3.cvičení

Výroky, výrokové funkce

1. Rozhodněte, které z uvedených výrazů jsou výroky:

a) Včera jsem se učil b) $3\times3=10$
c) $2x+5=0$ d) Počítej!
e) Levná výroba proudu f) Číslo 20 je sudé

Výrokové spojky, složené výroky, tabulky pravdivostních hodnot – skripta

2) Pomocí tabulky pravdivostních hodnot vyšetřete pravdivostní hodnotu výroků

a) $\overline{(p\wedge q)}\Leftrightarrow \overline{p}\vee\overline{q}$ (De Morganovo pravidlo)

b) $\overline{(p\Rightarrow q)}\Leftrightarrow p\wedge\overline{q}$ (negace implikace)

3) Určete pravdivostní hodnotu výroků *p*, *q*, *r*, jestliže víte, že formule

$$\big((\neg p\Rightarrow r)\vee(q\wedge\neg r)\big)\Leftrightarrow p\vee r$$

je nepravdivá.

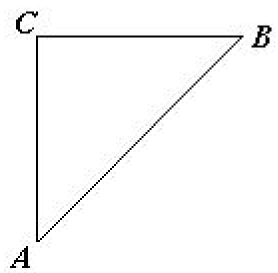
4) Utvořte negace následujících výroků (nejdřív rozhodněte, zda jde o výroky):

a) Číslo 3 je prvočíslo

b) Pro každé $a,b\in\mathbb{R}$ platí $(a+b)^2=a^2+b^2$

c) $x^2-5x+6=0$

d) O prázdninách jsem byl u moře i na horách



5) Pro dané výroky *p*, *q* (pokud jde o výroky) formulujte slovně implikaci $p\Rightarrow q$ a zjistěte kdy je pravdivá, jestliže

	p značí výrok	*q* značí výrok
a)	Trojúhelník *ABC* (vpravo) je rovnostranný	Trojúhelník *ABC* má součet vnitřních úhlů 190^0
b)	Číslo 12 je dělitelné čtyřmi	Číslo 5 je sudé
c)	Číslo *a* je dělitelné čtyřmi	$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$
d)	Číslo *a* je dělitelné třemi	Číslo *a* je sudé
e)	Čtyřúhelník je obdélník	Úhlopříčky čtyřúhelníku jsou stejně dlouhé

6) Rozhodněte, pro které případy z předchozího cvičení platí $q\Rightarrow p$ resp. $p\Leftrightarrow q$.

7) V následujících tvrzeních doplňte implikace resp. ekvivalence (pomocí výrazů „je nutné“, „stačí“, je nutné a stačí“) tak, aby tvrzení byla pravdivá:

a) Pro to, aby součet dvou celých kladných čísel byl dělitelný dvěma … aby každý sčítanec byl dělitelný dvěma

b) Pro to, aby bylo celé číslo dělitelné stem … aby bylo dělitelné deseti

c) Pro to, aby bylo celé číslo dělitelné stem … aby bylo dělitelné tisícem

d) Pro to, aby platila nerovnost $\frac{1}{x}<1$ … aby bylo $x>1$

e) Pro to, aby platila nerovnost $\frac{1}{x}<1$ … aby bylo $x>1$ nebo $x<0$

8) K implikaci „Je-li číslo a kladné, má daná rovnice alespoň jeden kořen“ utvořte

a) obrácenou implikaci b) obměnu c) negaci

9) Je dána rovnice $x^2 + 4x + 4 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je pravdivý následující výrok *V* a utvořte jeho obměnu a negaci.
V: Má-li daná rovnice řešení v množině reálných čísel a má-li dva různé kořeny, jsou oba celá kladná nebo oba iracionální čísla.

Výrokové funkce, kvantifikátory - skripta

Formulujte tvrzení z příkladů 4c) a 5c),d) pomocí kvantifikátorů tak, aby šlo o výroky.

9) Formalizujte následující výroky (a rozhodněte o jejich pravdivosti):
- a) Pro každé reálné číslo *x* platí, že druhá mocnina *x* je větší než nula
- b) Součet i součin přirozeného čísla se sebou samým je opět přirozeným číslem,
- c) Pro každé racionální číslo platí, že je lze zapsat zlomkem
  (Pro každé *x* z množiny racionálních čísel platí, že existuje dvojice čísel *p* z množiny celých čísel a *q* z množiny přirozených čísel tak, že číslo *x* lze zapsat jako podíl *p* a *q*).
- d) Pro každé reálné číslo *x* existuje reálné číslo y takové, že součet *x* a *y* je roven deseti.
- e) Existuje reálné číslo *y* tak, že pro všechna reálná čísla *x* platí, že součet *x* a *y* je deset.

10) Je dán výrok $\forall x \in \mathbb{R} : \left(x < 0 \wedge x^2 > 0 \right)$. Který z následujících výroků je jeho negací?
- a) $\exists x \in \mathbb{R} : \left(x \geq 0 \vee x^2 \leq 0 \right)$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : \left(x \geq 0 \vee x^2 \leq 0 \right)$
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : \left(x < 0 \vee x^2 > 0 \right)$

11) Utvořte negace následujících výroků
- a) Alespoň jednou denně plavu
- b) V zoo je nejméně 25 surikat
- c) Každá číselná množina je konečná
- d) Každý student má rád matematiku nebo angličtinu
- e) Pro žádné celé číslo *k* neplatí $3k - 1 > 0$
- f) Neexistuje přirozené číslo *n* s vlastností $n^2 = 2$

12) (***prémie***) Pro $n \in \mathbb{N}$ jsou dány výrokové formy
$F_1(n)$: Číslo $3n - 2n^2 - 1$ je číslo dělitelné pěti
$F_2(n)$: Číslo $n \cdot (n-1) - 5$ je číslo dělitelné sedmi.
Najděte přirozené číslo *n* tak, aby výrok $F(n) = F_1(n) \vee F_2(n)$ byl pravdivý.

Množiny

1) Je dána množina $M = \{1, \{2\}, \langle 3,4 \rangle, \emptyset\}$. Rozhodněte, zda jsou pravdivé výroky

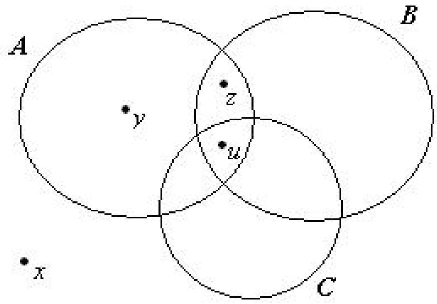
a) $1 \in M$ b) $\{2\} \subseteq M$ c) $\langle 3,4 \rangle \subseteq M$ d) $4 \in M$ e) $\emptyset \subseteq M$

2) Uveďte příklad množin *A, B* pro které platí $A \in B \wedge A \subset B$.

3) Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$
Zapište tyto množiny jako intervaly a určete:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $\overline{A}$ e) $\overline{A} \setminus B$ f) $\overline{A \cap B}$

4) Jsou dány množiny *A,B,C* a prvky *x,y,z,u* tak, jak je znázorněno v sousedním diagramu.



Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení:

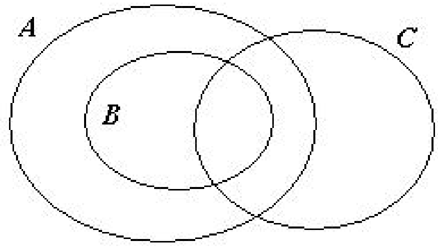
a) $x \in A \Rightarrow y \in B$

b) $y \in C \vee z \in (A \cup B)$

c) $z \in (A \cap B) \Leftrightarrow u \in \overline{C \cup A}$

5) Je dána množina $M = A \cup B \cup C$, kde *A* je některá podmnožina množiny všech trojúhelníků v rovině, které mají střed kružnice opsané na některé ze svých stran, *B* je některá podmnožina množiny všech trojúhelníků v rovině, které jsou rovnoramenné, a *C* je některá podmnožina množiny všech trojúhelníků v rovině, které mají celočíselné délky stran v centimetrech.

a) Uveďte, jaké vlastnosti má trojúhelník, který je prvkem množiny *M*, jestliže pro množiny *A,B* a *C* platí vztah, který je znázorněn sousedním diagramem.



b) Rozhodněte, zda v množině *M* může existovat trojúhelník *T*, pro který platí
$T \in \overline{\overline{A \cap B} \cup C} \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.