Domácí úloha 3

Výroky, výrokové funkce

1) Určete pravdivostní hodnotu výroku

a) $(2\cdot 3=6)\vee(3\cdot 4=14)\Rightarrow(2<1)$ b) $(2<3)\Rightarrow(2\neq 2)\wedge(3\cdot 4=12)$

c) $(1<2)\wedge(2\neq 2)\Rightarrow(3\cdot 5=16)$ d) $(2\cdot 3=6)\wedge(2<1)\Rightarrow(3\cdot 4=12)$

2) Ověřte, že

a) $p\vee\neg(p\wedge q)$ je tautologie,

b) $(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$ je kontradikce

3) Ověřte, že

$p\Rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$ je tautologie.

4) Ověřte ekvivalenci

$p\vee q\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

5) Nechť $p(x)$ je výraz $x+2>5$. Rozhodněte, zda je to výroková funkce; v kladném případě rozhodněte, zda následující množiny jsou její přípustné obory:

a) $\mathbb{N}$ b) $M=\{-1,-2,-3,...\}$ c) $\mathbb{C}$.

6) Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků (přípustná množina je $\mathbb{R}$):

a) $\forall x:|x|=x$ b) $\exists x:x^2=x$ c) $\forall x:x+1>x$ d) $\exists x:x+2=x$

7) Utvořte negace výroků z př. 5) a co nejvíce je zjednodušte.

8) Nechť $A=\{1,2,3,4,5\}$. Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků:

a) $(\exists x\in A):(x+3=10)$ b) $(\forall x\in A):(x+3<10)$

c) $(\exists x\in A):(x+3<5)$ d) $(\forall x\in A):(x+3\leq 7)$.

9) Utvořte negace výroků z př. 8) a co nejvíce je zjednodušte.

10) Utvořte negaci výroku

a) $\forall x\in\mathbb{N}:x>2\Rightarrow 2x\leq 4$

b) $\exists x\in\mathbb{N}:x>2\Rightarrow 2x\leq 4$

11) Utvořte negace výroků:

a) $\forall x:p(x)\wedge\exists y:q(y)$ b) $\exists x:p(x)\vee\forall y:q(y)$.

12) Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků s přípustnou množinou $\{1,2,3\}$:

a) $\exists x\forall y:x^2<y+1$ b) $\forall x\exists y:x^2+y^2<12$ c) $\forall x\forall y:x^2+y^2<12$

13) Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků s přípustnou množinou $\{1,2,3\}$:

a) $\exists x\forall y\exists z:x^2+y^2<2z^2$ b) $\exists x\exists y\forall z:x^2+y^2<2z^2$.

14) Nechť $A=\{1,2,...,9,10\}$ je přípustná množina pro následující predikáty. Jde-li o výroky, určete jejich pravdivostní hodnotu. Jde-li o výrokové funkce, najděte obor pravdivosti:

a) $\forall x \exists y : x+y<14$ b) $\forall x \forall y : x+y<14$

c) $\forall y : x+y<14$ d) $\exists x : x+y<14$.

15) Utvořte negace následujících výroků:

a) $\exists x \forall y : p(x,y)$ b) $\forall x \forall y : p(x,y)$ c) $\exists x \exists y \forall z : p(x,y,z)$

16) Utvořte negace následujících výroků:

a) $\forall x \exists y : (p(x) \vee q(y))$ b) $\exists x \exists y : (p(x) \wedge \neg q(y))$ c) $\exists x \forall y : (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$

17) (***2 body***) Pro $n \in \mathbb{N}$ jsou dány výrokové formy

$F_1(n)$: Číslo $3n-2n^2-1$ je kladné číslo dělitelné pěti

$F_2(n)$: Číslo $n\cdot(n-1)-5$ je kladné číslo dělitelné sedmi.

Najděte přirozené číslo n tak, aby výrok $F(n)=F_1(n)\vee F_2(n)$ byl pravdivý.

Množiny

18) Nechť $A=\{0,1,2,3\}$. Najděte množiny $A\cup A,\quad A\cap A,\quad A\setminus A$. Rozhodněte, zda se výsledky dají zobecnit. Jestliže ano, dokažte.

19) Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

a) $A\subset B$ b) $A\subset C$ c) $B\subset C$ d) $B\subset A$

e) $C\subset A$ f) $C\subset B$ g) $A\cup B=C$ h) $A\setminus B=C$

i) $A\cap B=C$.

20) Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

a) $M_1\cup M_2$ b) $M_1\cup M_2\cup M_3$ c) $M_2\cap M_3$

d) $M_1\cap M_2\cap M_3$ e) $(M_1\cup M_2)\cap M_3$ f) $(M_1\cap M_3)\cup(M_2\cap M_3)$

g) $M_2\setminus M_2$ h) $M_1\setminus M_2$ i) $(M_1\setminus M_2)\cup(M_2\setminus M_1)$

j) $(M_1\cup M_2)\setminus(M_1\cap M_2)$ k) $(M_1\cap M_2)\cup M_3$ l) $(M_1\cup M_2)\cap(M_2\cup M_3)$.

21) (***2 body***) Zjednodušte zápis množiny $M=\overline{\overline{A\cup\overline{B}}\cup\big((A\cap C)\setminus B\big)}\cap\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\cap B\right)$ (bez použití Vennových diagramů!)