Úpravy algebraických výrazů

Mocniny a odmocniny

Pro každé reálné r, s a každé $a>0, b>0$ (resp. pro každé celé r, s a každé $a\neq 0, b\neq 0$) platí:

$$a^0=1, a^1=a \qquad \left(a^r\right)^s=a^{rs}$$

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r} \qquad \left(ab\right)^r=a^r\cdot b^r$$

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$

$$a^r:a^s=a^{r-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$$

Dále platí

$$1^n=1, \quad (-1)^{2n}=1, \quad (-1)^{2n+1}=-1$$

Je-li $n\in\mathbb{N}, a\geq 0$, existuje právě jedno číslo $x\geq 0$ tak, že $x^n=a$. Toto číslo se nazývá ***n-tá odmocnina*** z čísla a a značí se $\sqrt[n]{a}$.

Je-li číslo $a<0, n>0$ liché, má rovnice $x^n=a$ právě jedno reálné řešení, totiž číslo $-\sqrt[n]{-a}<0$. Místo $-\sqrt[n]{-a}$ píšeme $\sqrt[n]{a}$. Není-li n liché, symbol $\sqrt[n]{a}$ pro $a<0$ nedefinujeme.

POZOR: *sudé odmocniny jsou definovány pouze pro nezáporná čísla, liché odmocniny jsou definovány pro všechna reálná čísla (tedy i pro záporná)!*

Platí

$$\sqrt[n]{0}=0, \sqrt[n]{1}=1, \qquad \sqrt[2n+1]{-1}=-1,$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}, \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}, \qquad a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}.$$

Pro $a>0, n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}$ definujeme $\underline{a^{\frac{r}{n}}=\sqrt[n]{a^r}}$. Potom platí:

$$a^{-\frac{r}{n}}=a^{\frac{-r}{n}}=a^{\frac{r}{-n}}=\frac{1}{a^{\frac{r}{n}}}=\sqrt[n]{a^{-r}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}.$$

Pro všechna $a>0, b>0$ a pro všechna $r\in\mathbb{Q}, s\in\mathbb{Q}$ platí:

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}, \quad (a^r)^s=a^{r\cdot s}, \quad (a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}, \quad \frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}.$$

POZOR!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a, \text{ ale } \sqrt{a^2}=|a|\,!$$

Umocňování a rozklad dvojčlenů

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$

obecně (***Newtonova binomická věta***):

$$(a\pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k;$$

Čísla $\binom{n}{k}$ jsou tzv. ***binomické koeficienty*** (***kombinační čísla***),

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Jejich hodnoty lze snadno najít pomocí ***Pascalova trojúhelníku***:

n – mocnitel dvojčlenu	*binomické koeficienty*
$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1

(na začátku a konci každého řádku je jednička, další čísla jsou vždy součtem nejbližších dvou čísel o řádek výš).

Pro rozklad dvojčlenů platí:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$$

$$a^{2n} + b^{2n} \quad \textit{nelze rozložit}$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + (-1)^{k-1}a^{2n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$$

$$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + (-1)^k a^{2n-k}b^k + \cdots + ab^{2n-1} - b^{2n})$$

Rozklad polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ na kořenové činitele:

Platí-li $P_n(x_0) = 0$, nazývá se číslo x_0 kořen polynomu $P_n(x)$, výraz $x - x_0$ kořenový činitel a platí $P_n(x) = (x - x_0)\,Q_{n-1}(x)$.

Polynom n-tého stupně má (v oboru komplexních čísel) právě *n* kořenů. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různé) kořeny (reálné nebo komplexní) polynomu $P_n(x)$, platí

$P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ - rozklad na kořenové činitele

a dále $a_0 = (-1)^n a_n\, x_1 x_2 \cdots x_n$.

Pro kořeny polynomu ***druhého stupně*** $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ platí známý vzorec $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

je-li koeficient b sudý, $b = 2k$, můžeme použít vzorec $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Zřejmě platí $P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, tedy pro $a = 1$ je

$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 \Rightarrow \underline{b = -(x_1+x_2)},\ \underline{c = x_1x_2}$;

jinak platí $a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + a x_1 x_2 \Rightarrow \underline{b = -a\cdot(x_1+x_2)},\ \underline{c = a\cdot x_1 x_2}$

a obecně pro polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ platí $\underline{\underline{a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot x_1 x_2 \cdots x_n}}$.

Funkce

IDA:
Funkce (zobrazení) $f: A \to B,\ x \mapsto y$ je podmnožina kartézského součinu $A \times B$ (relace z *A* do *B*), pro kterou platí:

$$\forall x \in A \ \exists! y \in B: \ (x, y) \in f$$

Jsou-li množiny *A*, *B* konečné, můžeme příslušné množiny *A*, *B*, jejich kartézský součin $A \times B$ i funkci $f \subset A \times B$ zadat výčtem prvků;
jsou-li tyto množiny nekonečné, popíšeme příslušné přiřazení pomocí předpisu (výrokovou funkcí), např.

$$f = \left\{ (x, y) \middle| \ y = x^2 \right\}$$

Obvykle rozumíme funkcí právě tento přiřazovací předpis tak, jak se funkce definovala na střední škole:

Střední škola:
Funkce je předpis *f*, který přiřazuje každému prvku nějaké množiny (definičního oboru $\mathcal{D}_f$) prvek jiné množiny (oboru hodnot $\mathcal{H}_f$).
<u>Tímto způsobem budeme chápat pojem funkce v předmětu IMA a tedy i v tomto semináři.</u>

Funkcí (jedné proměnné) obvykle rozumíme takové zobrazení, kdy definiční obor i obor hodnot jsou číselné množiny. Budeme se věnovat převážně reálným funkcím jedné reálné proměnné, tedy zobrazením $f: \mathcal{D}_f \to \mathcal{H}_f,\ \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{H}_f \subseteq \mathbb{R}$.

Je-li funkce *f* zadaná nějakým předpisem, přičemž není explicitně zadán její definiční obor, rozumíme jím množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má příslušný předpis smysl. Tuto množinu nazýváme ***přirozeným definičním oborem*** funkce *f*.

Graf funkce jedné proměnné je množina bodů v rovině daná vztahem

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \middle| \ x \in \mathcal{D}_f \wedge y = f(x) \right\}$$

tedy právě ta množina, pomocí níž se definuje funkce v předmětu IDA.

Rovnost funkcí:
Přímo z definice pojmu funkce plyne, že platí $f = g$, jestliže $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ a $\forall x: f(x) = g(x)$.

Zúžení funkce:
Zúžení funkce *f* na množinu *M* (nebo též ***parciální funkce***) je funkce $f\big|_M$ s definičním oborem $\mathcal{D}_f \cap M$ dané předpisem

$$f\big|_M: \quad f\big|_M(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap M.$$

Některé typy funkcí:

Funkce *f* je ***rostoucí*** resp. ***klesající*** na množině *M*, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad resp. \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

a ***neklesající*** resp. ***nerostoucí*** na množině *M*, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad resp. \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

Funkce *f* je ***prostá***, platí-li $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f: x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

Funkce *f* je ***sudá*** resp. ***lichá***, platí-li

$$f(-x) = f(x) \ resp.\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$$

a ***periodická***, jestliže $\exists p \ne 0$ tak, že platí

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}_f.$$

Funkce *f* je ***ohraničená*** (shora resp. zdola), je-li její obor hodnot ohraničený (shora resp. zdola), tedy platí-li

$$\exists k \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathcal{H}_f : \left(y \le k \quad resp. \quad k \le y \right).$$

Vytváření nových funkcí
z daných funkcí f, g, φ (vztahy platí pro všechna x z definičních oborů vzniklých funkcí)

složená funkce $f \circ \varphi$ (čti *f* po φ) je dána vztahem

$$\left(f \circ \varphi \right)(x) = f\left(\varphi(x) \right),$$

inverzní funkce f^{-1} je funkce s definičním oborem rovným oboru hodnot funkce *f* a s vlastností

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

f* má inverzní funkci *f $^{-1}$ $\Leftrightarrow$ ***f* je prostá**

Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$ (osy 1. a 3. kvadrantu)

součet, rozdíl, součin a ***podíl*** funkcí – funkce $f \pm g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ s vlastnostmi

$$\left(f \pm g \right)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\left(f \cdot g \right)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Elementární funkce

Polynomy
jsou funkce zadané pomocí předpisu tvaru

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

přičemž

n je ***stupeň*** polynomu

$a_i, i = 0 \ldots n$ je ***koeficient*** u *i*-té mocniny

a_0 je ***absolutní člen.***

Číslo x_0, pro které platí $P_n(x_0) = 0$, je ***kořen*** polynomu. Je-li x_0 kořen polynomu $P_n(x_0)$, nazývá se výraz $x - x_0$ ***kořenový činitel***, přičemž platí $P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x)$.

Vlastnosti polynomů

- polynom *n*-tého stupně má v oboru komplexních čísel právě *n* kořenů
- jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různé) kořeny polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (reálné nebo komplexní), platí $P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ - ***rozklad na kořenové činitele*** a dále
- $a_0 = (-1)^n a_n\, x_1 x_2 \cdots x_n$.

Funkční hodnoty polynomu určujeme pomocí ***Hornerova schématu***.

Určení $P_n(\alpha)$ pro $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0$:

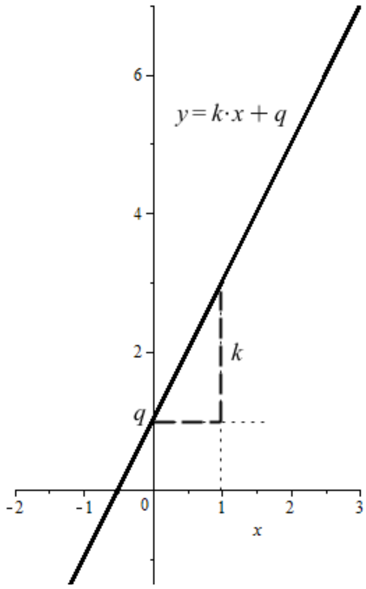
	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_i	$\ldots$	a_1	a_0
α	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = \alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_{i-1} = \alpha \cdot b_i + a_i$	$\ldots$	$b_0 = \alpha \cdot b_1 + a_1$	$P(\alpha) = \alpha \cdot b_0 + a_0$

Přitom platí $P_n(x) = (x - \alpha)\left(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_i x^i + \cdots + b_1 x + b_0 \right) + P(\alpha)$.

Je-li α kořen polynomu P_n, tedy platí $P_n(\alpha) = 0$, dostáváme v dolním řádku tabulky koeficienty polynomu, který vznikne po vytknutí kořenového činitele $x - \alpha$.

Speciální případy:

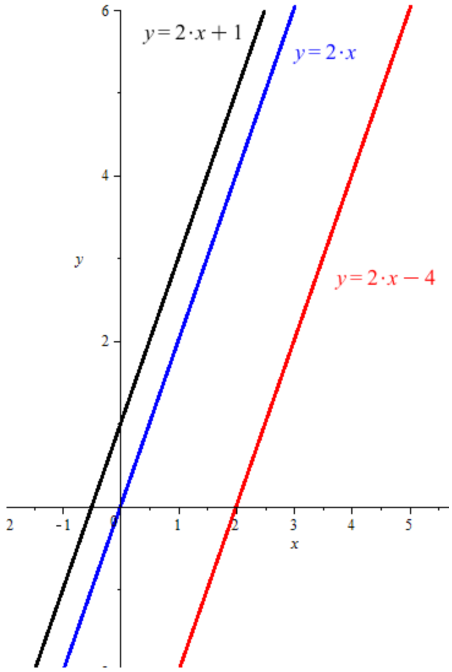
Lineární funkce je funkce tvaru $f(x) = kx + q$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$ (pro $k \neq 0$. Grafem je přímka:



$f(0) = k \cdot 0 + q = q$ - úsek na ose y

$k = \dfrac{k}{1} = \operatorname{tg}\varphi$ - směrnice

$0 = k \cdot x + q \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{q}{k}$ průsečík s osou x

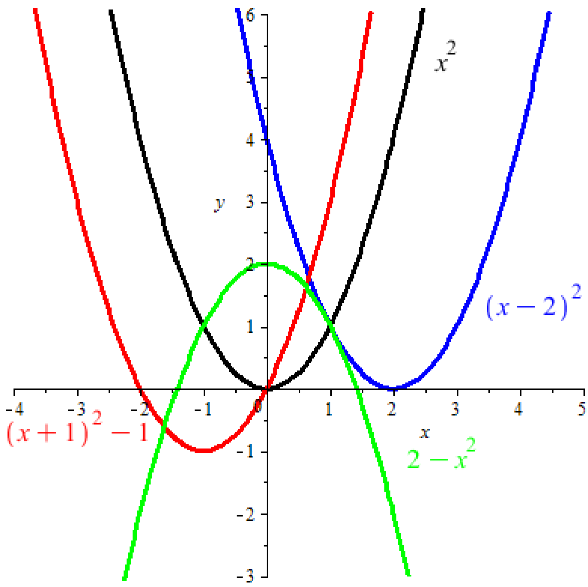


Kvadratická funkce je funkce tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, grafem je parabola:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y - c = a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \quad y - \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$$

- rovnice tvaru $y - \boldsymbol{b} = k(x - \boldsymbol{a})^2$; $V = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ je vrchol paraboly.

Je-li $k > 0$, je parabola „otevřená nahoru“, v intervalu $(-\infty, \boldsymbol{a})$ funkce klesá, v intervalu $(\boldsymbol{a}, \infty)$ roste;
je-li $k < 0$, je parabola „otevřená dolů“, v intervalu $(-\infty, \boldsymbol{a})$ funkce roste, v intervalu $(\boldsymbol{a}, \infty)$ klesá.



$y = x^2 \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0)^2$ vrchol $V = [0,0]$,
$k = 1 > 0$. otevřená nahoru

$y = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 2)^2$,
vrchol $V = [2,0], k = 1 > 0$, otevřená nahoru

$y = x^2 + 2x \Leftrightarrow y + 1 = 1 \cdot (x + 1)^2$,
vrchol $V = [-1,-1], k = 1 > 0$, otevřená nahoru

$y = 2 - x^2 \Leftrightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 0)^2$,
vrchol $V = [0,2], k = -1 < 0$, otevřená dolů.

Racionální lomené funkce

jsou funkce tvaru $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ resp. $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně *n* resp. *m*.

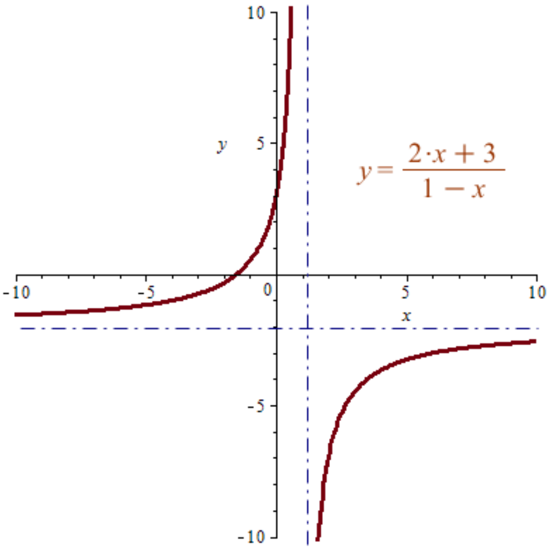
Racionální funkce je ***ryze lomená*** pro $n < m$
neryze lomená pro $n \geq m$.

Speciální případ:

Lineární lomená funkce je funkce tvaru $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\, x\neq-\dfrac{d}{c}, c\neq 0$

přičemž $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ můžeme upravit na tvar $y-\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{c}\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{ad}{c^2}\right)\cdot\dfrac{1}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}$ neboli $y-\boldsymbol{b}=k\cdot\dfrac{1}{x-\boldsymbol{a}}$;

grafem je hyperbola s vrcholem $V=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ a asymptotami $x=\boldsymbol{a}, y=\boldsymbol{b}$.



Například pro $y=\dfrac{2x+3}{1-x}=\dfrac{2(x-1)+5}{-(x-1)}=-2-5\cdot\dfrac{1}{x-1}$

je grafem hyperbola $y+2=-5\cdot\dfrac{1}{x-1}$,

která má vrchol $V=[1,-2]$, asymptoty $x=1, y=-2$,

je rostoucí na intervalech $(-\infty,1)$ a $(1,\infty)$

a prostá na celém definičním oboru.

Mocninné funkce

jsou funkce tvaru $f(x)=x^a$, kde $a\in\mathbb{R}$. Přitom mohou nastat tyto možnosti:

a) $a=0$ - jedná se o konstantu

b) a je přirozené číslo, $a\in\mathbb{N}$. Potom se jedná o speciální případ polynomu.

c) a je celé záporné číslo, $a=-r, r\in\mathbb{N}$. Potom $f(x)=x^{-r}=\dfrac{1}{x^r}$, $\quad \mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{0\}$.

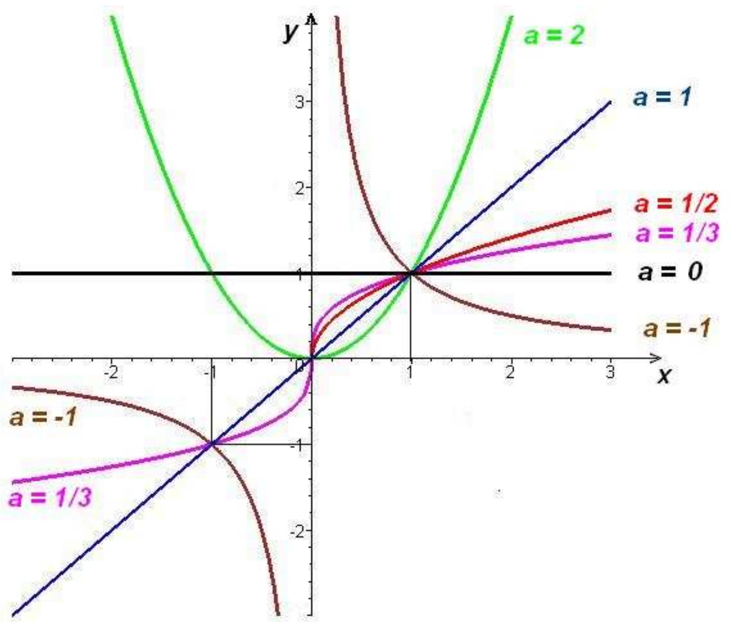
d) a je převrácená hodnota přirozeného čísla, $a=\dfrac{1}{n}$. Potom $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$,

$\mathcal{D}_f=\langle 0,\infty\rangle$ pro n sudé, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ pro n liché.

e) a je racionální číslo, $a=\dfrac{p}{q}$. Potom je $x^{\frac{p}{q}}$ složená funkce, $f(x)=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$.

f) a je iracionální číslo. Potom $\mathcal{D}_f=\langle 0,\infty)$ pro $a>0$ a $\mathcal{D}_f=(0,\infty)$ pro $a<0$.

Grafy mocninných funkcí $f(x)=x^a$:

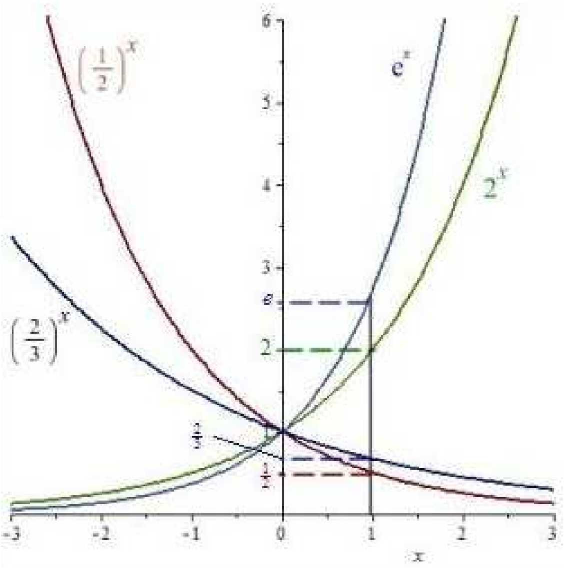


Exponenciální funkce
jsou funkce tvaru $f(x) = a^x$, kde $a > 0$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_f = (0, \infty)$.
Funkce je rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$; pro $a = 1$ se jedná o konstantu $f(x) = 1$.
Grafy všech exponenciálních funkcí procházejí bodem $[0,1]$.

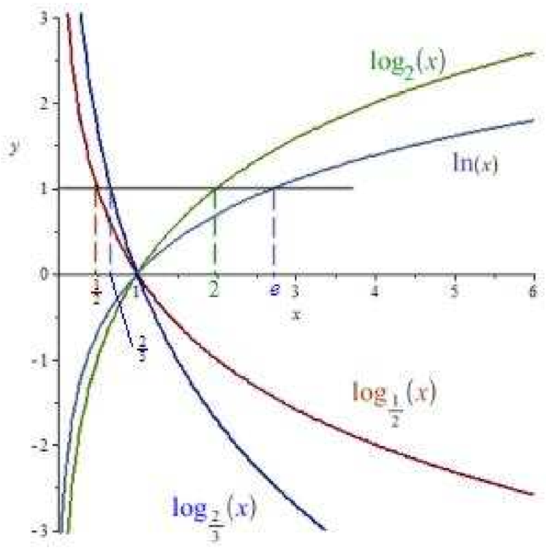
Logaritmické funkce
při základu *a*, kde $0 < a < 1$ nebo $a > 1$, jsou funkce tvaru $f(x) = \log_a x$; $\mathcal{D}_f = (o, \infty)$. Jsou inverzní k funkcím $f(x) = a^x$, tedy platí $\underline{x = a^{\log_a x}}$ a $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.
jinak řečeno $\log_a x$ je číslo, na něž je třeba základ *a* umocnit, abychom dostali číslo *x*.

Logaritmická funkce při základu $e = 2{,}718281828\ldots$ se stručně nazývá logaritmická funkce (přirozený logaritmus) a značí se $\ln x := \log_e x$.
Logaritmickou funkci při základu 10 (dekadický logaritmus) značíme $\log x := \log_{10} x$.
Je-li $a > 0, b > 0$, přičemž $a \neq 1, b \neq 1$, platí $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, speciálně $\underline{\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$.
Všechny logaritmické funkce procházejí bodem $[1,0]$.
Platí $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$, $k \cdot \log_a x = \log_a x^k$.

Grafy exponenciálních funkcí



Grafy logaritmických funkcí

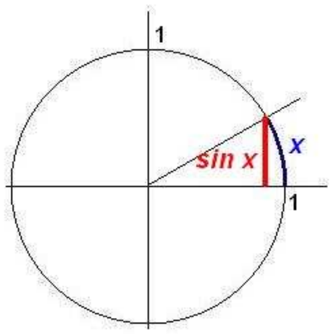


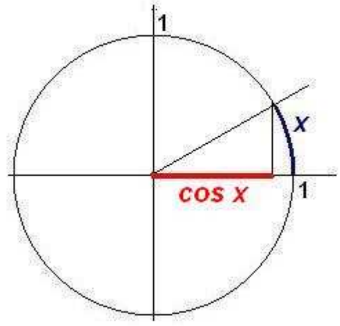
Goniometrické funkce

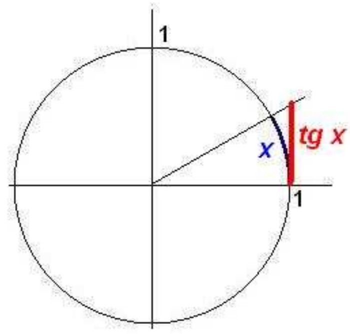
nebo také ***trigonometrické funkce*** reálného argumentu (úhlu v obloukové míře) jsou funkce
$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Lze je zavést pomocí jednotkové kružnice takto:
je-li *x* délka oblouku na jednotkové kružnici mezi bodem $[1,0]$ a průsečíkem této kružnice s polopřímkou, která vychází z počátku souřadnic, je
$\sin x$ roven druhé souřadnici tohoto průsečíku,
$\cos x$ jeho první souřadnici.

Zřejmě platí ***základní trigonometrická identita*** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (z Pythagorovy věty)







Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

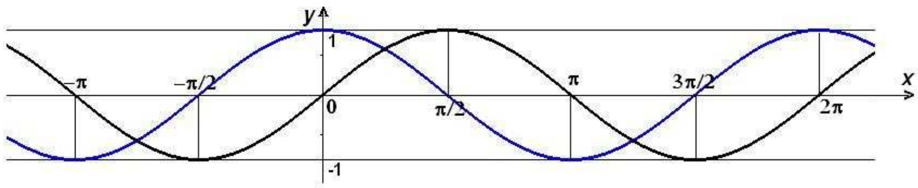
$$\mathcal{D}_{\sin} = \mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}_{\operatorname{tg}} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq (2k+1)\cdot\tfrac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \mathcal{D}_{\operatorname{cotg}} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou periodické s periodou $p = 2\pi$, $\sin x$ je lichá, $\cos x$ sudá, funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou liché funkce periodické s periodou $p = \pi$.

Grafy funkcí

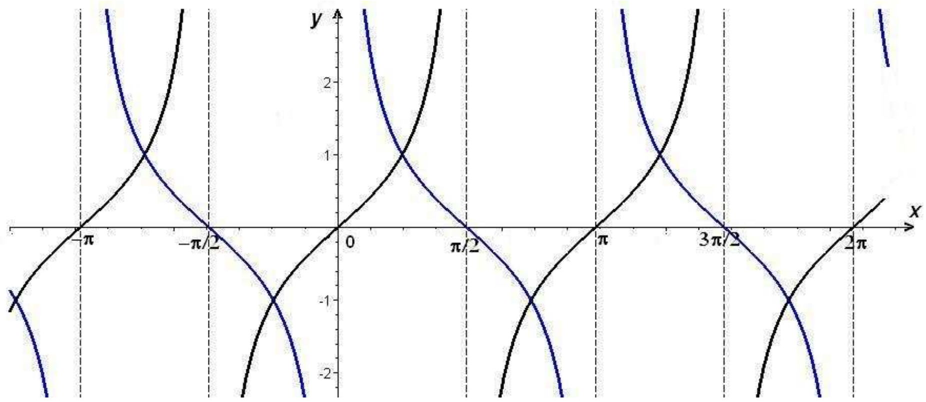
$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$

$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$



$\boldsymbol{f(x) = \operatorname{tg} x}$

$\boldsymbol{f(x) = \operatorname{cotg} x}$



Hodnoty goniometrických funkcí pro některé argumenty:

	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sin	0	1	0	-1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	1	0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg	0	není def.	0	není def.	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
cotg	není def.	0	není def.	0	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

Užitečné vztahy:

$$\boxed{\forall x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ platí:} \quad \begin{aligned} &\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x),\\ &\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x),\\ &\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x), \quad \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x). \end{aligned}}$$

Vyjádření goniometrické funkce daného argumentu pomocí jiné goniometrické funkce téhož argumentu:

	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{cotg}\, x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\pm\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\mathrm{cotg}\, x}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 x}}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{\pm\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\mathrm{cotg}\, x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\pm\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$	$\mathrm{cotg}\, x$

Následující identity pro goniometrické funkce platí vždy pro ty argumenty, pro které mají obě strany smysl:

Součtové vzorce:

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y \qquad \mathrm{tg}(x\pm y)=\frac{\mathrm{tg}\, x\pm\mathrm{tg}\, y}{1\mp\mathrm{tg}\, x\,\mathrm{tg}\, y}$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y \qquad \mathrm{cotg}(x\pm y)=\frac{\mathrm{cotg}\, x\,\mathrm{cotg}\, y\mp 1}{\mathrm{cotg}\, x\pm\mathrm{cotg}\, y}$$

Pro součin goniometrických funkcí platí:

$$\sin x\ \sin y=\tfrac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big) \qquad \sin x\ \cos y=\tfrac{1}{2}\big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\big)$$

$$\cos x\ \cos y=\tfrac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big) \qquad \cos x\sin y=\tfrac{1}{2}\big(\sin(x+y)-\sin(x-y)\big)$$

Goniometrické funkce násobků argumentů:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^2 x \qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\mathrm{tg}\, 2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}=\frac{2}{\mathrm{cotg}\, x-\mathrm{tg}\, x} \qquad \mathrm{cotg}\, 2x=\frac{\mathrm{cotg}^2-1}{2\,\mathrm{cotg}\, x}=\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{cotg}\, x-\mathrm{tg}\, x\big)$$

Goniometrické funkce polovičních argumentů:

$$\left|\sin\tfrac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right) \qquad \left|\mathrm{tg}\tfrac{x}{2}\right|=\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right|=\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\left|\cos\tfrac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right) \qquad \left|\mathrm{cotg}\tfrac{x}{2}\right|=\left|\frac{\sin x}{1-\cos x}\right|=\left|\frac{1+\cos x}{\sin x}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Mocniny funkcí sin x a cos x:

$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}\big(1-\cos 2x\big) \qquad \sin^3 x=\tfrac{1}{4}\big(3\sin x-\sin 3x\big)$$

$$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}\big(1+\cos 2x\big) \qquad \cos^3 x=\tfrac{1}{4}\big(3\cos x+\cos 3x\big).$$

Analytická geometrie

Vektorem v rovině (resp. ***v prostoru***) rozumíme množinu všech rovnoběžných souhlasně orientovaných a stejně dlouhých úseček. Zvolíme-li jednu konkrétní z těchto úseček, např. $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, mluvíme o ***umístění*** vektoru do počátečního bodu A. Jestliže vektor umístíme do počátku souřadné soustavy $[0,0]$ (resp. $[0,0,0]$), potom souřadnice koncového bodu jsou ***souřadnice vektoru* u**.

Je-li vektor umístěn v bodě A, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ (resp. $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$), potom pro souřadnice vektoru **u** platí $\mathbf{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ (resp. $\mathbf{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$).
Ze vztahu $\mathbf{u} = B - A$ plyne $B = A + \mathbf{u}$.

Operace s vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ (resp. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$):

Velikost vektoru $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ (resp. $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$)

Opačný vektor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2)$ (resp. $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$)

k-násobek vektoru $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2)$ (resp. $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$), $k \in \mathbb{R}$

O vektorech $\mathbf{u}$ a $k\,\mathbf{u}$ říkáme, že jsou ***kolineární***

Rovnost vektorů $\mathbf{u} = \mathbf{v} \iff (u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2)$ (resp. $\mathbf{u} = \mathbf{v} \iff (u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3)$)

Součet vektorů $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$ (resp. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$)

Rozdíl vektorů $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2)$ (resp. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3)$)

Lineární kombinace vektorů $k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} = (k_1u_1 + k_2v_1, k_1u_2 + k_2v_2)$

(resp. $k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} = (k_1u_1 + k_2v_1, k_1u_2 + k_2v_2, k_1u_3 + k_2v_3)$), $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

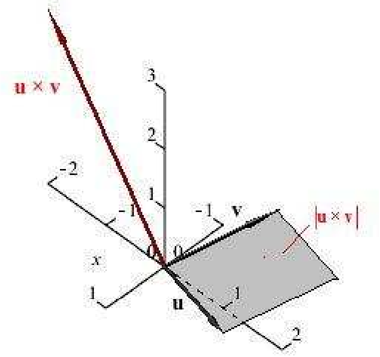
Skalární součin vektorů $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ $(\in \mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ $(\in \mathbb{R})$),

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

Vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

(pouze v prostoru!) je vektor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left((u_2v_3 - u_3v_2), (u_3v_1 - u_1v_3), (u_1v_2 - u_2v_1)\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$



který je kolmý na rovinu, v níž leží vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$
a pro jeho velikost platí $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\varphi$
(plošný obsah kosodélníka tvořeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$)
přičemž trojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tvoří pravotočivý systém (viz obrázek).

Přímka v rovině

Prochází-li přímka p body A, B, potom pro bod $X \in p$ je vektor $X - A$ kolineární s vektorem $B - A$, tedy pro některé $t \in \mathbb{R}$ platí $X - A = t(B - A)$, neboli

$\underline{X = A + t(B - A)}$, $t \in \mathbb{R}$ – ***parametrická rovnice*** přímky p zadané dvěma body A, B

Pro jednotlivé složky pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$:
$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Prochází-li přímka p bodem $A=[a_1,a_2]$ rovnoběžně s vektorem $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$, který se nazývá ***směrový vektor*** přímky p, potom pro bod $X\in p$ je vektor $X-A$ kolineární s vektorem $\mathbf{s}$, tedy pro některé $t\in\mathbb{R}$ platí $X-A=t\cdot\mathbf{s}$, neboli

$\underline{X=A+t\cdot\mathbf{s}}, t\in\mathbb{R}$ – ***parametrická rovnice*** přímky p zadané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{s}$.

Pro jednotlivé složky je-li $A=[a_1,a_2]$ $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$: $\begin{matrix} x=a_1+t\,s_1 \\ y=a_2+t\,s_2 \end{matrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Obecná rovnice přímky p: $ax+by+c=0$ se odvodí z parametrických rovnic eliminací parametru:

$$\left.\begin{matrix} x-a_1=t\,s_1 \\ y-a_2=t\,s_2 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\cdot s_2\\ \cdot s_1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} s_2(x-a_1)=t\,s_1s_2 \\ s_1(y-a_2)=t\,s_1s_2 \end{matrix}\right|- \Rightarrow s_2(x-a_1)-s_1(y-a_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_2x-s_1y+s_1a_2-s_2a_1=0 \Rightarrow \underline{a=s_2,\, b=-s_1}$$

a dále

$$(s_2,-s_1)\cdot(x-a_1,y-a_2)=0 \Leftrightarrow \underline{(s_2,-s_1)\cdot(X-A)=0},$$

tedy pro libovolný bod X na přímce $ax+by+c=0$ je polohový vektor $X-A$ kolmý na vektor $\mathbf{n}=(a,b)$.

Normálový vektor přímky o rovnici $ax+by+c=0$ je vektor $\mathbf{n}=(a,b)$ (a libovolný jeho násobek)

Pro $b\neq 0$ můžeme obecnou rovnici přímky převést na ***směrnicový tvar*** $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=kx+q$ – přímka je grafem lineární funkce (viz kapitola funkce).

Vzdálenost bodu $A=[x_0y_0]$ ***od přímky*** p: $ax+by+c=0$: $d(p,A)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Odchylka přímek $p: a_1x+b_1y+c_1=0,\quad q: a_2x+b_2y+c_2=0$ je rovna úhlu jejich normálových vektorů, platí tedy $\cos\varphi=\dfrac{(a_1,b_1)}{|(a_1,b_1)|}\cdot\dfrac{(a_2,b_2)}{|(a_2,b_2)|}=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}},\quad \varphi\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Přímka a rovina v prostoru

Analogickou úvahou, pomocí které jsme odvodili parametrickou rovnici přímky v rovině, odvodíme

Parametrické rovnice přímky p zadané dvěma body $A=[a_1,a_2,a_3],\ B=[b_1,b_2,b_3]$:

$$x=a_1+t(b_1-a_1),\ y=a_2+t(b_2-a_2),\ z=a_3+t(b_3-a_3),\ t\in\mathbb{R}$$

a zadané bodem $A=[a_1,a_2,a_3]$ a směrovým vektorem $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$:

$$x=a_1+t\,s_1,\ y=a_2+t\,s_2,\ z=a_3+ts_3\quad t\in\mathbb{R}$$

Přímku v prostoru lze zadat jako průsečnici dvou rovin; ***obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje***!
Jestliže z parametrických rovnic vyjádříme parametr t a vzniklé vztahy porovnáme, dostaneme tak zvané

kanonické rovnice přímky $\dfrac{x-a_1}{s_1}=\dfrac{y-a_2}{s_2}=\dfrac{z-a_3}{s_3}$.

Třemi body A,B,C, které neleží v přímce, je zadaná rovina ρ, pro jejíž libovolný bod X je vektor $X-A$ některou lineární kombinací vektorů $B-A$ a $C-A$, platí tedy $X-A=t_1(B-A)+t_2(C-A),\ t_1,t_2\in\mathbb{R}$ neboli $\underline{X=A+t_1(B-A)+t_2(C-A)}$ – ***parametrická rovnice*** roviny ρ zadané třemi body A,B,C

ve složkách pro $A=[a_1,a_2,a_3],\ B=[b_1,b_2,b_3],\ C=[c_1,c_2,c_3]$: $\quad \begin{aligned} x &= a_1+t_1(b_1-a_1)+t_2(c_1-a_1) \\ y &= a_2+t_1(b_2-a_2)+t_2(c_2-a_2) \\ z &= a_3+t_1(b_3-a_3)+t_2(c_3-a_3) \end{aligned} \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}$

Prochází-li rovina ρ bodem $A=[a_1,a_2,a_3]$ rovnoběžně se dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, potom pro bod $X\in\rho$ je vektor $X-A$ některou lineární kombinací vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$, tedy pro některá $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ platí $X-A=t_1\cdot\mathbf{u}+t_2\cdot\mathbf{v}$, neboli

$\underline{X = A+t_1\cdot\mathbf{u}+t_2\cdot\mathbf{v}}$ – ***parametrická rovnice*** roviny ρ zadané bodem A a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$

ve složkách pro $A=[a_1,a_2,a_3]$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$: $\quad \begin{aligned} x &= a_1+t_1u_1+t_2v_1 \\ y &= a_2+t_1u_2+t_2v_2 \\ z &= a_3+t_1u_3+t_2v_3 \end{aligned} \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}$

Obecná rovnice roviny ρ: $\underline{ax+by+cz+d=0}$ se odvodí z parametrických rovnic eliminací parametrů:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rl} x-a_1=t_1u_1+t_2v_1 & \big|\cdot v_2 \\ y-a_2=t_1u_2+t_2v_2 & \big|\cdot v_1 \end{array}\right\}- \Rightarrow v_2(x-a_1)-v_1(y-a_2)=t_1(u_1v_2-u_2v_1) \quad \cdot(u_2v_3-u_3v_2) \\ \left.\begin{array}{rl} y-a_2=t_1u_2+t_2v_2 & \big|\cdot v_3 \\ z-a_3=t_1u_3+t_2v_3 & \big|\, v_2 \end{array}\right\}- \Rightarrow v_3(y-a_2)-v_2(z-a_3)=t_1(u_2v_3-u_3v_2) \quad \cdot(u_1v_2-u_2v_1)\end{array}\right\}- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x-a_1)(u_3v_2-u_2v_3)+(y-a_2)(u_1v_3-u_3v_1)+(z-a_3)(u_2v_1-u_1v_2)=0$$

Platí tedy $(a,b,c)=k\big((u_3v_2-u_2v_3),(u_1v_3-u_3v_1),(u_2v_1-u_1v_2)\big)=k(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$;

tento vektor je kolmý na směrové vektory roviny ρ, tedy $\underline{(a,b,c)=\mathbf{n}}$ – ***normálový vektor*** roviny ρ.

Vzdálenost bodu $A=[x_0y_0,z_0]$ ***od roviny*** ρ: $\quad ax+by+cz+d=0$: $\ d(\rho,A)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Kuželosečky

jsou rovinné křivky, které dostaly společný název proto, že vzniknou jako řez kužele rovinou – podle toho, jaký má tato rovina sklon vzhledem k ose resp. povrchové přímce kuželu, dostaneme

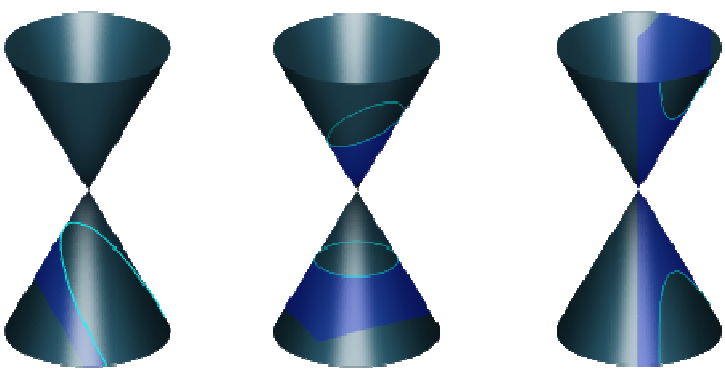
a) parabolu – rovina je rovnoběžná s povrchovou přímkou (která prochází vrcholem kuželu),

b) elipsu – rovina svírá s osou kuželu úhel $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

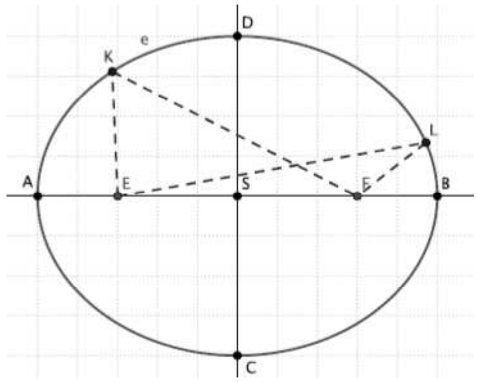
b) kružnici – rovina je kolmá na osu kuželu $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$,

d) hyperbolu – rovina je rovnoběžná s osou kuželu $(\varphi=0)$

viz obrázek (který pochází z Wikipedie)



Elipsa je křivka, jejíž každý bod má od daných dvou bodů v rovině stejný součet vzdáleností.



Elipsa má dvě ohniska, označme je E a F.
Elipsa obsahuje dva ***hlavní vrcholy*** A a B a dva ***vedlejší vrcholy*** C a D.
Střed elipsy, na obrázku vrchol S, leží ve středu úsečky EF, tedy mezi ohnisky.
Přímka, která prochází hlavními vrcholy (a také ohnisky), se nazývá ***hlavní osa*** elipsy, přímka která prochází vedlejšími vrcholy, se nazývá ***vedlejší osa*** elipsy.
Úsečka, která spojuje libovolný hlavní bod a střed elipsy, se nazývá ***hlavní poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky AS a BS.
Úsečka, která spojuje libovolný vedlejší bod a střed elipsy, se nazývá ***vedlejší poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky CS a DS.

Rovnice elipsy se středem v počátku souřadnic a osami v souřadných osách má tvar

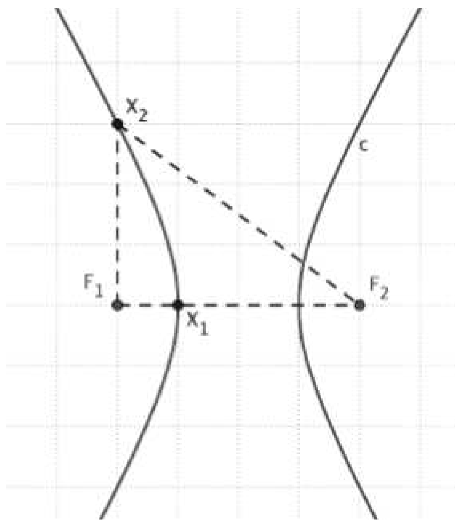
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

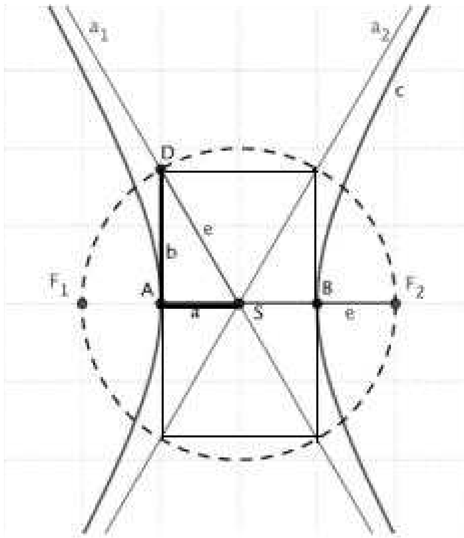
je-li střed elipsy v bodě $S=[m,n]$ a osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, má rovnice tvar

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

V případě $a=b=r$ dostáváme ***kružnici*** s rovnicí $x^2+y^2=r^2$ resp. $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

Hyperbola je kuželosečka, pro jejíž každý bod platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů je vždy stejná.





Bodům F_1 a F_2 se říká ***ohniska***.
Bod S se nazývá ***střed*** hyperboly a nachází se ve středu úsečky F_1F_2.
Přímka F_1F_2 se nazývá ***hlavní osa hyperboly***. Kolmice k této ose v bodě S se nazývá ***vedlejší osa hyperboly***.
Průsečíky hyperboly s hlavní osou se nazývají ***vrcholy hyperboly***, na obrázku vpravo to jsou body A a B.
Úsečky AS a BS se nazývají ***hlavní poloosy hyperboly***. Jejich délku značíme a.
Délku ***vedlejší poloosy hyperboly*** značíme b.

Vzdálenost ohniska od středu se nazývá ***excentricita***, značíme ji e. Platí vztah $e=\sqrt{a^2+b^2}$.
Přímky a_1, a_2, procházející středem hyperboly – prodloužené úhlopříčky obdélníku vytvořeného pomocí poloos – viz obrázek – jsou ***asymptoty*** hyperboly.

Rovnice hyperboly se středem v počátku souřadnic a hlavní osou v ose o_x resp. v ose o_y má tvar

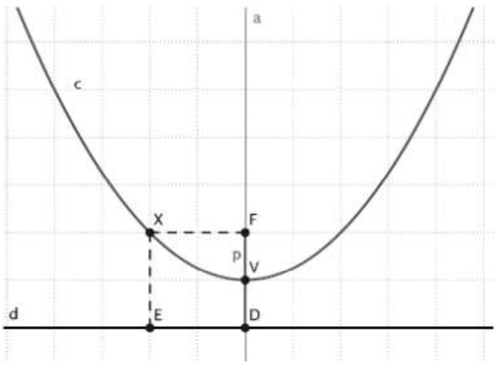
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{resp.} \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

je-li střed hyperboly v bodě $S=[m,n]$ a hlavní osa je rovnoběžná s osou o_x resp. s osou o_y má rovnice tvar

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \quad \text{resp.} \quad \frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1.$$

Asymptoty hyperboly, která má některou z předchozích rovnic, mají rovnice $y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$.

Parabola je křivka, která má od dané přímky a od daného bodu, který na té přímce neleží, konstantní vzdálenost.



Bod F se nazývá ***ohnisko*** paraboly.

Přímka d se nazývá ***řídící přímka*** paraboly.

Přímka FD se nazývá ***osa*** paraboly, je kolmá k řídící přímce a prochází ohniskem.

Bod V se nazývá vrchol paraboly a nachází se ve středu úsečky FD.

Délku úsečky FD nazýváme ***parametrem*** paraboly. Jedná se o vzdálenost ohniska od řídící přímky.

Rovnice paraboly

U paraboly rozlišujeme celkem čtyři různé případy. Jak je orientována osa paraboly, tj. jestli je osa svislá (rovnoběžná s osou y), jako na obrázku, nebo jestli je osa vodorovná (rovnoběžná s osou o_x). Dále pak rozlišujeme případ, kdy je parabola otevřená nahoru nebo dolů a nalevo nebo napravo. Nechť má parabola vrchol $V=[m,n]$.

1) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y a je otevřená nahoru. Potom má rovnici:

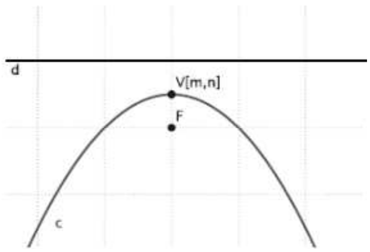
$$(x-m)^2=2p(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n=\frac{1}{2p}(x-n)^2$$

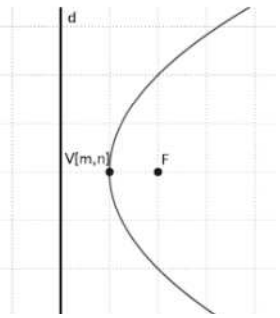
a ohnisko má souřadnice $F=\left[m,n+\frac{p}{2}\right]$.

2) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y a je otevřená dolů. Potom má rovnici:

$$(x-m)^2=-2p(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n=-\frac{1}{2p}(x-n)^2$$

a ohnisko má souřadnice $F=\left[m,n+\frac{p}{2}\right]$.





3) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x a je otevřená doprava. Potom má rovnici:

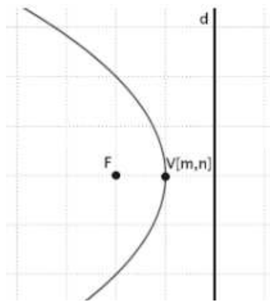
$$(y-n)^2=2p(x-m)$$

a ohnisko má souřadnice $F=\left[m+\frac{p}{2},n\right]$.

4) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x a je otevřená doleva. Potom má rovnici:

$$(y-n)^2=-2p(x-m)$$

a ohnisko má souřadnice $F=\left[m-\frac{p}{2},n\right]$.



V případech 1) a 2) je parabola grafem kvadratické funkce, v případech 3) a 4) se ***nejedná o grafy funkcí***.

(viz matematika.cz)

Komplexní čísla

Definujeme ***imaginární jednotku*** j *jako číslo, jehož druhou mocninou je* -1,

$$j^2 = -1$$

Komplexním číslem *se nazývá výraz*

$$z = x + y \cdot j$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$. *Přitom* x *se nazývá* ***reálná složka***, y ***imaginární složka*** *čísla* z; *píšeme*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Komplexní čísla, jejichž imaginární složka je nulová, ztotožníme s reálnými čísly.
Komplexní čísla, jejichž reálná složka je nulová, se nazývají ***ryze imaginární***.

Pro počítání s komplexními čísly platí následující pravidla:

Rovnost *komplexních čísel:*

$$x_1 + y_1 j = x_2 + y_2 j \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2$$

Sčítání (odčítání)

$$(x_1 + y_1 j) \pm (x_2 + y_2 j) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\, j$$

Násobení

$$(x_1 + y_1 j) \cdot (x_2 + y_2 j) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (y_1 x_2 + x_1 y_2)\, j$$

Dělení

$$\frac{x_1 + y_1 j}{x_2 + y_2 j} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\, j$$

Absolutní hodnotu *komplexního čísla* z *definujeme předpisem*

$$|z| = |x + y\, j| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Komplexně sdružené číslo *k číslu* z *je číslo*

$$\overline{z} = x - y\, j$$

Platí:

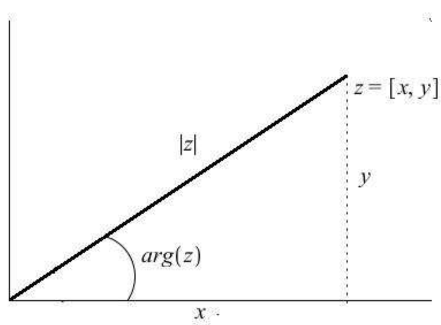
$$z + \overline{z} = (x + y\, j) + (x - y\, j) = 2x, \qquad z \cdot \overline{z} = (x + y\, j) \cdot (x - y\, j) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Znázornění komplexních čísel

Komplexní čísla znázorňujeme jako body v rovině, které říkáme ***Gaussova rovina*** *nebo* ***rovina komplexních čísel***.
Vodorovná osa souřadnic se nazývá ***reálná osa***,
svislá ***imaginární osa***.
Komplexní číslo $z = x + y\, j$ *znázorňujeme jako bod* $[x, y]$.
Přitom zřejmě (podle Pythagorovy věty) je $|z|$ *rovna vzdáleností bodu* $[x, y]$ *od počátku souřadnic.*



Úhel φ *(v obloukové míře), který svírá průvodič obrazu čísla* z *s kladným směrem reálné osy, se nazývá* ***argument*** *komplexního čísla* z *a značí se* $\arg z$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x = 0, \begin{matrix} y > 0 \\ y < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Nechť $z = x + y\,j$ $\varphi = \arg z$. *Výraz*

$$z = |z|\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$$

se nazývá ***goniometrický tvar*** *komplexního čísla* z. *Je vhodný pro násobení a umocňování komplexních čísel*:

$$z_1 z_2 = \left(|z_1|\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)\right)\left(|z_2|\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right)\right) =$$
$$= |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right)}{|z_2|\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$z^n = \left(|z|\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)\right)^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + j\sin n\varphi\right), \quad kde \quad n \in \mathbb{Z}$$

Předchozí vztah se nazývá ***Moivreova věta****.*

Řešení rovnice $a^n = z$, *kde* z *je komplexní číslo a* n *celé, je dáno právě všemi čísly*

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Souhrn těchto n čísel nazýváme ***n-tou odmocninou*** *z čísla z.*

Jestliže položíme

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad (\textbf{\textit{Eulerův vzorec}}),$$

dostaneme ***exponenciální tvar*** *komplexního čísla*

$$z = |z|\,e^{j\varphi}.$$

Vztahy pro násobení a umocňování komplexních čísel v exponenciálním tvaru pak vypývají z vlastností exponenciální funkce.