

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 0.1 (Motivační). Rychlost chladnutí hmotného bodu je přímo úměrná rozdílu jeho teploty minus teploty okolí. Předpokládejme teplotu bodu 30°C v čase $t = 0$ a čase $t = 30 \text{ min}$ jsme naměřili teplotu 20°C . Teplota okolí je 10°C . V jakém čase klesne teplota hmotného bodu na 15°C ?

Řešení. Označme $T(t)$ teplotu hmotného bodu v čase t . Pro tuto funkci platí rovnice

$$T'(t) = k(T(t) - 10), \text{ navíc platí } T(0) = 30, \quad T(30) = 20,$$

kde k je „materiálová“ konstanta, která bude stanovena později z výše uvedených podmínek. Danou rovnici můžeme „řešit“ tak, že rovnici vydělíme a dostaneme rovnost pro určité integrály:

$$\ln(T(t) - 10) - \ln(30 - 10) = [\ln |T(t) - 10|]_0^t = \int_0^t \frac{T'(t)}{T(t) - 10} dt = \int_0^t k dt = kt \Leftrightarrow T(t) = 10 + 20 \exp(kt).$$

$$T(30) = 20: 20 = 10 + 20 \exp(k30) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \exp(30k) \Leftrightarrow \exp(k) = \sqrt[30]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow T(t) = 10 + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}.$$

Odtud dostaneme:

$$15 = T(t_2) = 10 + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{30}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{30}} \Leftrightarrow t_2 = 60 \text{ min}.$$



Základní pojmy

Definice 0.2. **Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu** nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje neznámá funkce jedné proměnné a její derivace až do řádu n . Zapisujeme ji obecně ve tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

kde F je funkce $n+2$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Tento tvar rovnice nazýváme **nerozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** nebo-li **implicitní**.

Speciálním případem rovnice (1) je rovnice, která se dá zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

kde f je funkce $n+1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Tento tvar rovnice nazýváme **rozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** nebo-li **explicitní**.

Příklad 0.3. Určete řešení diferenciální rovnice:

$$y' = 2\sqrt{y}$$

Řešení. I v tomto případě lze modifikovat předchozí postup, tj. odseparovat proměnné a integrovat:

$$1 = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow \int dx = \int \frac{y' dx}{2\sqrt{y}} = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow x + c = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = (x + c)^2, \text{ kde } x \geq c.$$

Tedy řešením je jak funkce dvou proměnných x a integrační konstanty c , tak každá konkrétní funkce např. $y = x^2$, $y = (x + 5)^2$. Potom má původní rovnice i jedno řešení „jiného“ typu $y = 0$. $\square$

Definice 0.4. **Řešením** obyčejné diferenciální rovnice řádu n na intervalu I nazýváme každou n –krát diferencovatelnou funkci na intervalu I , která vyhovuje dané rovnici. **Obecným řešením** obyčejné diferenciální rovnice rozumíme obecný předpis závisející na n různých parametrech $c_1, c_2, \dots, c_n$, $[c_1, c_2, \dots, c_n] \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde libovolnou volbou těchto parametrů dostaneme konkrétní řešení, které nazýváme **partikulárním (částečným) řešením**. Řešení diferenciálních rovnic, která nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant $c_1, c_2, \dots, c_n$, označujeme jako **singulární (výjimečná)**.

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, tj. v **explicitním tvaru**. Často řešení $y(x)$ dostaneme ve tvaru $F(x, y) = 0$, tj. v tzv. **implicitním tvaru**.

Definice 0.5. Úlohu najít řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1) definované na intervalu I a splňující podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I \quad (3)$$

nazýváme **počáteční (Cauchyho) úlohou** nebo **počátečním (Cauchyho) problémem**. Podmínky (3) se nazývají **počáteční podmínky**.

Na následujícím praktickém příkladě ukážeme, jak lze pro konkrétní problém sestavit obecnou diferenciální rovnici a specifikovat její konkrétní řešení.

Příklad 0.6. Je dán elektrický RL obvod s cívkou o indukci L , ohmickým odporem R a konstantním napětím U . Popište průběh proudu i v závislosti na čase t .

Řešení. Podle prvního Kirchhoffova zákona je součet všech elektromotorických sil v uzavřeném obvodu roven nule a hledaná funkce $i(t)$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$Li'(t) + Ri(t) = U.$$

Řešení výše uvedené rovnice (získané postupem, který uvedeme v dalším odstavci této kapitoly) je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R},$$

kde proud i je funkcí času t a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Tato závislost i na t představuje obecné řešení (tj. popis obecné situace) dané diferenciální rovnice.

Počáteční velikost proudu bývá obvykle známa. V čase $t = 0$ je proud obvykle nulový. Tato podmínka říká, že máme najít funkci $i(t)$ v situaci, kdy $i(0) = 0$. Dosazením zjistíme, že v tomto případě $c = -\frac{U}{R}$, tj. hledaná závislost i na t je potom

$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

a představuje *partikulární řešení* zadané diferenciální rovnice. □

Diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 0.7. Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je funkce dvou proměnných. Potom **diferenciální rovnici prvního řádu** (rozřešenou vzhledem k první derivaci) nazýváme rovnici

$$y' = f(x, y). \quad (4)$$

Věta 0.8 (Existenční). *Necht' $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak má Cauchyho počáteční úloha*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

kde $[x_0, y_0] \in M$, alespoň jedno řešení definované na nějakém otevřeném intervalu $J \subseteq (a, b)$, $x_0 \in J$.

Věta 0.9 (O Existenci a jednoznačnosti řešení). *Necht' $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a v každém bodě množiny M je splněna Lipschitzova podmínka, tj. existuje $L > 0$ tak, že platí*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (6)$$

pro každé dva body $[x, y_1], [x, y_2]$ z nějakého okolí bodu $[x_0, y_0]$. Pak pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in M$ má Cauchyho počáteční úloha (5) právě jedno řešení.

Separovatelné diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x)g(y)$.

Definice 0.10. **Separovatelnou diferenciální rovnici prvního řádu** nazýváme rovnici, která se dá upravit na tvar

$$y' = f(x)g(y). \quad (7)$$

Postup při hledání řešení separovatelné rovnice.

Pokud je rovnice tvaru (7) nebo ji lze na tento tvar převést, můžeme postup shrnout do jedné věty: odseparovat proměnné a integrovat. Navíc je možné výraz y' nahradit $\frac{dy}{dx}$ a celou rovnici vynásobit dx . Poté odseparujeme (oddělíme) proměnné včetně dy a dx a integrujeme obě strany rovnice zvlášť.

Příklad 0.11. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{1-2x}{y^3}$.

Řešení. Postupujeme dle návodu:

$$dy = \frac{1-2x}{y^3}dx \Leftrightarrow y^3 dy = (1-2x)dx \Leftrightarrow \int y^3 dy = \int (1-2x)dx \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} + C = x - x^2 + K,$$

kde C a K jsou integrační konstanty. Převedením konstanty C na pravou stranu rovnice dostaneme řešení ve tvaru $\frac{y^4}{4} = x - x^2 + K - C$. Označíme-li konstantu $K - C = c$, dostaneme obecné řešení

$$\frac{y^4}{4} = x - x^2 + c.$$

□

Tuto úpravu s konstantami můžeme udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obyčejně ji píšeme na pravou stranu rovnice).

Řešení, která se dostanou při řešení separovatelné rovnice, jsou obvykle v implicitním tvaru, tj. $g(x, y) = 0$. Úpravou se někdy podaří získat explicitní tvar řešení, tj. $y = \varphi(x)$.

Někdy při hledání řešení diferenciální rovnice děláme úpravu, že dělíme celou rovnici výrazem v proměnné y (podobně tomu bylo i v minulém příkladě). Vždy je pak nutné tento výraz položit rovno nule a dořešit vzniklou rovnici. Pokud je jejím řešením funkce $y = \varphi(x)$, musíme se přesvědčit, zda tato funkce není řešením zadané diferenciální rovnice.

Příklad 0.12. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení. Po odseparování a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrací této rovnice dostaneme obecné řešení

$$\arcsin y = \arcsin x + c.$$

Nesmíme však zapomenout, že jsme při „odseparovávání“ rovnice provedli úpravu dělení výrazem $\sqrt{1-y^2}$, který je nulový pro $y = \pm 1$. Jelikož funkce $y = 1$ a $y = -1$ jsou řešením zadané rovnice a nedají se zahrnout do obecného řešení, jsou tyto funkce singulárním řešením zadané rovnice. □

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 0.13. Lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnicí tvaru

$$y' = f(x)y + g(x). \quad (8)$$

Pokud je $g(x) \neq 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**.

Nejčastěji používanou metodou pro nalezení nehomogenního řešení rovnice (8), je tzv. **metoda variace konstanty**.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variace konstanty.

1. Nejprve metodou separace proměnných najdeme obecné řešení y_h odpovídající homogenní rovnice

$$y' = f(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = f(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = c + \int f(x)dx. \text{ Tedy } y_h = cF(x).$$

2. Partikulární řešení lineární rovnice (8) předpokládáme ve tvaru $Y = c(x)F(x)$, kde $c(x)$ je neznámá funkce. Po dosazení Y do (8) se $c(x)$ odečte; ze vzniklé separovatelné rovnice určíme $c(x)$ a dosadíme do Y .

3. Obecné řešení (8) je ve tvaru součtu $y = y_h + Y$, neboť

$$y' = y'_h + Y' = +f(x)y_h + f(x)Y + g(x) = f(x)y + g(x).$$

Poznamenejme, že krok 2. a 3. lze sloučit tak, že funkci $c(x)$ dosadíme do součinu i s integrační konstantou

Příklad 0.14. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Řešení. Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici $y' + 2xy = 0$:

$$y' = -2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -2xdx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int -2xdx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme $\ln |y| = -x^2 + C$. Potřebujeme vyjádřit y , a proto musíme dál upravit:

$$|y| = e^{-x^2+C} \quad \Leftrightarrow \quad |y| = e^{-x^2}e^C \quad \Leftrightarrow \quad y = ce^{-x^2},$$

kde $c = \pm e^C \cup \{0\}$, tedy $c \in \mathbb{R}$. Nulu můžeme do konstanty c zahrnout, neboť $y = 0$ je řešením homogenní rovnice. Našli jsme tedy obecné řešení

$$y_h = ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

lineární homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$. Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y = c(x)e^{-x^2}.$$

Abychom mohli určit $c(x)$, musíme dosadit y do zadané diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív y derivovat.

$$y = c(x)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme podmínku pro $c'(x)$:

$$c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xc(x)e^{-x^2} = e^{-x^2},$$

což je ekvivalentní s $c'(x) = 1$. Z toho integrováním dostaneme, že $c(x) = \int 1 dx = x + c$. Zbývá už jenom dosadit za $c(x)$. Hledané obecné řešení bude

$$y = c(x)e^{-x^2} = (x + c)e^{-x^2} = ce^{-x^2} + xe^{-x^2}.$$

□

Příklad 0.15. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' - \frac{xy}{1+x^2} = x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Řešení. a) *Hledání homogenního řešení:*

$$y' = \frac{xy}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Odtud integrováním dostaneme $\ln |y| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \sqrt{1+x^2} + C$, tedy

$$y_h = c\sqrt{1+x^2}.$$

b) *Variace konstanty:*

$$y = c(x)\sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x)\sqrt{1+x^2} + c(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Po dosazení:

$$c'(x)\sqrt{1+x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Substituce $1+x^2 = t^2$ vede na

$$c(x) = \sqrt{1+x^2} + c.$$

c) *Obecné řešení dané rovnice:*

$$y = c\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1.$$

d) *Partikulární řešení dané rovnice:*

Dosadíme počáteční podmínku: $2 = y(0) = c\sqrt{1} + 1 = c + 1$. Z toho $c = 1$ a hledané partikulární řešení bude

$$y = \sqrt{1+x^2} + x^2 + 1.$$

□

Řešení lineární rovnice je možné také vyjádřit „vzorcem“.

Věta 0.16. *Nechť funkce f a g jsou spojité na otevřeném intervalu I . Pak obecné řešení lineární diferenciální rovnice (8) na I závisující na jedné konstantě c je tvaru*

$$y(x, c) = c e^{\int f(x) dx} + e^{\int f(x) dx} \int \left(g(x) e^{-\int f(x) dx} \right) dx, \quad (9)$$

kde každý integrál chápeme jako funkci proměnné x bez aditivní konstanty.

Důsledek 0.17. *Zavedeme-li tzv. **váhovou funkci** $\phi(x, x_0)$ vztahem*

$$\phi(x, x_0) = e^{\int_{x_0}^x f(u) du},$$

můžeme při zachování předpokladů Věty 0.16 tvrdit, že rovnice (8) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ pro $x_0 \in I$ má na I partikulární řešení

$$y = y_0 \phi(x, x_0) + \int_{x_0}^x g(u) \phi(x, u) du.$$

Poznámka 0.18. Na závěr poznamenejme, že lineární diferenciální rovnice (ať už prvního nebo n -tého řádu, jež budeme studovat v dalším odstavci) neobsahují (na rozdíl od separovatelných rovnic) singulární řešení, tedy každé jejich řešení se dá zahrnout do obecného. Navíc se dá vyjádřit explicitně.

0.1 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Velmi důležitým typem obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů jsou *lineární diferenciální rovnice*.

Definice 0.19. Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu nazýváme rovnici

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (10)$$

kde $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ a $f(x)$ jsou funkce, $a_n(x) \neq 0$. Pokud je $f(x) \neq 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme $f(x) = 0$, dostaneme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (11)$$

kterou nazýváme **homogenní** nebo-li **přidruženou homogenní rovnici** k rovnici (10).

Věta 0.20. Nechť funkce $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou spojité na intervalu I . Pak má počáteční úloha daná rovnicí (10) a podmínkami (3) pro libovolné $x_0 \in I$ právě jedno řešení $y(x)$. Toto řešení existuje na celém intervalu I .

Následující věta, v literatuře často nazývána jako **princip superpozice**, popisuje základní vlastnosti a vztahy mezi řešeními homogenní a nehomogenní rovnice (11) a (10).

Věta 0.21 (Princip superpozice). *Pro řešení rovnic (11) a (10) platí následující tvrzení.*

- i *Nechť y_1 a y_2 jsou řešeními homogenní rovnice (11) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je řešením (11).*
- ii *Nechť y_1 a y_2 jsou řešeními nehomogenní rovnice (10). Potom funkce $y = y_1 - y_2$ je řešením homogenní rovnice (11).*

Důkaz. Označme levou stranu rovnice (10) pomocí operátoru lineárního $L[y]$, který n -krát diferencovatelné funkci y přiřadí (dosazením) konkrétní funkci. Platí:

$$\begin{aligned} L[y_1] = 0 = L[y_2] &\Rightarrow L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ L[y_1] = f(x) = L[y_2] &\Rightarrow L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 0.22. *Nechť $f(x) = 0$ a jsou splněny předpoklady Věty 0.20. Potom obecné řešení homogenní rovnice (11) je tvaru*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \tag{12}$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty a $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (11), která nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice (11). Tento systém tvoří bázi vektorového prostoru dimenze n .

Tato věta přímo plyne z principu superpozice, tvrzení (i), a faktu, že množina všech řešení zkoumané rovnice tvoří vektorový prostor dimenze n .

Poznámka 0.23. Definice lineární nezávislosti funkcí je analogií definice lineární nezávislosti vektorů. To znamená, že funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou **lineárně nezávislé** na intervalu I , pokud pro všechna $x \in I$ platí

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Jak poznat, zda daná n -tice funkcí je lineárně nezávislá a zároveň generuje obecné řešení rovnice (11), uvádí následující věta.

Věta 0.24. *Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešeními homogenní diferenciální rovnice (11) na intervalu I . Dále nechť $\det(W(x))$ je determinant, tzv. **wronskián**, z následující matice*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Potom je-li $\det(W(x)) = 0$ pro libovolné $x \in I$, pak $\det(W(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé a netvoří (negerují) obecné řešení rovnice (11). V opačném případě, tj. je-li $\det(W(x)) \neq 0$ pro libovolné $x \in I$, pak $\det(W(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří (generují) obecné řešení rovnice (11).

Věta 0.25. *Nechť Y je jedno libovolné partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice (10). Dále nechť y_h je obecné řešení k ní přidružené homogenní rovnice (11). Potom obecné řešení y rovnice (10) má tvar*

$$y = y_h + Y. \quad (13)$$

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem principu superpozice a Věty 0.22. Totiž, pokud je y libovolné řešení rovnice (10) a Y nějaké konkrétní řešení rovnice (10), pak jejich rozdíl je vždy (podle (ii) Věty 0.21) nějaké homogenní řešení rovnice (11). Vezmeme-li za toto řešení množinu všech řešení, tj. řešení y_h , pak každé řešení y rovnice (10) se dá vyjádřit ve tvaru (13). $\square$

Věta 0.26 (Variace konstant). *Nechť (10) je nehomogenní rovnice pro niž platí, že obecné řešení příslušné homogenní rovnice (11) je tvaru $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. Pak partikulární řešení Y rovnice (10) je tvaru $Y = c_1(x) y_1 + \dots + c_n(x) y_n$, kde $c_1(x), \dots, c_n(x)$ jsou libovolné primitivní funkce k funkcím $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$, které vyhovují následující soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} c'_1(x) y_1 + \dots + c'_n(x) y_n &= 0, \\ c'_1(x) y'_1 + \dots + c'_n(x) y'_n &= 0, \\ \vdots & \\ c'_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Příklad 0.27. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x$, známe-li obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$, které je rovno $y_h = c_1 x + c_2 x^2$.

Řešení. Nejprve určíme partikulární řešení Y zadané rovnice. Podle předchozí věty ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x)x + c_2(x)x^2$. Po dosazení do (14) dostáváme soustavu

$$c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 = 0,$$

$$c_1'(x) + c_2'(x)2x = x,$$

jejíž řešením jsou funkce $c_1'(x) = -x$ a $c_2'(x) = 1$. Integrací dostáváme např. primitivní funkce $c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$ a $c_2(x) = x$. Odtud $Y = -\frac{x^3}{2} + x^3$ a po úpravě $Y = \frac{x^3}{2}$. Podle Věty 0.25 je hledané obecné řešení

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

□

Poznámka 0.28. Podobně jako pro rovnice prvního řádu lze metodu variace konstant popsat jednoduchým vzorcem s využitím pojmu váhové funkce. To je funkce $\Phi(x, s)$ určená podmínkou, že pro každé s je funkce $y(x) = \Phi(x, s)$ řešením homogenní rovnice (11) splňující splňující Cauchyho počáteční podmínky $y(s) = y'(s) = \dots = y^{(n-2)}(s) = 0$, $y^{(n-1)}(s) = 1/a_n(s)$. Potom lze partikulární řešení $Y(x)$ rovnice (10) podmínku $Y(x_0) = 0$ vyjádřit ve tvaru:

$$Y(x) = \int_{x_0}^x f(s)\Phi(x, s) \, ds.$$

Ovšem najít obecné řešení homogenní rovnice (11) s libovolnými koeficienty $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ stále představuje problém. Proto se v následujícím odstavci omezíme pouze na jednodušší situaci, kdy tyto koeficienty jsou konstantní funkce, tj. ve skutečnosti se na jejich místě vyskytují reálná čísla a_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 0.29. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (15)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

Předpokládejme řešení rovnice (15) ve tvaru $y = \exp(\lambda t)$. Po dosazení této funkce do (15) dostáváme rovnici:

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \exp(\lambda t) = 0.$$

Protože $y = \exp(\lambda t)$ je kladná funkce, zavedeme následující pojem.

Definice 0.30. Nechť je dána rovnice (15). Algebraickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (16)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí diferenciální rovnice (15)**.

Z odvození charakteristické rovnice je zřejmé, že pro každý kořen λ rovnice (16) je funkce $y = \exp(\lambda t)$ řešením rovnice (15). Situaci komplikuje násobnost kořenů a komplexní kořeny.

Věta 0.31. *Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty tvaru (15) a její charakteristickou rovnici (16). Pak platí:*

1. *Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ k -násobný kořen λ charakteristické rovnice, $k \geq 1$, pak funkce $y = \exp(\lambda t)$ je řešením (15).*

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (15) .

2. *Je-li $\lambda_{1,2} = a \pm bj$ dvojice komplexně sdružených k -násobných komplexních kořenů charakteristické rovnice, $k \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, pak funkce*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \quad y_3 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) &= e^{ax} \sin bx, \quad y_4 = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (15).

Poznámka 0.32. Jelikož charakteristická rovnice (16) je n -tého řádu, existuje právě n (ne nutně různých) komplexních kořenů. Tomu odpovídá n funkcí fundamentálního systému a množina všech řešení rovnice (15) tvoří vektorový prostor dimenze n , což je ve shodě s Větou 0.22. Bázi tohoto prostoru jsou například všechna řešení získaná podle návodu Věty 0.31.

Příklad 0.33. Pomocí Věty 0.31 najděte obecné řešení rovnice $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y''' = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice diferenciální rovnice je $\lambda^7 + 8\lambda^5 + 16\lambda^3 = 0$. Je zřejmé, že jejím trojnásobným kořenem je $\lambda_{1,2,3} = 0$. Zbývající kořeny určíme z rovnice $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$. Jedná se o rovnici 4. stupně. Snadno lze nahlédnout, že se jedná o kvadratický dvojčlen $\lambda^2 + 4$ umocněný na druhou. Pokud dořešíme tuto kvadratickou rovnici (v komplexním oboru), dostaneme celkem zbývající kořeny $\lambda_{4,5,6,7} = \pm 2j$. Proto podle Věty 0.31 získáváme následující řešení, která tvoří fundamentální systém zadané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{0x}, & y_2(x) &= xe^{0x}, & y_3(x) &= x^2e^{0x}, \\ y_4(x) &= e^{0x} \cos 2x, & y_5(x) &= xe^{0x} \cos 2x, & y_6(x) &= e^{0x} \sin 2x, & y_7(x) &= xe^{0x} \sin 2x. \end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos 2x + c_5x \cos 2x + c_6 \sin 2x + c_7x \sin 2x.$$

□

Při hledání řešení charakteristické rovnice (podobné té, co je uvedena v Příkladu 0.33) je možné použít metody postupného rozkládání polynomu. V žádném případě se však nejedná o postup jednoduchý. Právě v tom tkví problém při hledání obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Zatímco řešení diferenciální rovnice druhého řádu je jednoduché – řešíme kvadratickou rovnici, je řešení rovnic vyšších řádů komplikovanější

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 0.34. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (17)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $f(x) \neq 0$ je funkce nazýváme **nehomogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

K nalezení obecného řešení rovnice (17) je možné použít Větu 0.25. Je však otázka, jakým způsobem hledat partikulární řešení zadané nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Univerzální metoda variace konstant přirozeně funguje i pro rovnici s konstantními koeficienty (17). Dokonce v případě lineárních rovnic s konstantními koeficienty se zjednoduší i užití vzorce z Poznámky 0.28, protože funkce bude mít tvar $\Phi(x, s) = \tilde{\Phi}(x - s)$. Partikulární řešení je potom dáno vzorcem

$$Y(x) = \int_{x_0}^x \tilde{\Phi}(x - s) g(s) ds.$$

Příklad 0.35. Nalezněte obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x},$$

Řešení. Nejprve určíme homogenní řešení y_h . Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je $\lambda^2 + 1 = 0$. Odtud $\lambda_{1,2} = \pm j$ a fundamentální systém této rovnice má tvar $y_1 = \cos x$ a $y_2 = \sin x$. Nyní určíme partikulární řešení Y zadané rovnice dle předchozí poznámky:

Určíme konstanty c_1 , c_2 tak, aby platilo $y(s) = 0$, $y'(s) = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \cos s + c_2 \sin s = 0 \\ -c_1 \sin s + c_2 \cos s = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin s \\ 1 & \cos s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{vmatrix}} = \frac{-\sin s}{1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos s & 0 \\ -\sin s & 1 \end{vmatrix}}{1} = \cos s$$

Dostáváme váhovou funkci $\Phi(x, s) = -\sin s \cos x + \cos s \sin x = \sin(x - s)$ a partikulární řešení ($x_0 = 0$):

$$Y(x) = \int_0^x \frac{\sin(x-s)}{\cos s} ds = \int_0^x \sin x - \cos x \operatorname{tg} s ds = [s \sin x + \ln |\cos s| \cos x]_0^x = x \sin x + \cos x \ln |\cos x|.$$

Podle Věty 0.25 je pak hledané obecné řešení

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

Použitím metody variace konstant by výpočty byly prakticky totožné, proto výpočty nebudeme podrobně provádět. Podle Věty 0.26 ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. Po dosazení do vzorce (14) dostáváme soustavu

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0,$$

$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Vyřešením této soustavy (vhodné je například použít Cramerovo pravidlo) dostáváme $c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$ a $c_2'(x) = 1$. Integrováním dostáváme například primitivní funkce $c_1(x) = \ln |\cos x|$ a $c_2(x) = x$, tedy $Y = \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$. $\square$

Předvedené dvě metody nejsou jediným způsobem, jak nalézt obecné řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.

V praxi se často používá tzv. **metoda neurčitých koeficientů**. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro rovnice (17) se speciální pravou stranou. Při řešení využíváme opět Větu 0.25 a obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = y_h + Y.$$

Rozdíl je však ve způsobu hledání partikulárního řešení Y . Nyní popíšeme, jak lze toto řešení metodou neurčitých koeficientů najít. U této metody se předpokládá, že pravá strana rovnice (17), to jest funkce $f(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$ je v tzv. **speciálním tvaru**. Uvažme, že derivace funkce, která má tvar jako funkce $f(x)$ je funkcí stejného tvaru podobně jako lineární kombinace funkcí tohoto tvaru má stejný tvar jako funkce $f(x)$. Tato úvaha nás opravňuje předpokládat existenci partikulárního řešení ve stejném tvaru jako je funkce $f(x)$. Navíc je třeba uvážit možnou komplikaci a sice je-li dvojice komplexních čísel $\alpha \pm j\beta$ kořenem charakteristické rovnice potom po dosazení funkce $\exp((\alpha \pm j\beta)x)$ do levé strany rovnice

dává nulu a ne funkci uvažovaného typu. V takovém případě mluvíme o rezonanci a tuto situaci musíme zohlednit při předpovědi partikulárního řešení.

Věta 0.36. *Nechť je dána lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (17) s pravou stranou*

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

kde $P_n(x)$, resp. $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n , resp. m . Potom existuje partikulární řešení rovnice (17)

$$Y(x) = e^{\alpha x}(\tilde{P}_p(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_p(x) \sin \beta x)x^k,$$

kde $\tilde{P}_p(x)$, $\tilde{Q}_p(x)$ jsou vhodné polynomy stupně $p = \max\{m, n\}$ a k je násobnost $\alpha \pm j\beta$ jako kořene charakteristické rovnice. Poznamenejme, že není-li $\alpha \pm j\beta$ kořenem charakteristické rovnice, potom $k = 0$.

Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice (17). Porovnáním obou stran rovnice (podobně jako např. při hledání koeficientů u rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky) tyto koeficienty dopočítáme. Některé tvary řešení jsou pro přehlednost uvedeny v tabulce.

Pravá strana $f(x)$	Tvar partikulárního řešení Y
$f(x) = e^{ax} P_n(x),$ kde $P_n(x)$ je polynom n -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$	$Y = e^{ax} x^k Q_n(x),$ a je k -násobný kořen char. rovnice, $Q_n(x)$ je obecný polynom n -tého stupně
$f(x) = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx),$ kde M, N, a, b jsou reálná čísla	$Y = e^{ax} x^k (A \cos bx + B \sin bx),$ $a + bj$ je k -násobný kořen char. rovnice, A, B jsou reálná čísla

Příklad 0.37. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou:

a) $y'' - 4y = 10e^{3x}$

b) $y'' + 4y = 8x^2 - 32x + 4$

c) $y'' + 2y' - 3y = (4x - 3)e^x$

d) $3y'' - 2y' = 10 \cos 2x$

Řešení. a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 4y = 0$. Máme $\lambda^2 - 4 = 0$. Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10e^{3x} = e^{3x} P_0(x).$$

Zde $\alpha = 3$ není kořen charakteristické rovnice ($3 \neq \pm 2$), a proto $k = 0$. Obecný polynom nultého stupně je konstanta, odtud $P_0(x) = A$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x} x^0 A = Ae^{3x}$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - 4Y = 10e^{3x}$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat a dosadit do zadané rovnice:

$$Y' = 3Ae^{3x}, \quad Y'' = 9Ae^{3x}.$$

Po dosazení dostáváme

$$9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 10e^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^{3x} a dostaneme $9A - 4A = 10$ a odtud $A = 2$. Máme jedno partikulární řešení $Y = 2e^{3x}$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + 2e^{3x}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 4y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 4 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ a $y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8x^2 - 32x + 4 = e^{0x}(8x^2 - 32x + 4) = e^{0x}P_2(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice ($0 \neq \pm 2i$), a proto $k = 0$. Obecný polynom druhého stupně je $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x}x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 4Y = 8x^2 - 32x + 4$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = 2Ax + B, \quad Y'' = 2A.$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2 - 32x + 4.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud název metoda neurčitých koeficientů):

$$x^2 : \quad 4A = 8,$$

$$x^1 : \quad 4B = -32,$$

$$x^0 : \quad 2A + 4C = 4.$$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme $A = 2$, $B = -8$, $C = 0$. Získali jsme jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice $Y = 2x^2 - 8x$. Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 8x.$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 2y' - 3y = 0$. Její charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ a $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = (4x - 3)e^x = e^x P_1(x).$$

Zde $\alpha = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Obecný polynom prvního stupně je $P_1(x) = Ax + B$ a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^x x^1 (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 2Y' - 3Y = (4x - 3)e^x$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y = e^x (Ax^2 + Bx),$$

$$Y' = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$Y'' = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x (2Ax + B + 2A) =$$

$$= e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) = e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A). \quad \text{Po dosazení}$$

do zadání dostáváme

$$e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) + 2e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) - 3e^x (Ax^2 + Bx) = (4x - 3)e^x.$$

Rovnici nejdřív vydělíme výrazem e^x a dostaneme

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx + 4Ax + 2B - 3Ax^2 - 3Bx = 4x - 3.$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$\begin{aligned}x^2: \quad & A + 2A - 3A = 0, \\x^1: \quad & B + 4A + 2B + 4A - 3B = 4, \\x^0: \quad & 2B + 2A + 2B = -3.\end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu $8A = 4$, $2A + 4B = -3$. Odtud $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$. Partikulární řešení je

$$Y = e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right).$$

Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right).$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici $3y'' - 2y' = 0$. Charakteristická rovnice je tvaru $3\lambda^2 - 2\lambda = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ a $y_h = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 \cos 2x = e^{0x}(10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + 2i$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici $3Y'' - 2Y' = 10 \cos 2x$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Dosadíme do zadání a dostáváme

$$3(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = 10 \cos 2x,$$

což je ekvivalentní s

$$-12A \cos 2x - 12B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x = 10 \cos 2x.$$

Aby toto platilo, musí se koeficienty při $\cos 2x$ a $\sin 2x$ rovnat na obou stranách rovnice:

$$\cos 2x : \quad -12A - 4B = 10,$$

$$\sin 2x : \quad -12B + 4A = 0.$$

Opět jsme dostali soustavu rovnic: $-12A - 4B = 10$, $A - 3B = 0$.

Odtud $A = -\frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Partikulární řešení je

$$Y = -\frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

□

Na závěr připomeňme, že pomocí principu lze metodou neurčitých koeficientů řešit i složitější pravé strany.

Příklad 0.38. Nalezněte obecné řešení rovnice:

$$y'' - 2y' + 1 = 4 + 4 \sin 2x - 6 \cos^2 x$$

Řešení. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$, proto je obecné řešení rovnice homogenní ve tvaru

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Pravou stranu rovnice nejprve upravíme pomocí vztahu $\cos x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$$4 + 4 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 4 + 4 \sin 2x - 6 \frac{\cos 2x + 1}{2} = 1 + 4 \sin 2x - 3 \cos 2x,$$

která je součtem dvou pravých stran ve speciálním tvaru:

$$f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x.$$

Partikulární řešení můžeme předpovědět ve tvaru součtu odpovídajících partikulárních řešení:

$$Y = A + B \sin 2x + C \cos 2x \Leftrightarrow Y' = 2B \cos 2x - 2C \sin 2x \Leftrightarrow Y'' = -4B \sin 2x - 4C \cos 2x.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$A + (-3B - 4C) \cos 2x + (4B - 3C) \sin 2x = 1 - 3 \cos 2x + 4 \sin 2x,$$

z čehož plyne $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ a $Y = 1 + \cos 2x = \cos^2 x$. Obecné řešení dané rovnice má tvar

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \cos^2 x.$$

□