INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Cvičení z diskrétní matematiky

Dana Hliněná, Martin Kovár

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně,
realizovaném na Vysokém učení technickém v Brně.

Obsah

1 Množiny a relace

1.1 Intuitivní pojem množiny

Cvičení

1.1.1. Nalezněte spor v definici souhrnu $\mathcal{N}$ z předchozího odstavce prověřením obou možností $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$.

1.1.2. Všimněte si paralely Russelova paradoxu s principem elektromagnetického přerušovače (tzv. “zvonku”) a zamyslete se nad tím, jakým způsobem se příroda vyrovnává s tímto paradoxem.

1.1.3. Nyní předpokládejme, že všechny uvažované objekty leží v nějaké, již předem dané množině $\mathcal{X}$. Místo souboru $\mathcal{N}$ definujme $\mathcal{M} = \{S \mid S \in \mathcal{X}, S \notin S\}$. Položte si nyní otázku, zda $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ či $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$. Která z obou možností je ta správná a proč v tomto případě nedochází ke sporu? Jaký je vztah $\mathcal{M}$ a $\mathcal{X}$?

1.1.4. Pokuste se na základě cvičení 3 vyvodit pravidlo, které zajistí, aby v našich matematických úvahách nemohla nastat situace podobná té, která je popsána Russelovým paradoxem.

1.1.5. Následující úloha je spíše filozofickým zamyšlením, než rigorózní úvahou. Ačkoliv je Russellův paradox v matematice něčím nežádoucím, přesto se může stát jakousi branou do rozsáhlé říše ležící “za” světem dvouhodnotové logiky a uvažování v kategoriích ano-ne. Pokuste se aplikovat konstrukci ve cvičení 3 na universum $\mathcal{X}$ “všeho existujícího”. Zejména si povšimněte, co se stane s objektem $\mathcal{M}$. Můžete vyslovit různé logické obměny (tj. logicky ekvivalentní, ale jinak zformulovaná tvrzení) vašeho zjištění.

1.2 Velikost a porovnávání množin

Cvičení

1.2.1. Dokažte, že množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel je spočetná.

1.2.2. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

1.2.3. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

1.2.4. Dokažte, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná.

1.2.5. * Nechť X je množina, 2^X množina všech podmnožin množiny X. Dokažte, že $|X| < \left|2^X\right|$.

1.2.6. Povšimněte si rozdílu mezi celými a racionálními čísly. Obě množiny jsou stejně mohutné, avšak jejich prvky jsou jinak rozloženy na reálné číselné ose. Zatímco celá čísla mají své nejbližší větší a menší sousedy, mezi libovolnými dvěma racionálními čísly leží nekonečně mnoho dalších racionálních čísel (dokažte).

1.3 Operace s množinami

Cvičení

1.3.1. Pro $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 4, 8\}$ a $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ vyjádřete $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \div B$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$. Vyjádřete množinu všech podmnožin pro množiny $A \cap C$ a B. Pak vyjádřete $2^{A \cap C} \cap 2^B$ a $2^{A \cap C} \setminus 2^B$. Kolik prvků má množina 2^X?

1.3.2. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá:

(i) $\{x\} \subseteq \{x\}$

(ii) $\{x\} \in \{x\}$

(iii) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

(iv) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$

1.3.3. Dokažte Větu 1.3.1 ze skript!

1.3.4. Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

(i) $\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$

(ii) $\overline{X \cap Y} \subseteq X$

(iii) $X \setminus Y = Y \setminus X$

(iv) $(X \cap Y) \cup (Y \setminus X) = X$

(v) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cup Z$

(vi) $\overline{X \setminus Y} = \overline{Y \setminus X}$

(vii) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$

(viii) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (X \cup Z)$

(ix) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cap Z$

(x) $(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y$

1.3.5. Dány jsou množiny $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$, $C = \{2, 5, 6\}$. Určete $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $A \setminus (C \setminus B)$, $A \cap (B \setminus C)$, $A \div B$, $A \times B$, $(A \times C)$.

1.3.6. Dány jsou množiny (intervaly) $A = (1, 3\rangle$, $B = \langle 2, 5)$. Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \setminus B)$, $B \setminus (B \setminus A)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $B \setminus (A \setminus B)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$, $A \div B$.

1.3.7. Ve třídě je 22 chlapců a všichni se věnují nějakému sportu: 19 fotbalu, 5 karate a 10 hokeji. Přitom všichni karatisté jsou i fotbalisté a 3 hokejisté jsou i karatisté. Kolik chlapců hraje jenom hokej, jestliže 10 chlapců hraje jenom fotbal?

1.3.8. Nechť $P(A) = 2^A$ je označení pro potenční množinu množiny A.

(i) Vyjmenujte prvky množin $P(\{1\})$, $P(\{1, 2\})$, $P(\{1, 2, 3\})$.

(ii) Nechť A, B jsou konečné množiny, nechť A má n prvků a B má m prvků. Kolik prvků mají množiny $P(A) \times P(B)$ a $P(A \times B)$?

(iii) Kolik prvků má množina $P(P(P(\emptyset)))$?

(iv) Uveďte příklad množin A, B, pro které platí $A \in B$ a zároveň $A \subseteq B$.

1.3.9. Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B platí

(i) $A \cap (A \cup B) = A$,

(ii) $A \cup (A \cap B) = A$,

(iii) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,

(iv) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,

(v) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,

(vi) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,

(vii) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

1.3.10. Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B, C, D platí

(i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(ii) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(iii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

(iv) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(v) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$

(vi) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

(vii) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

(viii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ix) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

(x) $A \times (B \div C) = (A \times B) \div (A \times C)$

(xi) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

(xii) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

(xiii) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(xiv) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

1.3.11. Určete $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$ a $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$, jestliže

(i) $T = (0, \infty)$, $A_t = \langle -t, t \rangle$,

(ii) $T = (0, 1)$, $A_t = (t, t+1)$,

(iii) $T = R^+$, $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \frac{3}{t})$,

(iv) $T = (0, 2\rangle$, $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \frac{3}{t})$.

1.4 Binární relace

Cvičení

1.4.1. Na množině $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je dána relace $R = \{(x,y)|\, x,y \in X, 3 \text{ dělí } x-y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1}.

1.4.2. Zopakujte cvičení 1 pro relaci $R = \{(x,y)|\, x,y \in X, x \text{ dělí } y\}$.

1.4.3. Nechť $R_1 = \{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$, $R_2 = \{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$. Zapište výčtem prvků relace R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_2 \circ R_1$, $(R_2 \circ R_1)^{-1}$, $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.

1.4.4. Dokažte, že pro libovolné dvě binární relace R, S platí $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

1.4.5. Dokažte, že pro libovolné tři binární relace R, S, T platí $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

1.4.6. Nechť $f(x) = \sin x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = 2x$. Stanovte $\mathrm{Dom}\,(g \circ f \circ h)$ a $\mathrm{Im}\,(g \circ f \circ h)$. Určete $(g \circ f \circ h)(\pi/4)$.

1.4.7. Nechť $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$, $R = A \times B$, $S = B \times A$. Zapište relace R, S výčtem prvků. Sestrojte grafy relací R, S. Určete relace $R \circ R$, $S \circ S$, $R \circ S$, $S \circ R$.

1.4.8. Nechť $A = \{n|\, n \in \mathbb{N}, n < 10\}$, $B = \{m|\, m \in \mathbb{N}, m \leq 12\}$, $R = \{(m,n)|\, (m,n) \in A \times B, m+1 = n\}$, $S = \{(m,n)|\, (m,n) \in A \times B, m^2 = n\}$. Zapište relace R, S výčtem prvků. Sestrojte grafy relací R, S. Určete relace $R \circ R$, $S \circ S$, $R \circ S$, $S \circ R$.

1.4.9. Nechť $R = \{(x,y)|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$, $S = \{(x,y)|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\}$, $T = \{(x,y)|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, y = \sqrt{x}\}$. Sestrojte kartézské grafy relací R, S, T. Určete relace $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ T$, $R \circ T$, $T \circ R$, $T \circ S$. Sestrojte kartézské grafy relací $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ T$, $R \circ T$, $T \circ R$, $T \circ S$.

1.4.10. Na množine $M = \{1,2,3\}$ určete výčtem prvků relaci, která je reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

1.4.11. Zjistěte, zda pro libovolné relace platí:

(i) $R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2)$

(ii) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

(iii) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$

(iv) $(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$

(v) $(R^{-1})^{-1} = R$

(vi) $R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} R \circ S_i$

(vii) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$

(viii) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2$

(ix) $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq S_1 \circ R \cap S_2 \circ R$

(x) $R \circ S_1 \setminus R \circ S_2 \subseteq R \circ (S_1 \setminus S_2)$

1.4.12. Určete definiční obor a obor hodnot relace:

$$R = \{(a,1),(a,3),(b,4),(b,*),(c,f),(c,1),(c,2)\}.$$

Zjistěte, zda se jedná o zobrazení.

1.4.13. Načrtněte grafy relací:

(i) $R = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x+y \leq 5\}$

(ii) $S = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$

(iii) $T = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leq 3\}$

1.4.14. Určete výčtem prvků relaci:
$R = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{Z}^2, |x-2|+|y+1| = 5\}$

1.4.15. * Určete definiční obor a obor hodnot relace:

(i) $R = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 + xy = 20\}$

(ii) $S = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{Z}^2, xy + 3x + y^2 + 6y + 9 = 5\}$

(iii) $T = \{(x,y) | \, (x,y) \in \mathbb{Z}^2, x+1 > y > x^2 + 2x - 1\}$

1.4.16. Rozhodněte, které z následujících relací jsou zobrazení, svoje tvrzení zdůvodněte.

$R = \{(a,1),(a,3),(b,4),(b,*),(c,f),(c,1),(c,2)\}, S = \{(a,1),(3,3),(b,4),(2,*),(c,f),(4,1),(d,2)\}$

1.4.17. Rozhodněte, které z následujících relací jsou zobrazení:

(i) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| = 1\}$

(ii) $S = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + |y| = 1\}$

(iii) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x| + y = 1\}$

1.4.18. Nechť f je zobrazení dané předpisem $y = x^2 - 1$. Určete $f(\langle -1, 2))$, $f(\langle - -1, 1\rangle)$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\langle -1, 1\rangle)$, $f^{-1}(\langle 0, 2\rangle)$

1.4.19. Nechť f je zobrazení A do B a $A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$. Zjistěte, zda platí

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(ii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(iii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(iv) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(v) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(vi) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2)$

(vii) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

1.4.20. Určete všechny bijekce množiny $A = \{1, 2, 3\}$ na množinu $\{a, b, c\}$.

1.4.21. * Nechť $f : A \to B, g : B \to C$ jsou zobrazení. Dokažte, že:

(i) jestliže $g \circ f$ je injekce, tak i f je injekce,

(ii) jestliže $g \circ f$ je surjekce na C, tak i g je surjekce na C,

(iii) jestliže g, f jsou injekce, tak i $g \circ f$ je injekce,

(iv) jestliže g, f jsou surjekce (na B, resp. na C), tak i $g \circ f$ je surjekce (na B, resp. na C).

1.5 Topologie a spojitost zobrazení

Cvičení

1.5.1. V příkladech 1.5.1 až 1.5.7 ve skriptech prověřte axiómy topologie, uvedené v definici 1.5.1.

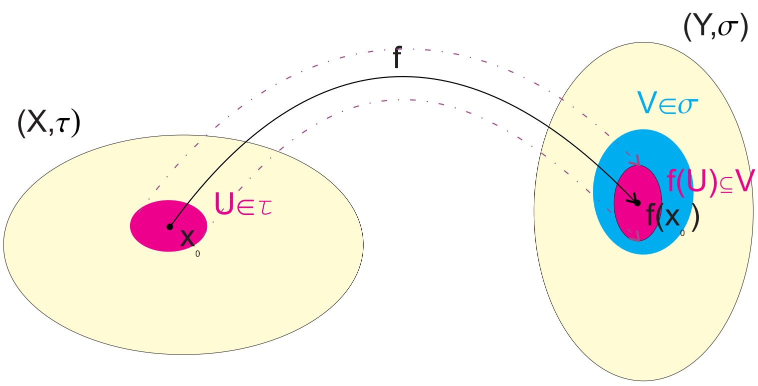
1.5.2. V příkladech 1.5.8 až 1.5.15 ve skriptech prověřte axiómy báze topologie, uvedené ve větě 1.5.1.

1.5.3. Dokažte, že Eukleidova metrika na $\mathbb{R}^2$ indukuje Eukleidovu topologii.

1.5.4. Najděte všechna spojitá zobrazení a všechny homeomorfismy mezi dvěma Serpiǹského topologickými prostory.

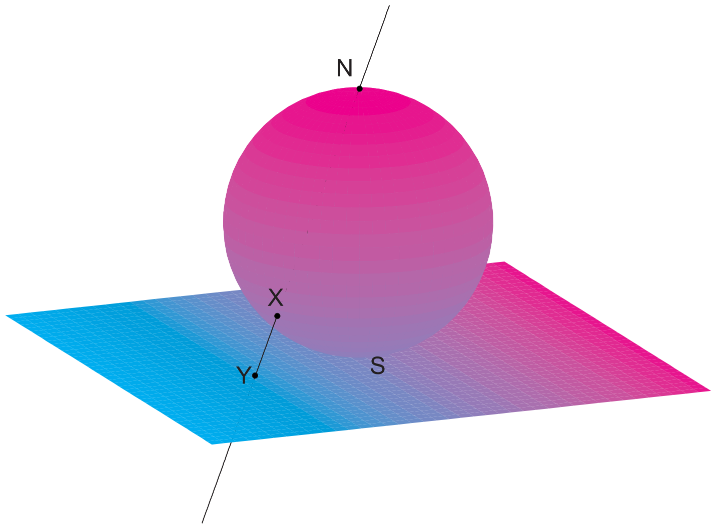
1.5.5. Najděte všechny topologie na dvouprvkové a tříprvkové množině. Určete, které z nich jsou navzájem homeomorfní.

1.5.6. Dokažte, že reálná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x) = 2x$ je spojitá.



Obr. 1.5.8 Spojitost zobrazení v bodě

1.5.7. * Buďte (X, τ), (Y, σ) topologické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže ke každému okolí $V \in \sigma$ bodu $f(x)$ existuje okolí $U \in \tau$ bodu x takové, že $f(U) \subseteq V$ (viz. Obr. 1.5.8). Dokažte, že zobrazení f je spojité, právě když je spojité v každém bodě prostoru X.



Obr. 1.5.9 Stereografická projekce

1.5.8.* Dokažte tvrzení příkladu 1.5.21 ve skriptech. Návod: Požadovaný homeomorfismus naleznete, když sestrojíte sféru, dotýkající se roviny. Protějším bodem na sféře k bodu dotyku veďte polopřímku, která je různoběžná s rovinou. Polopřímka protne sféru i rovinu v sobě si odpovídajících bodech (viz. Obr. 1.5.9). Zbývá prověřit, že vznikající zobrazení (tzv. stereografická projekce) je homeomorfismus.

1.5.9. Prověřte, že topologický prostor z příkladu 1.5.6 ve skriptech je kompaktní.

1.5.10. Dokažte, že nekonečný diskrétní prostor není kompaktní.

1.5.11. Dokažte, že množina $\mathbb{R}$ s Eukleidovou topologií není kompaktní.

1.5.12. Dokažte, že uzavřený interval a reálná přímka nejsou homeomorfní.

1.6 Relace na množině

Cvičení

1.6.1. Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou dány relace
$P = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$,
$Q = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$,
$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$,
$T = X^2$.

Určete, které z nich jsou relacemi ekvivalence na X a v kladných případech sestrojte příslušné rozklady množiny X.

1.6.2. K rozkladům množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$ najděte odpovídající ekvivalence na X:
$\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$,
$\mathcal{Q} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$,
$\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$,
$\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$,
$\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$.

1.6.3. Najděte všechny ekvivalence na množině o 2, 3 a 4 prvcích.

1.6.4. Nechť $X = \{(a, b) | \, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Definujeme $(a, b)R(c, d)$ právě když $ad = bc$. Dokažte, že R je ekvivalence na množině X. Jakou známou množinu tvoří třídy ekvivalence?

1.6.5.* Nalezněte obecné vztahy pro nejmenší reflexivní relaci $\rho(Q)$, nejmenší symetrickou relaci $\sigma(Q)$, nejmenší tranzitivní relaci $\tau(Q)$ a nejmenší ekvivalenci $\epsilon(Q)$ obsahující danou relaci Q. Tyto vztahy dokažte. Relacím $\rho(Q)$, $\sigma(Q)$, $\tau(Q)$ se říká po řadě *reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr* relace Q.

1.6.6. Řešte úlohu 5 pro konkrétní relaci $Q = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 5), (5, 5)\}$ na $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.6.7. Nechť E_1, E_2 jsou ekvivalence na X. Dokažte, že $E_1 \cap E_2$ je ekvivalence na X.

1.6.8. Nechť R je reflexivní a tranzitivní relace na X. Dokažte, že $R \cap R^{-1}$ je ekvivalence na X.

1.6.9. Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na množině X:

$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$,
$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)$,
$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$,
$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2)$,
$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1))$,
$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1))$,
$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1))$.

1.6.10. Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou dány relace

$P = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(5,5),(6,5),(6,6)\}$,
$Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,5),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(5,5),(6,5),(6,6)\}$,
$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(5,5),(6,5),(6,6)\}$,
$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,5),(3,3),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(5,5),(6,5),(6,6)\}$,
$T = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$,
$U = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(5,5),(6,5),(6,6)\}$,

Rozhodněte, které z nich jsou uspořádání na X. V kladném případě nakreslete Hasseův diagram.

Která z těchto uspořádání jsou svazová?

1.6.11. * Buď (X, τ) topologický prostor. Pro libovolné $x, y \in X$ klademe $x \leq y$, právě když každé otevřené okolí bodu x obsahuje bod y. Dokažte, že relace $\leq$ je kvaziuspořádání. Toto kvaziuspořádání se nazývá *specializace* prostoru (X, τ). Zformulujte ekvivalentní podmínku, kterou musí splňovat prostor (X, τ), aby jeho specializace byla uspořádáním. Tato podmínka se nazývá T_0-*axiom* a prostor, který ji splňuje, se nazývá T_0-*prostor*.

1.6.12. Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a τ buď topologie na X indukovaná z Khalimského přímky. Ověřte, zda je prostor (X, τ) T_0-prostorem. Pokud ano, nakreslete Hasseův diagram jeho specializace.

1.6.13. Uvažujte množinu $\mathcal{E}_n$ všech ekvivalencí na množině o $n = 3$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je $(\mathcal{E}_3, \subseteq)$ svazově uspořádaná.

1.6.14. * Opakujte předchozí cvičení pro $n = 4$.

1.6.15. Uvažujte množinu $\mathcal{T}_n$ všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je $(\mathcal{T}_2, \subseteq)$ svazově uspořádaná.

1.6.16. * Opakujte předchozí cvičení pro $n = 3$.

1.6.17. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ jsou dány relace

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, d), (c, a), (c, c), (d, a), (d, d)\},$$

$$S = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}.$$

Určete reflexivní, symetrický, tranzitivní uzávěr relací R, S.

1.6.18. Určete výčtem prvků všechny rozklady množiny M, jestliže:

(i) $M = \{1, 2\}$

(ii) $M = \{1, 2, 3\}$

(iii) $M = \{1, 2, 3, 4\}$

1.6.19. Je dána relace $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 3)\}$ na množině $A = \{1, 2, 3\}$. Zjistěte, zda R je ekvivalence na A, v případě kladné odpovědi najděte její rozklad.

1.6.20. Zjistěte, které z následujících relací jsou ekvivalence na množině $\mathbb{R}$.

(i) $R_1 = \{(x, y) |\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{y} = 1\}$

(ii) $R_2 = \{(x, y) |\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq 1\}$

(iii) $R_3 = \{(x, y) |\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| = |y|\}$

(iv) $R_4 = \{(x, y) |\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3 = y^3\}$

1.6.21. Na množině $\mathbb{N}$ definujeme relace:

(i) $mR_1n \iff$ dekadický zápis čísla m končí stejnou cifrou jako dekadický zápis čísla n.

(ii) $mR_2n \iff$ dekadický zápis čísla m má stejný počet platných cifer jako dekadický zápis čísla n.

(iii) $mR_3n \iff$ číslo m má stejný ciferný součet jako číslo n.

Dokažte, že R_1, R_2, R_3 jsou relace ekvivalence a najděte třídy rozkladů daných ekvivalencemi R_1, R_2, R_3.

1.6.22. Nechť v dané rovině α je dána přímka p. Na množině α definujeme relaci $\sim$ následovně:

$$A \sim B \iff A = B \vee (A \neq B \wedge AB||p).$$

Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence a najděte třídy rozkladu daného touto ekvivalencí.

1.6.23. Na množině zlomků $\{\frac{m}{n} | m \in Z, n \in \mathbb{N}\}$ je dána relace následovně: $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \iff m.n' = m'.n$.

(i) Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence.

(ii) Kdy dva zlomky patří do stejné třídy rozkladu daného relací $\sim$?

1.6.24. Na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je dána relace $\sim$ následovně:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

(i) Dokažte, že $\sim$ je na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relace ekvivalence.

(ii) Kdy dvě uspořádané dvojice patří do stejné třídy rozkladu daného relací $\sim$?

1.6.25. Na množině $\mathbb{Z}$ je dána relace $\equiv$ následovně:

$$a \equiv b \iff 6|(a - b).$$

Je $\equiv$ relace ekvivalence na $\mathbb{Z}$? Dokažte.

1.6.26. Nechť $A = \{-5, -4, \cdots, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a nechť zobrazení $f : A \to B$ je dané předpisem $f(x) = |x|$. Relaci $\sim$ definujeme podmínkou:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

Určete faktorovou množinu $A/\sim$.

1.6.27. Najděte aspoň tři různé rozklady množiny $\mathbb{Z}$.

1.6.28. Na množině všech trojúhelníků ležících v dané rovině α definujeme relace:

(i) $TR_1T' \iff T, T'$ mají společný vrchol,

(ii) $TR_2T' \iff T, T'$ mají společné těžiště,

(iii) $TR_3T' \iff T, T'$ mají shodnou aspoň jednu stranu.

Zjistěte a zdůvodněte, které z relací R_1, R_2, R_3 jsou ekvivalence.

2 Struktury s operacemi na množině

2.1 Kategorie

Cvičení

2.1.1. V příkladě 2.1.1 ze skript jsme uvedli, že třída všech množin spolu se zobrazeními tvoří kategorii. Jmenujte ještě alespoň dvě další kategorie. Co tvoří v těchto kategoriích třídu objektů a co jsou v nich morfismy?

2.2 Algebry

Cvičení

2.2.1. Najděte všechny algebry s jednou operací na množině $\{0, 1\}$.

2.2.2. Nechť $A = \{1, 2\}$ a $X = 2^A$. Najděte všechny podalgebry algebry $(X, \cup, \cap)$.

2.2.3. * Buď $X = \mathcal{N} \cup \{0\}$ a nechť $a \diamond b = b + 1$ pro všechna $a, b \in X$. Určete všechny neprázdné podalgebry algebry $(X, \diamond)$. Jaký je jejich společný průnik?

2.2.4. Dokažte, že průnik libovolného souboru podalgeber algebry A je buď prázdný, nebo opět podalgebra algebry A.

2.3 Faktorové algebry

Cvičení

2.3.1. Nechť $A = \{a, b\}$ a $a \diamond a = b$, $a \diamond b = b \diamond a = b \diamond b = a$. Najděte všechny kongruence na A. K nim sestrojte příslušné faktorové algebry.

2.3.2. Nechť $A = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) | x, y \in Z,\ 5 | x - y\}$. Dokažte, že R je kongruencí na $(A, +, \cdot)$. (Návod: když $x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_2$, pak $x_1 = 5p_1 + r_1, x_2 = 5p_2 + r_2, y_1 = 5q_1 + r_1, y_2 = = 5q_2 + r_2$.)

2.3.3. Sestrojte faktorovou algebru A/R z předchozí úlohy.

2.3.4. Položme $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{0, 1, 2\}$. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \mod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \mod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \mod 3$ a $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \mod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f : X \to Y$, kde $f(x) = x \mod 3$ je morfismus algeber $(X, \oplus, \odot)$ a $(Y, \boxplus, \boxdot)$.

2.3.5. V předchozím příkladě nalezněte $\operatorname{Ker} f$ a sestrojte faktorovou algebru $X/\operatorname{Ker} f$. Faktorizujte zobrazení f přes faktorovou algebru.

2.3.6. Opakujte cvičení 4 a 5 pro $Y = \{0, 1\}$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \mod 2$, $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \mod 2$ a $f(x) = x \mod 2$.

2.4 Algebry s jednou a dvěma binárními operacemi

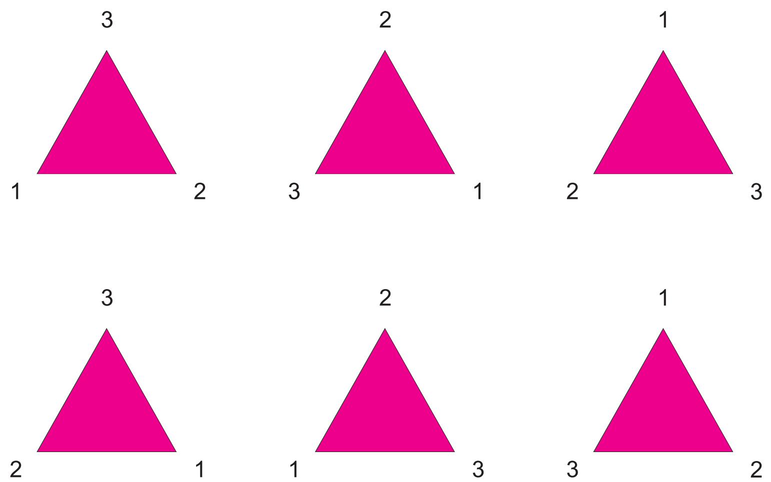
Cvičení

2.4.1. Dokažte, že $(A, \diamond)$, kde $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $a \diamond b = (a+b) \mod n$ pro všechna $a, b \in A$ je komutativní grupa. Zapište její tabulku pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2.4.2. Dokažte, že $(A, \bullet)$, kde $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $a \bullet b = (a \cdot b) \mod n$ pro všechna $a, b \in A$ je komutativní monoid. Zapište jeho tabulku pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2.4.3. * Nechť $(A, \bullet)$ je algebra z předchozí úlohy. Dokažte, že její podmnožina $A \setminus \{0\}$ s operací $\bullet$ je komutativní grupa, právě když n je prvočíslo.

2.4.4. Nechť $M = \{1, 2, 3\}$ a $S_3 = \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}$ množina všech permutací množiny M (tj. bijekcí $M \to M$). Zapište tabulku algebry $(S_3, \circ)$. Dokažte, že $(S_3, \circ)$ je nekomutativní grupa. Ukažte také, že každou permutaci množiny M lze reprezentovat jako symetrii (tj. zobrazení na sebe, zachovávající geometrický tvar) rovnostranného trojúhelníka (viz Obr. 2.4.1).



Obr. 2.4.1. Symetrie rovnostranného trojúhelníka

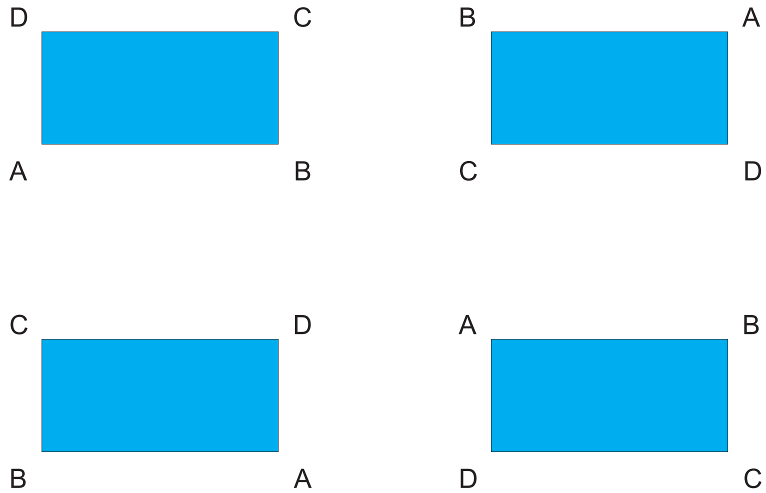
2.4.5. Najděte všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$. Které z nich jsou normální?

2.4.6. Najděte všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$. Které z nich jsou normální?

2.4.7. Je dána algebra $(K_4, \diamond)$, kde $K_4 = \{a, b, c, d\}$ a operace $\diamond$ je dána tabulkou:

$\diamond$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Dokažte, že $(K_4, \diamond)$ je grupa (tzv. *Kleinova grupa*). Ukažte, že její prvky lze reprezentovat jako symetrie obdélníka (s nestejnými stranami, viz. Obr. 2.4.2).



Obr. 2.4.2. Symetrie obdélníka

2.4.8. Najděte všechny podgrupy Kleinovy grupy $(K_4, \diamond)$. Které z nich jsou normální?

2.4.9. Najděte všechny normální podgrupy grupy $(S_3, \circ)$.

2.4.10. K normálním podgrupám v příkladech 5 až 9 sestrojte příslušné faktorové grupy.

2.4.11. Rozhodněte a dokažte, zda existuje epimorfismus algeber:

(i) $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$

(ii) $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

(iii) $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$

(iv) $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

(v) $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ na $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$

(vi) $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ na $(K_4, \diamond)$

(vii) $(K_4, \diamond)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$

(viii) $(K_4, \diamond)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

(ix) $(K_4, \diamond)$ na $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$

(x) $(S_3, \circ)$ na $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$

(xi) $(S_3, \circ)$ na $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

(xii) $(S_3, \circ)$ na $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$

(xiii) $(S_3, \circ)$ na $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$

(xiv) $(S_3, \circ)$ na $(K_4, \diamond)$

2.4.12. Ve kterých z následujících případů je skládání funkcí operací na F?

(i) F je množina všech konstantních funkcí

(ii) F je množina všech lineárních funkcí

(iii) F je množina všech kvadratických funkcí

2.4.13. Na množině $A = \{0, 1\}$ definujte (tabulkou) všechny unární a binární operace, určete jejich vlastnosti.

2.4.14. Na množině $A = \{a, b, c\}$ definujte (tabulkou) operaci, která je

(i) komutativní a asociativní

(ii) komutativní, ale není asociativní

(iii) asociativní, ale není komutativní

(iv) není komutativní, ani asociativní

2.4.15. Na množině $\mathbb{Z}$ jsou definovány operace

(i) $a \circ b = a + b + 1$,

(ii) $a \star b = 2a + b$,

(iii) $a \Delta b = a^3 + b^3$.

Určete jejich vlastnosti.

2.4.16. Na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je dána operace $\star$ následovně: $a \star b$ je počet prvočinitelů v úplném rozkladu čísla $10a + b$ (napr. $1 \star 2 = 3$, neboť $12 = 2.2.3$). Napište operační tabulku pro operaci $\star$ a určete její vlastnosti.

Na množině $A = \{a, b, c\}$ definujte operaci $\star$ tak, aby $(A, \star)$ byl grupoid s jediným podgrupoidem.

2.4.17. Na množině $A = \{a, b, c, d\}$ definujte operaci $\star$ tak, aby grupoid $(A, \star)$ měl

(i) právě dva podgrupoidy,

(ii) právě tři podgrupoidy,

(iii) právě pět podgrupoidů,

2.4.18. Na množině $A = \{a, b, c, d\}$ definujte operaci $\star$ tak, aby $(A, \star)$

(i) byl grupoid, ale nebyl asociativní

(ii) byl asociativní grupoid bez neutrálního prvku

(iii) byl asociativní grupoid s neutrálním prvkem

(iv) byla grupa

2.4.19. * Nechť $p \neq 0, g \neq 0, r$ jsou pevně zvolená reálna čísla. Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace $\circ$ následovně:

$$a \circ b = p.a + q.b + r.$$

Jaká musí být čísla p, q, r, aby

(i) operace $\circ$ byla asociativní

(ii) operace $\circ$ byla komutativní

(iii) operace $\circ$ měla neutrální prvek

(iv) ke každému prvku z R existoval inverzní prvek

2.4.20. Nechť M je množina všech symetrií

(i) rovnostranného trojuhelníka ABC

(ii) čtverce $ABCD$

(iii) obdélnika $ABCD$

(iv) kosočtverce $ABCD$

Sestrojte operační tabulku pro operaci skládání zobrazení na M a ukažte, že $(M, \circ)$ je grupa.

2.4.21. Nechť $a_1, a_2, \cdots, a_n$ jsou prvky grupy. Zapište inverzní prvek k prvku $a_1.a_2.\cdots.a_n$. a matematickou indukcí vzhledem k n dokažte, že daný prvek má požadovanou vlastnost.

2.4.22. * Dokažte, že pokud v grupě $(G, .)$ platí $a.b = a$, tak $b = e$.

2.4.23. * Dokažte, že v konečné grupě se sudým počtem prvků existuje prvek a, pro který platí: $a \neq e, a.a = e$.

2.4.24. * Dokažte, že pokud je $x \circ x = e$ pro každý prvek x grupy $(G, \circ)$, tak $(G, \circ)$ je komutativní grupa.

2.5 Svazy

Cvičení

2.5.1. Buď X množina, na níž je definováno svazové uspořádání $\leq$. Klademe pro $x, y \in X$ $x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Prověřte, že $(X, \vee, \wedge)$ je algebraicky definovaný svaz.

2.5.2. Mějme $(X, \vee, \wedge)$ algebraicky definovaný svaz. Klademe pro $x, y \in X$ $x \leq y \iff x \vee y = y$. Prověřte, že $(X, \leq)$ je svazově uspořádaná množina. Dokažte, že relace $x \leq y \iff x \wedge y = x$ definuje na X stejné uspořádání.

2.5.3. V příkladě 10 ze cvičení 1.6 svazová uspořádání vyjádřete jako algebraicky definované svazy. Vyjádřete operace spojení a průseku.

2.5.4. V příkladech 13 až 16 ze cvičení 1.6 svazová uspořádání vyjádřete jako algebraicky definované svazy. Vyjádřete operace spojení a průseku.

2.5.5. Sestrojte svaz všech podgrup grupy $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ pro n=1,2,3,4,5,6.

2.5.6. Sestrojte svaz všech podgrup grupy $(K_4, \diamond)$ z příkladu 7 ve cvičení 2.4.

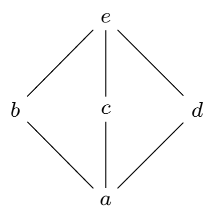
2.5.7. Sestrojte svazy všech podgrup a normálních podgrup grupy $(S_3, \circ)$ z příkladu 4 ve cvičení 2.4.

2.6 Podsvazy a izomorfismy svazů

Cvičení

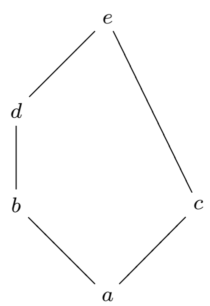
2.6.1. Najděte všechny neizomorfní svazy o n prvcích pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

2.6.2. Najděte všechny podsvazy svazu M_5 s Hasseovým diagramem



Které z nich jsou neizomorfní?

2.6.3. Najděte všechny podsvazy svazu N_5 s Hasseovým diagramem



Které z nich jsou neizomorfní?

2.6.4. Najděte všechny neizomorfní podsvazy svazu z příkladu 2.6.2 ve skriptech.

2.7 Klasifikace svazů

Cvičení

2.7.1. Najděte všechny modulární svazy o 5 prvcích.

2.7.2. Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

2.7.3. * Najděte všechny nemodulární svazy o 6 prvcích.

2.7.4. Zjistěte typy svazů z příkladů 10, 13,14,15,16 ve cvičení 1.6.

2.7.5. Zjistěte typy svazů z příkladů 5,6,7 ve cvičení 2.5.

2.7.6. Určete typy svazů z příkladu 4 ve cvičení 2.6.

2.8 Booleovské svazy a algebry

Cvičení

2.8.1. Buď $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ Booleova algebra. Dokažte, že pro libovolné $x \in X$ platí $x \oplus 1 = 1$, $x \odot 0 = 0$.

2.8.2. Buď $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ Booleova algebra. Dokažte, že pro libovolné $x \in X$ platí $(x')' = x$.

2.8.3. Buď $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ Booleova algebra. Dokažte, že $0' = 1$, $1' = 0$.

2.8.4. Buď $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ Booleova algebra. Dokažte, že pro libovolné $x, y \in X$ platí $(x \oplus y)' = x' \odot y'$, $(x \odot y)' = x' \oplus y'$.

2.8.5. V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

(i) $(x' \odot y')'$

(ii) $(a \oplus b) \oplus (c \oplus a) \oplus (b \oplus c)$

(iii) $(x \odot y) \oplus (z \odot x) \oplus (x' \odot y')'$

2.8.6. * Dokažte tzv. *Poretzkyho zákon*: Nechť $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ je Booleova algebra. Buď $x, t \in X$. Pak $x = 0$, právě když $t = (x \odot t') \oplus (x' \odot t)$.

2.8.7. V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ dokažte:

(i) $y \leq x'$ právě když $x \odot y = 0$

(ii) $y \geq x'$ právě když $x \oplus y = 1$

2.8.8. V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ nalezněte komplementy následujících výrazů:

(i) $x \oplus y \oplus z'$

(ii) $(x \oplus y' \oplus z') \odot (x \oplus y \oplus z')$

(iii) $(x \odot y) \oplus (z \odot x) \oplus (x' \odot y')'$

(iv) $(x' \oplus y)' \odot (x \oplus y')$

2.8.9. * V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ dokažte:

$$(x \oplus y) \odot (x' \oplus z) = (x' \odot y) \oplus (x \odot z)$$

2.8.10. Nechť $X = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$. Položme $x \oplus y = \text{nsn}\,(x, y)$, $x \odot y = \text{nsd}\,(x, y)$, $x' = \frac{70}{x}$ pro všechna $x, y \in X$. Dokažte, že $(X, \oplus, \odot, ', 1, 70)$ je Booleova algebra. Nakreslete její Hasseův diagram.

2.8.11. Dokažte, že množina všech dělitelů čísla 210 s vhodnými operacemi tvoří Booleovu algebru. Popište tyto operace a nakreslete její Hasseův diagram.

2.8.12. Buď X množina n-bitových řetězců. Definujeme $(x \oplus y)_i = \sup\{x_i, y_i\}$, $(x \odot y)_i = \inf\{x_i, y_i\}$, $(x')_i = (x_i + 1) \mod 2$ pro $x, y \in X$ a $i = 1, 2, \ldots n$. Dokažte, že $(X, \oplus, \odot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Booleova algebra.

2.8.13. Pro $n = 7$, $a = 1101010$ a $b = 1011011$ v předchozím příkladě spočítejte $a \oplus b$, $a \odot b$ a a'.

2.8.14. Najděte všechny Booleovy podalgebry Booleovy algebry z příkladu 10.

2.8.15. Určete, kolik Booleových podalgeber má Booleova algebra z příkladu 11.

3 Výrokový a predikátový počet

3.1 Základní pojmy

Cvičení

3.1.1. Je dána formule predikátového počtu druhého řádu

$$(\forall P)\{[P(a) \wedge (\forall x)[[\neg(x = a) \wedge P(f(x))] \Rightarrow P(x)]] \Rightarrow (\forall x)P(x)\}.$$

Vypište všechny její atomické podformule a podformule.

3.1.2. Uvažujme formuli

$$\forall z \exists u \exists v[(z = u \vee z = v) \wedge u \neq v] \wedge \forall x \forall y \forall P[x \neq y \vee (P(x, x) \vee \neg P(y, y))].$$

Dokažte, že tato formule nabývá hodnoty *nepravda* v každé interpretaci $\mathcal{I}$ s jednoprvkovým oborem M.

3.1.3. * Dokažte, že formule z předchozího příkladu nabývá hodnoty *pravda* v každé interpretaci $\mathcal{I}$ s dvouprvkovým oborem M.

3.1.4. Ukažte, že formule

$$\forall x \forall y \forall P[x \neq y \vee (P(x, x) \vee \neg P(y, y)]$$

je logicky pravdivá.

3.1.5. Dokažte, že formule

$$\exists P \exists x \exists y[(P(x, x) \wedge \neg P(x, y)) \wedge x = y]$$

je nesplnitelná.

3.1.6. Dokažte logickou pravdivost formulí výrokového počtu:

$$D_1: \quad ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow p,$$

$$D_2: \quad [((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

3.1.7. Rozhodněte o logické pravdivosti, resp. splnitelnosti formulí predikátového počtu prvního řádu:

$$A_1: \quad \forall p_1(x) \Rightarrow \exists x p_1(x),$$

$$A_2: \quad \exists x p_1(x) \Rightarrow \forall x p_1(x),$$

$$A_3: \quad \forall x q_1(x) \Rightarrow q_1(a),$$

$$A_4: \quad q_1(a) \Rightarrow \forall x q_1(x),$$

$$A_5: \quad \exists y \forall x p_2(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y p_2(x, y),$$

$$A_6: \quad \forall x \exists y p_2(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x p_2(x, y),$$

$$A_7: \quad \forall x(p_1(x) \Rightarrow p_1(x)) \Rightarrow [\exists x p_1(x) \Rightarrow \forall x p_1(x)],$$

$$A_8: \quad [\exists x p_1(x) \Rightarrow \forall x q_1(x)] \Rightarrow \forall x(p_1(x) \Rightarrow q_1(x)).$$

3.1.8. Dokažte logickou ekvivalenci formulí:

$$A: \quad \forall x \exists P\{\exists y[x \neq y \wedge P(y)] \wedge \exists z \forall u[x \neq z \wedge (z \neq u \vee \neg P(u))]\}$$

$$B: \forall x \exists y \exists z[x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z].$$

3.1.9. Najděte prenexní disjunktivní normální formu formule D z příkladu 3.1.14 ve skriptech.

3.2 Přirozená dedukce

Cvičení

3.2.1. Odvoďte formuli $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow$ **false** .

3.2.2. Dokažte větu 3.2.2 ze skript odvozením uvedených pomocných odvozovacích pravidel.

3.2.3. Odvoďte formuli $[(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. Návod: odvoďte $(p \wedge q \Rightarrow r), (p \Rightarrow q), p \Rrightarrow r$ a pak použijte pravidla zavedení $\Rightarrow$ a zobecněného pravidla zavedení $\Rrightarrow$.

3.2.4. Odvoďte formuli $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$.

3.2.5. Odvoďte formuli $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$.

3.2.6. Odvoďte formuli $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$.

3.2.7. Odvoďte formuli $\forall x (A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \forall x B(x))$, kde x není volná v A.

3.2.8. Odvoďte formuli $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$.

3.2.9. Odvoďte formuli $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.

3.2.10. Odvoďte formuli $\forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x B(x))$.

3.2.11. Odvoďte formuli $A(t) \Leftrightarrow \forall (x = t \Rightarrow A(x))$, kde term t je volný vzhledem k proměnné x ve formuli $A(x)$ a proměnná x není volná ve formuli $A(t)$.

3.2.12. Odvoďte formuli $A(t) \Leftrightarrow \exists x (x = t \wedge A(x))$, kde term t je volný vzhledem k proměnné x ve formuli $A(x)$.

3.2.13. Dokažte odvozovací pravidlo:

$$\frac{\Gamma \Rrightarrow t_1 = t_2}{\Gamma \Rrightarrow t_2 = t_1}$$

3.2.14. Dokažte odvozovací pravidlo:

$$\frac{\Gamma \Rrightarrow t_1 = t_2 \text{ a } \Gamma \Rrightarrow t_2 = t_3}{\Gamma \Rrightarrow t_1 = t_3}$$

3.2.15. Dokažte odvozovací pravidlo:

$$\frac{\Gamma \Rrightarrow t_1 = t_2}{\Gamma \Rrightarrow \tau(t_1) = \tau(t_2)}$$

4 Grafy

4.1 Základní pojmy

Cvičení

4.1.1. Graf $G = (V, H)$ bez smyček a násobných hran se nazývá *úplný*, jestliže jsou každé jeho dva vrcholy spojeny hranou. Určete, kolik hran má konečný úplný graf o $|V|$ vrcholech.

4.1.2. Nechť $G_1 = (V, H_1)$ a $G_2 = (V, H_2)$. Říkáme, že G_1 a G_2 jsou vzájemně *komplementární*, jestliže $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ a $G = (V, H_1 \cup H_2)$ je úplný graf. Dokažte, že je-li G_1 nesouvislý, je G_2 souvislý.

4.1.3. Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b. Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k, kde $1 \leq k < n$.

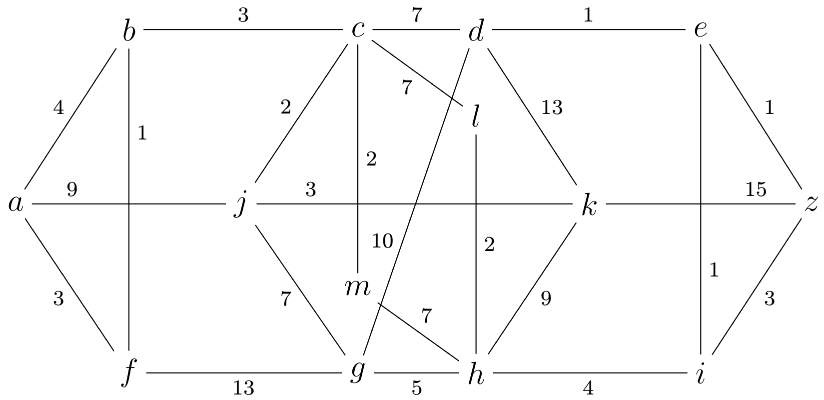
4.2 Problém nalezení minimální cesty v ohodnoceném grafu

Cvičení

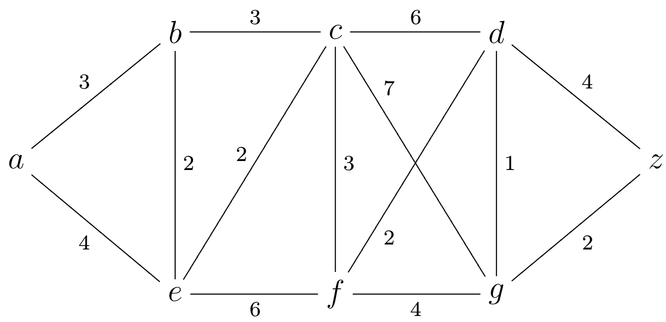
4.2.1. Nechť $G = (V, H)$ je souvislý graf, jehož všechny hrany jsou ohodnoceny číslem 1. Označme $d(x, y)$ délku nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy $x, y \in V$. Dokažte, že $d : V \times$

$\times V \to \mathbb{R}$ je metrika na V.

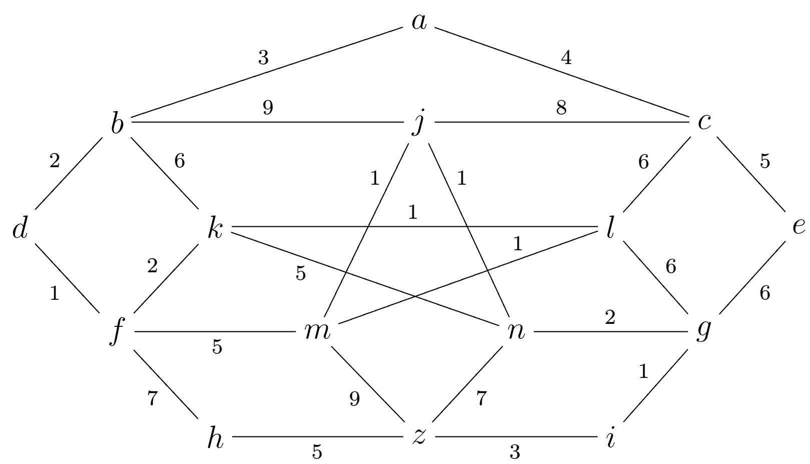
4.2.2. V daném grafu najděte nejkratší cestu z a do z:



4.2.3. V daném grafu najděte nejkratší cestu z a do z:



4.2.4. V daném grafu najděte nejkratší cestu z a do z:



4.3 Další grafové pojmy

Cvičení

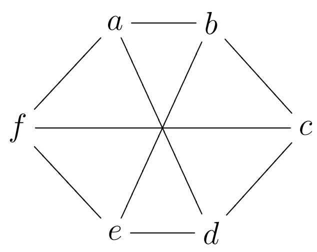
4.3.1. Dokažte, že v neorientovaném grafu $G = (V, H)$ platí $\sum_{v \in V} \mathrm{st}\,(v) = 2|H|$.

4.3.2. Najděte všechny podgrafy grafu z příkladu 4.3.1 ve skriptech.

4.3.3. Najděte všechny faktory grafu z příkladu 4.3.1 ve skriptech.

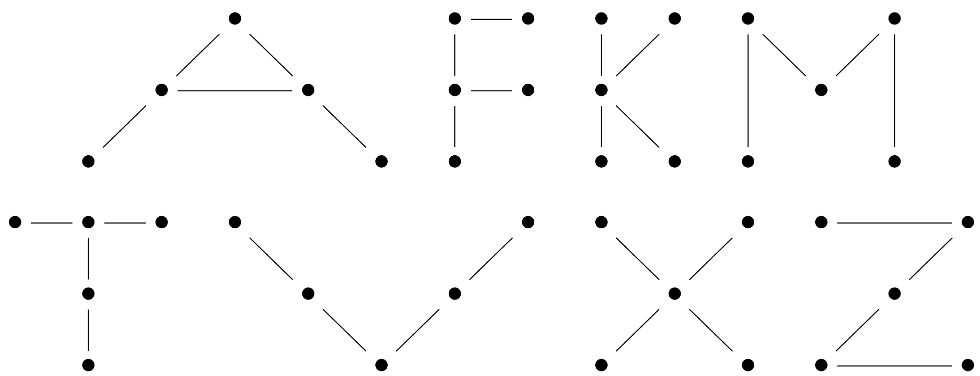
4.3.4. Najděte všechny indukované podgrafy grafu z příkladu 4.3.1 ve skriptech.

4.3.5. Dokažte, že graf



je izomorfní s $K_{3,3}$.

4.3.6. Jsou dány grafy:



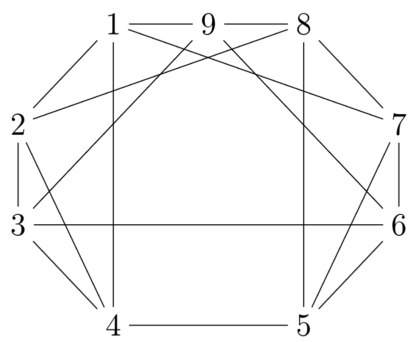
Zjistěte, které z nich jsou navzájem izomorfní. Rozdělte je do skupin tak, že v každé skupině budou grafy navzájem izomorfní. Kolik bude skupin?

4.3.7. Uvažujte graf z příkladu 2 ve cvičení 4.2. Rozhodněte a dokažte, zda je či není rovinný.

4.3.8. Uvažujte graf z příkladu 3 ve cvičení 4.2. Rozhodněte a dokažte, zda je či není rovinný.

4.3.9. Uvažujte graf z příkladu 4 ve cvičení 4.2. Rozhodněte a dokažte, zda je či není rovinný.

4.3.10. V grafu G (tzv. eneagram)



najděte podgraf homeomorfní s $K_{3,3}$. Je graf G rovinný?

4.3.11. * V grafu G z předchozího příkladu nalezněte podgraf homeomorfní s K_5.

4.3.12. Dokažte, že neexistuje neorientovaný graf bez smyček a násobných hran o 5 vrcholech, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně.

4.3.13. * Řešte předchozí úlohu pro libovolné n.

4.3.14. Zjistěte, kolik různých kružnic existuje v grafu K_5.

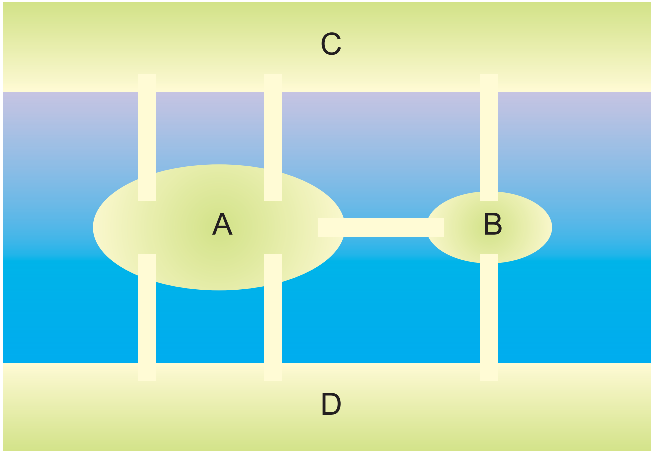
4.3.15. * Zjistěte, kolik různých kružnic délky k existuje v úplném grafu K_n o n vrcholech ($n \geq k \geq 3$).

4.3.16. Nakreslete graf K_5 jedním uzavřeným tahem.

4.3.17. Nakreslete graf K_7 jedním uzavřeným tahem.

4.3.18. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možno nakreslit úplný graf K_n o n vrcholech jedním tahem.

4.3.19. Dokažte důsledek 4.3.4 ze skript. Návod: rozšiřte vhodně graf G o nový vrchol a použijte větu 4.3.3.



Obr. 4.3.1 Mosty v městě Královci

4.3.20. Ve městě Královci (Konigsberg, Kaliningrad) na řece Pregel jsou dva ostrovy A a B, spojené mostem. Ostrov A je spojen s každým z břehů C, D dvěma rovnoběžnými mosty, ostrov B je s každým z obou břehů spojen pouze jedním mostem. Rozhodněte, je-li možné projít městem tak, abychom po každém z mostů přešli právě jednou a skončili na původním místě. (Hlavolam řešil a vyřešil švýcarský matematik L. Euler (1707-1783).)

4.3.21. Nakreslete graf se šesti vrcholy, v němž existuje hamiltonovská kružnice, ale který nelze nakreslit jedním uzavřeným tahem.

4.3.22. Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice.

4.3.23. Nakreslete graf z příkladu 10 jedním uzavřeným tahem.

4.3.24. V příkladech 2,3 a 4 ve cvičení 4.2 určete, který z grafů lze nakreslit jedním uzavřeným tahem. Který z nich lze nakreslit jedním otevřeným tahem?

4.3.25. * Nechť G_1 a G_2 jsou komplementární grafy. Dokažte, že má-li G_1 aspoň 11 vrcholů, pak aspoň jeden z grafů G_1, G_2 není rovinný.

4.3.26. Určete chromatická čísla grafů $K_{3,3}$ a K_5.

4.3.27. Určete chromatické číslo grafu K_n, kde $n \in \mathcal{N}$.

4.3.28. Určete chromatické číslo grafu z příkladu 4.3.1 ze skript.

4.3.29. Určete chromatické číslo grafu z příkladu 4.3.7 ve skriptech.

4.3.30. Určete chromatické číslo grafu na obrázku z důsledku 4.3.1 ve skriptech.

4.4 Stromy a kostry. Nalezení minimální kostry grafu

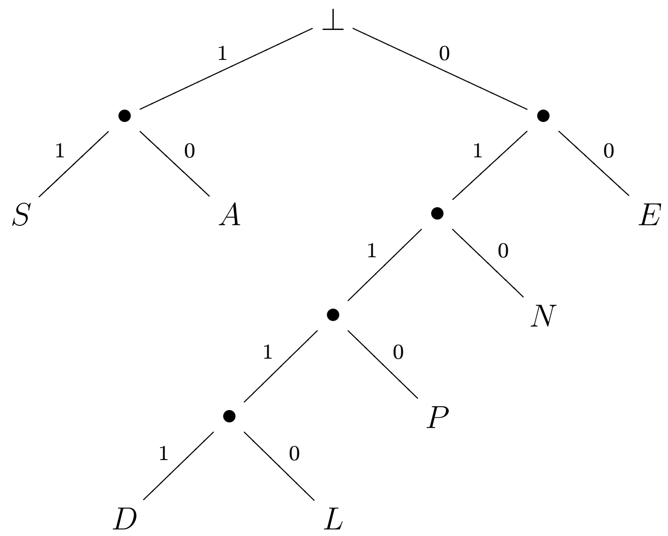
Cvičení

4.4.1. Určete počet koster úplného grafu K_n o n vrcholech pro $n = 1, 2, 3, 4$.

4.4.2. * Pokuste se zobecnit výsledek předchozího cvičení a dokázat pro libovolné $n \in \mathcal{N}$.

4.4.3. Dokažte, že strukturní vzorec uhlovodíku C_nH_{2n+2} je strom.

4.4.4. V Huffmanově kódu s kořenovým binárním stromem



dekódujte řetězce 011000010, 01110100110 a 01111001001110.

4.4.5. V Huffmanově kódu z předchozího příkladu zakódujte řetězce “DEN”, “NEED” a “LEADEN”.

4.4.6. Využijte text aktuálního příkladu k definici Huffmanova kódu, ve kterém tento text zakódujte.

4.4.7. V grafech z příkladů 2,3,4 ze cvičení 4.2 najděte kostru s minimálním celkovým ohodnocením.

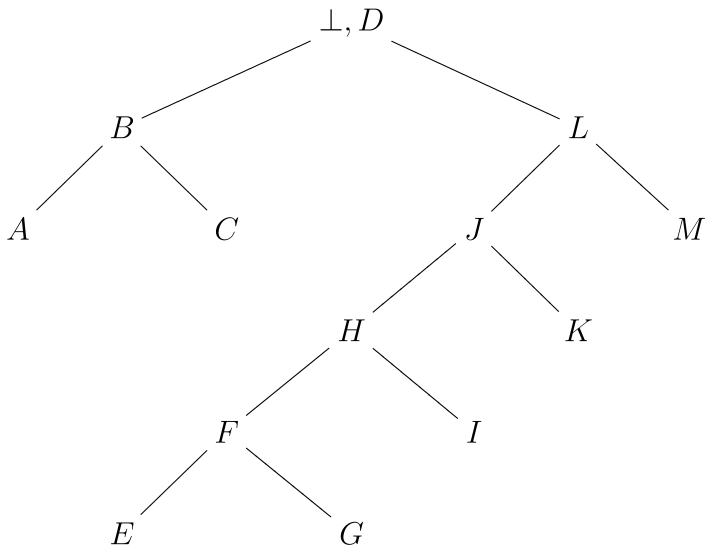
4.4.8. Najděte všechny binární stromy s 2,3 a 4 vrcholy.

4.4.9. Najděte všechny plné binární stromy se 7, 8 a 9 vrcholy.

4.4.10. Najděte (pokud existuje) plný binární strom se 4 vnitřními a 5 koncovými vrcholy.

4.4.11. Najděte (pokud existuje) plný binární strom výšky 3 s 9 koncovými vrcholy.

4.4.12. Aplikujte algoritmus 4.4.3 na binární vyhledávací strom



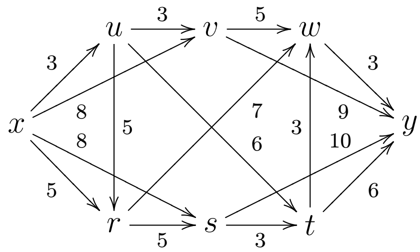
a simulujte vyhledání vrcholu se znakem “I”, jsou-li data v binárním stromu řazena abecedně.

4.5 Tok v orientovaném grafu

Cvičení

4.5.1. Aplikujte algoritmus 4.5.1 ze skript na příklad 4.5.1 ve skriptech tak, že vyjdete z jiného základního toku F_0 než ve výše uvedeném řešení příkladu.

4.5.2. Najděte maximální tok mezi vrcholy x a y v grafu



a určete jeho propustnost.