $-3 \pm 4i$
5. a) $1,\ i,\ -1,\ -i$
   b) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i),\ -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)$
   c) $2i, -2i,\ \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i,\ \sqrt{3} - i,\ -\sqrt{3} - i$

Kapitola 7.1

1. a) -82
   b) 35
   c) -1
   d) 11
   e) 2, 10
2. $a_1 = 3,\ d = 6$
3. 37 členů
4. $d = \frac{4}{5},\ k = 14$
5. a) $\frac{1}{3}, -2,$ nebo $-\frac{1}{3}, 2$
   b) $4, 3,$ nebo $108, \frac{1}{3}$
   c) 8, 12240
   d) 5, 2
6. 10, 20, 40, 80, 160, 320
7. $q = \frac{1}{2}$
8. 4095 Kč

Kapitola 7.2

1. $S = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x};\quad x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
2. $x \in \{-6, 4\}$
3. $2a^2$
4. $a_n = q^n = \frac{1}{8^n}$
5. $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$, pak dostaneme $\sin 2x = 1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$