

0.1 Numerická matematika

Důvodů proč se zabývat numerickou matematikou je více. Ze základní školy si odnášíme znalost, že číslo $\pi \doteq 22/7$ s dovětkem, že to pro praxi stačí. Položme si otázku, které je z obou čísel větší a jak moc se čísla liší. Dnešní „kalkulačková“ generace problém vyřeší jednoduše s pomocí kalkulačky vestavěné ve Windows:

$$\pi \doteq 3,1415926535897932384626433832795$$

$$\frac{22}{7} \doteq 3,1428571428571428571428571428571$$

$$\pi < \frac{22}{7}$$

$$\frac{22}{7} - \pi \doteq 0,00126448926734961868021375957764.$$

Poznamenejme, že odhad čísla π byl znám již ve starověku a byl získán důmyslným využitím elementárních znalostí a odhad byl dán porovnáním $3 \cdot 2^n$ -úhelníka vepsaného a opsaného kružnici (podrobnější informace naleznete na [history \$\pi\$](#)). Tento jednoduchý příklad ukazuje, užití přibližného číselného (numerického) vyjádření, které uspokojivě řeší položené otázky.

Při řešení mnoha praktických úloh se mohou vyskytovat komplikace, které jsme při řešení „školních“ úloh potlačili. Jako příklad může sloužit dobře teoreticky popsany postup řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Zkuste vyřešit soustavu 100 rovnic o 100 neznámých s koeficienty, které nebudou malá celá čísla a zjistíte, že tužka papír je nedostatečný nástroj.

0.2 Používání matematického softwaru

Numerické metody jsou ze své povahy algoritmy. Problémy, které budete řešit ve své inženýrské praxi, budou často velmi složité, takže k jejich řešení budete samozřejmě využívat výpočetní techniku a spolu s tím někým jiným připravený matematický software. V této souvislosti je nutné, aby si člověk byl vědom nedokonalostí matematického softwaru. U každé numerické metody byste proto měli mj. zvážit, jakým způsobem software zadanou úlohu řeší. Dohledat odpověď na tuto otázku je často velmi pracné nebo dokonce úplně nemožné – a přitom bychom ji znát měli. Ptejme se, jak software, resp. uživatel, který pomocí softwaru bude zadanou úlohu řešit, ověřuje přípustnost zadání, v jaké formě chystá vstupní data, jak interpretuje získaný výsledek, jak ověří, že strojově získaný výsledek je správný, na základě čeho může usoudit, že správný není apod.

Ukažme si nyní příklad chyby, která vyplývá ze skutečnosti, že uživatel příliš spoléhá na strojově získané výsledky.

Příklad 0.1. Určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Řešení. Z prvního ročníku víte, že tato řada je divergentní, a součet tedy neexistuje. Předpokládejme, že si tento poznatek nevybavíte. Pokud pracujete se softwarem Maple, příkaz `sum(1/n,n=1..infinity)` správně vypíše výsledek ∞ . (*Otázka:* Znamená to, že součet je nekonečno nebo že řadu nelze sečíst? Nebo tyto dva pojmy znamenají totéž?) Software MATLAB tento symbolický zápis nezná. Jak zadáte požadavek

na sečtení nekonečného počtu členů této řady? Lze nekonečno „aproximovat“ nějakým dostatečně velkým číslem? □

0.3 Studované typy úloh

V textu určeném pro studenty oborů v rámci studijního programu Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika se řeší následující typy úloh:

- **hledání řešení soustavy lineárních rovnic** – ukážeme, jak hledat řešení velkých soustav rovnic, které není vhodné nebo možné řešit pomocí metod známých z prvního ročníku; požadavek na řešení soustavy lineárních rovnic se bude také objevovat v rámci postupu řešení některých jiných úloh,
- **hledání řešení jedné nelineární rovnice** – ukážeme, jak řešit rovnice, které přesahují rámec středoškolského studia, resp. rovnice, které analytickými postupy obecně řešit nelze,
- **hledání řešení soustav nelineárních rovnic** – ukážeme, jak řešit soustavy rovnic, které se skládají z několika nelineárních rovnic (viz např. soustava z Příkladu ??), nebo soustav rovnic, které vzniknou z požadavku určit bod, ve kterém funkce komplexní proměnné nabývá předem dané hodnoty,
- **hledání přibližného vyjádření funkce** – známými body budeme prokládat neznámou funkci, přičemž jimi můžeme prokládat buď jednu funkci nebo sadu funkcí podobného typu,

- **určování neznámé funkce známého typu** – jestliže budeme znát způsob, jakým závisí jedna proměnná na druhé, budeme na základě výsledků měření usuzovat, jak přesně tato závislost vypadá,
- **derivování a integrování neznámých nebo komplikovaných funkcí** – budeme derivovat a zejména integrovat funkce, jejichž derivování je pracné a integrování pracné nebo nemožné; navíc budeme derivovat a integrovat funkce zadané nikoli funkčním předpisem ale jen tabulkou funkčních hodnot v několika bodech,
- **hledání numerického řešení diferenciálních rovnic** – ukážeme, že postupy řešení diferenciálních rovnic, které jste se učili v předmětu *Matematika 2* lze nahradit jinými, v mnoha ohledech jednoduššími, které lze navíc použít i na typy rovnic, které analyticky řešit neumíme. Cenou za tuto výhodu však bude, že o řešení těchto rovnic získáme mnohem méně informací, než kdybychom používali analytické postupy.

Tento výčet jasně ukazuje celkovou rozsáhlost problematiky a tedy nemožnost se ve vymezeném prostoru celé problematice věnovat. Proto se v dalším textu zaměříme pouze na jednu oblast, na níž budeme ilustrovat některé základní problémy. Touto oblastí bude řešení jedné rovnice.

0.4 Numerické řešení jedné nelineární rovnice

Je dána reálná funkce f jedné reálné proměnné x . Najděte všechny body $\zeta \in \mathbb{R}$, pro které platí, že $f(\zeta) = 0$.

Na střední škole jste si ukázali postupy řešení některých algebraických rovnic – lineární, kvadratické, pravděpodobně kubické a možná i rovnic čtvrtého stupně (pro rovnice pátého a vyšších řádů obecné řešení ve tvaru vzorce neexistuje). Dále jste řešili rovnice logaritmické, exponenciální a goniometrické. V této chvíli však neumíme řešit rovnice, kde se vyskytují *současně* funkce různých typů, např. $e^x + \sin(x) = 1$ nebo $x^3 + \cos x = 3$ nebo $\ln(x) + (x - 1)^2 + 2 = 0$ apod. Většinu takovýchto rovnic ani není možné vyřešit přesně – je však možné najít jejich přibližné řešení.

Metody, které budeme uvádět, bude samozřejmě možné použít i na řešení známých typů rovnic. Kromě příkladů metod, které si budeme uvádět, existuje navíc ve speciálních případech (např. pro algebraické rovnice) i celá řada speciálních numerických metod. Úlohu však také využíváme např. při řešení optimalizačních úloh ve chvíli, kdy máme za úkol stanovit extrémy funkcí, příp. inflexní body.

0.4.1 Počet řešení a odhad polohy řešení

Pokud bychom zjednodušeně popsali postup řešení nelineárních rovnic známých typů (např. logaritmických, exponenciálních nebo goniometrických), který jste používali na střední škole, mohli bychom říci, že jste nejprve našli definiční obor funkcí, které v rovnici vystupovaly, poté jste aplikovali známý postup řešení

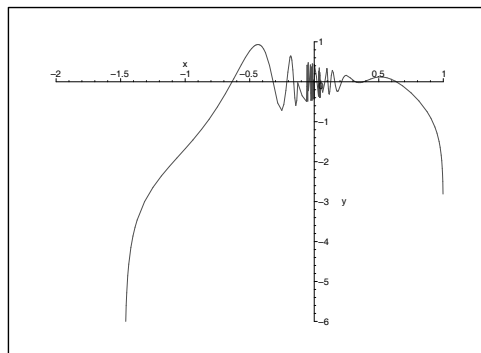
a tímto postupem jste dané řešení buď našli, nebo jste ukázali, že zadaná rovnice žádné řešení nemá. Nakonec jste zkontrolovali, zda náhodou získané řešení neodporuje informaci o definičním oboru nebo podmínkám, za kterých jste provedli některé z úprav v postupu řešení.

Numerický přístup k řešení nelineárních rovnic je poněkud odlišný. Najít definiční obory příslušných funkcí je sice důležité, nicméně musíme také zejména určit alespoň přibližný interval, na kterém budeme nějaké řešení hledat, a teprve poté můžeme vlastní hledání řešení zahájit. Numerické metody, které si budeme uvádět v dalším textu, se liší ve způsobu, jakým hledají řešení zadané rovnice. Před jejich použitím však musíme vědět, *kde* toto řešení máme hledat.

Odpovědět na tuto otázku není v reálných situacích vůbec jednoduché.

Příklad 0.2. Rozhodněte, kolik má řešení rovnice $\ln(\operatorname{tg} \sqrt{1-x}) \cdot \sin \frac{2}{x} = 0$.

Řešení. Pokud budeme chtít rozhodovat na základě obrázku, vykresleného počítačovým programem, musíme vědět, na jakém intervalu máme příslušnou funkci vykreslit. Jak to však poznáme? Na obrázku je znázorněn graf funkce $f(x) = \ln(\operatorname{tg} \sqrt{1-x}) \cdot \sin \frac{2}{x}$

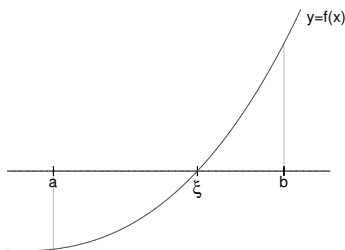


Při rozhodování o intervalech, na kterých leží nějaké řešení zadané rovnice, nám jistě pomůže znalost definičního oboru příslušné funkce. □

Věta 0.3. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají-li $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, tj. platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \tag{1}$$

pak v intervalu $\langle a, b \rangle$ leží alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

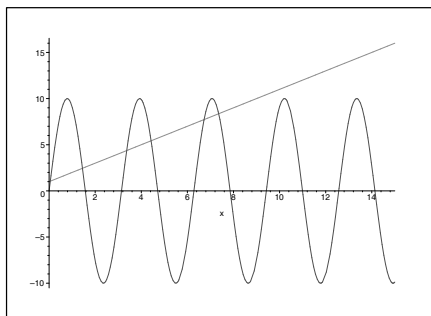


Obr. 1: Je-li funkce na $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak splnění podmínky $f(a) \cdot f(b) < 0$ zaručí existenci kořene

Jinou možností, jak provést odhad polohy řešení, je převedení úlohy $f(x) = 0$ na tvar $f_1(x) = f_2(x)$. V tom případě hledáme průsečík průsečík dvou funkcí.

Příklad 0.4. Je dána rovnice $10 \sin 2x - x - 1 = 0$. Seřadíme její kladná řešení podle velikosti a označme je $x_0, x_1, x_2, \dots$. Určete x_4 a x_8 této posloupnosti.

Řešení. Graf funkce $10 \sin 2x - x - 1 = 0$ načrtnout neumíme. V první fázi dokonce ani nevíme, kde máme uvedené řešení hledat – na intervalu $\langle 0, 10 \rangle$?



Je tedy zřejmé, že žádná jiná kladná řešení než ta, která jsou na obrázku, rovnice nemá. Řešení x_8 tedy neexistuje. Co se týká řešení x_4 , je zřejmé, že leží někde mezi 2π a $\frac{9}{4}\pi$. Přitom tento obrázek není nutné vykreslovat strojově, protože je možné jej načrtnout na základě středoškolských znalostí. $\square$

0.5 Zkracování intervalu

Jestliže víme, že hledané řešení zadané rovnice leží na nějakém intervalu $I = \langle a, b \rangle$, na kterém je funkce $f(x)$ spojitá, pak můžeme hledané řešení najít tak, že tento interval budeme vhodně zkracovat a při tom si budeme průběžně ověřovat, že hledané řešení leží i v tomto zkráceném intervalu.

Toto „zkracování“ intervalu můžeme provést mnoha různými způsoby, čímž dostaneme různé numerické metody. Ukážeme si nyní některé postupy, které jsou jednoduše algoritmizovatelné.

0.5.1 Metoda půlení intervalu

Předpokládejme, že na nějakém intervalu $I = \langle a, b \rangle$ je funkce $f(x)$ spojitá.¹ Dále předpokládejme, že na tomto intervalu leží alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$. (Tuto skutečnost můžeme ověřit např. pomocí Věty 0.3.) Jestliže interval I rozdělíme na dvě poloviny, bude funkce $f(x)$ na každé z takto vzniklých částí opět spojitá a můžeme se ptát (např. za použití Věty 0.3), na které z těchto částí hledané řešení leží. Takto můžeme pokračovat, dokud není půlený interval dostatečně malý.

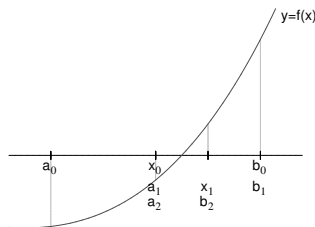
Pro přehlednost budeme počáteční body intervalů označovat jako a_k , koncové body jako b_k a středy intervalů jako x_k , přičemž ve všech případech je $k = 0, 1, \dots, n$, kde n je takové číslo, že délka intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ je menší než 2ε , kde ε je požadovaná přesnost výpočtu.

Střed intervalu vypočteme podle vzorce $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

¹Jak vypadá spojitost vně intervalu I není podstatné!

Jestliže bude délka posledního, tj. n -tého, intervalu menší než 2ε , je zřejmé, že střed posledního intervalu, tj. bod x_n , se bude od přesné hodnoty řešení lišit o méně než o požadované ε . Samozřejmě se během výpočtu může stát, že pro nějaký bod a_k (nebo b_k nebo x_k) bude platit $f(a_k) = 0$ (nebo $f(b_k) = 0$ nebo $f(x_k) = 0$). V tom případě jsme přímo našli řešení zadané rovnice a můžeme ukončit výpočet.

Při volbě intervalu, na kterém leží právě jedno řešení a na kterém je funkce $f(x)$ spojitá, bude metoda půlení intervalu vždy konvergovat k hledanému řešení.



Obr. 2: Metoda půlení intervalu

Příklad 0.5. Metodou půlení intervalu najděte kladný kořen rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení. Nejprve určíme, že kladný kořen zadané rovnice leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. (K tomu si můžeme např. vykreslit do jednoho obrázku funkce $f_1(x) = e^x$ a $f_2(x) = 3 - x^2$.)

Poté můžeme zahájit vlastní výpočet. Postupně vypočítávané hodnoty a_k, b_k, x_k budeme zapisovat do tabulky. Je vhodné si také zapisovat znaménka funkčních hodnot funkce $f(x) = e^x + x^2 - 3$ v těchto bodech.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$
0	0	1	0,5	-	+	-
1	0,5	1	0,75	-	+	-
2	0,75	1	0,875	-	+	+
3	0,75	0,875	0,8125	-	+	-
4	0,8125	0,875	0,84375	-	+	+
5	0,8125	0,84375	0,828125	-	+	-
6	0,828125	0,84375	0,8359375			

Nyní můžeme výpočet ukončit, protože $b_6 - a_6 < 2 \cdot 0,01$. Řešení rovnice $e^x + x^2 - 3 = 0$ s přesností 0,01 je $x_6 \doteq 0,84$.

□

0.5.2 Metoda regula falsi

Princip metody regula falsi je velmi podobný jako u metody půlení intervalu. Opět postupně zužujeme interval obsahující řešení rovnice $f(x) = 0$. Tentokrát ale dělicím bodem není polovina intervalu, nýbrž průsečík sečny vedené body $[a_k, f(a_k)]$ a $[b_k, f(b_k)]$ s osou x – viz obrázek 3.

Tento průsečík vypočteme podle vzorce¹

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k) \quad (2)$$

Z intervalů $\langle a_k, x_k \rangle$, $\langle x_k, b_k \rangle$ pak vybereme ten, v jehož krajních bodech mají funkční hodnoty funkce f opačná znaménka.

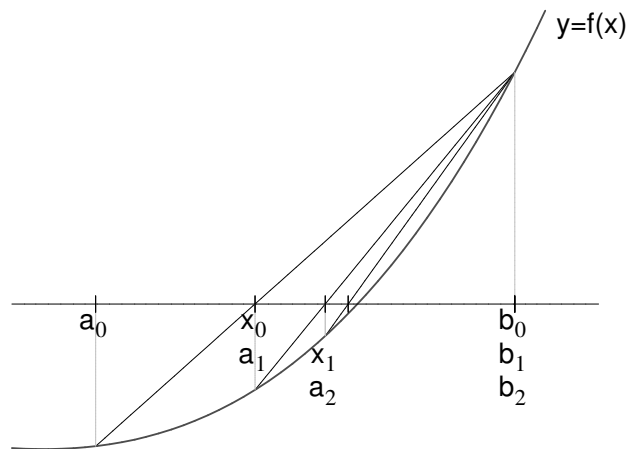
Platí-li $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$, položíme $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$, platí-li $f(b_k) \cdot f(x_k) < 0$, položíme $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$. V případě, že $f(x_k) = 0$, našli jsme kořen rovnice a výpočet ukončíme.

Ve výpočtu pokračujeme tak dlouho, dokud nenarazíme na kořen, nebo dokud neplatí

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon,$$

kde $\varepsilon > 0$ je předem dané číslo. Splněním tohoto kritéria ale bohužel není zaručeno, že přesná hodnota kořene ξ se od jeho aproximace x_k liší o méně než ε .

¹Zkuste si ho sami odvodit za použití podobnosti vhodných trojúhelníků!



Obr. 3: Metoda regula falsi

Chceme-li se přesvědčit, že $|x_k - \xi| < \varepsilon$, můžeme vypočítat $f(x_k + \varepsilon)$ a $f(x_k - \varepsilon)$. Platí-li $f(x_k) \cdot f(x_k +$

$+ \varepsilon) < 0$, resp. $f(x_k) \cdot f(x_k - \varepsilon) < 0$, je jisté, že kořen ξ leží v intervalu $\langle x_k, x_k + \varepsilon \rangle$, resp. $\langle x_k - \varepsilon, x_k \rangle$, a tedy se od x_k nemůže lišit o více než ε .

V situaci, kdy se pohybujeme na intervalu, na kterém leží právě jedno řešení zadané rovnice $f(x) = 0$, přičemž na tomto intervalu je funkce $f(x)$ spojitá, metodou regula falsi vždy najdeme hledané řešení. Metoda bývá rychlejší než metoda půlení intervalu, avšak existují případy, kdy je pomalejší.

Příklad 0.6. Metodou regula falsi najděte kladné řešení rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení. Mohli bychom vyjít z nějakého intervalu nalezeného metodou půlení v příkladu 0.5, ale pro srovnání obou metod začneme opět s intervalem $\langle 0, 1 \rangle$. U metody regula falsi budeme potřebovat i funkční hodnoty v bodech a_k, b_k a x_k , nejen jejich znaménka.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$
0	0	1	0,73576	-2	0,71828	-0,37159
1	0,73576	1	0,82585	-0,37159	0,71828	-0,03414
2	0,82585	1	0,83375	-0,03414	0,71828	-0,00291

Platí $|x_2 - x_1| < 0,01$, proto výpočet ukončíme. Přibližné řešení rovnice je $x_2 \doteq 0,83$.

□

0.5.3 Několik poznámek

Jestliže pracujeme na intervalu, na kterém má spojitá funkce $f(x)$ právě jeden průsečík s osou x , bude jak metoda půlení intervalu tak metoda regula falsi konvergovat k hledanému řešení.

Musíme však zvážit, na základě jakých skutečností usuzujeme na to, že daná rovnice $f(x) = 0$ má na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ právě jedno řešení. Jestliže tak usuzujeme z podmínky ve Větě 0.3, tj. z faktu, že $f(a) \cdot f(b) < 0$, mohou nastat problémy. Z této podmínky totiž plyne, že na intervalu I leží *alespoň* jeden kořen, nikoliv *právě* jeden. Při praktickém výpočtu se tak může stát, že rozhodování na základě znamének funkčních hodnot nemusí být vůbec tak jednoznačné, jak by se mohlo zdát z příkladů 0.5 a 0.6.

Příklad 0.7. Najděte řešení rovnice $\cos 3x + \frac{x}{2} - 2 = 0$, které leží na intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$.

Řešení. Funkce $f(x) = \cos 3x + \frac{x}{2} - 2$ je na intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$ spojitá. Platí, že $f(\pi) \doteq -1,43 < 0$ a $f(2\pi) \doteq 2,14 > 0$, tj. podle Věty 0.3 na tomto intervalu leží alespoň jedno řešení zadané rovnice.

Pokud zvolíme pro řešení metodu půlení intervalů nebo regula falsi, budou obě konvergovat k řešení $x \doteq 3,71$.

Je to však právě to řešení, které jsme chtěli? Uvedená rovnice má totiž na tomto intervalu řešení celkem tři. Podobně např. na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ má rovnice celkem 5 řešení. □

Kromě metody půlení intervalu a metody regula falsi existuje celá řada dalších numerických metod, které pracují na podobném principu. Jednou z nich je např. **metoda sečen**.

0.6 Metody vycházející z bodu

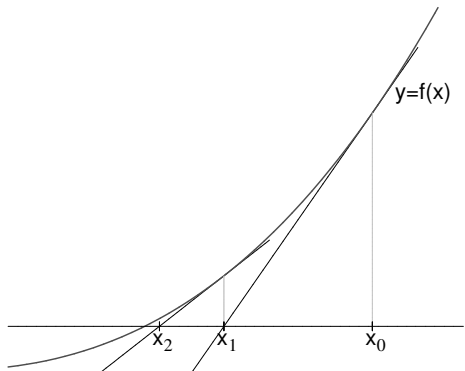
Některé numerické metody na hledání řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$ pracují na poněkud odlišném principu. Opět předpokládáme, že pracujeme s intervalem, na kterém leží právě jeden průsečík spojitě funkce $f(x)$ s osou x . Nyní však nebudeme tento interval zkracovat. Místo toho si v tomto intervalu podle nějakých pravidel vybereme jeden bod, ze kterého se postupně budeme k hledanému řešení přibližovat. Metody, které si budeme uvádět, budou takové, že budou konvergovat jen v některých situacích – jen pro některé funkce, některé intervaly a některé body.

0.6.1 Newtonova metoda (metoda tečen)

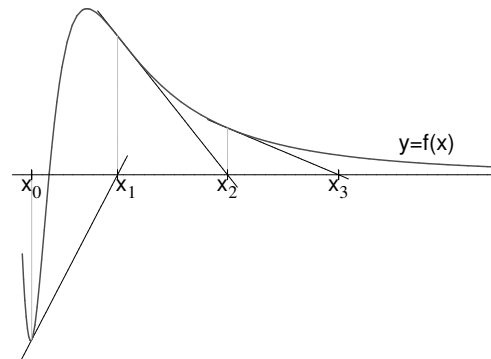
Už sám název metody říká, že budeme pracovat s tečnami ke grafu funkce f . Proto všude v této kapitole budeme předpokládat, že funkce f má na intervalu, na kterém budeme pracovat, derivaci.

Newtonovu metodu můžeme popsat graficky takto:

Zvolíme počáteční aproximaci kořene x_0 . Bodem $[x_0, f(x_0)]$ vedeme tečnu ke grafu funkce f . Její průsečík s osou x označíme x_1 . Pak vedeme tečnu bodem $[x_1, f(x_1)]$, její průsečík s osou x označíme x_2 atd. – viz obrázek 4.



Obr. 4: Newtonova metoda



Obr. 5: Newtonova metoda může divergovat

Průsečík tečny v bodě $[x_k, f(x_k)]$ s osou x vypočteme jako¹

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3)$$

¹Zkuste si tento vzorec sami odvodit! Pokud si uvědomíte, jaký je geometrický význam derivace funkce v bodě a jak je definována funkce tangens, je to snadné.

Výpočet provádíme tak dlouho, dokud není splněna podmínka

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

Při splnění této podmínky však nemusí platit $|x_k - \xi| < \varepsilon$. Kdybychom si chtěli být opravdu jisti, že se x_k od řešení ξ liší o méně než ε , mohli bychom použít dále uvedený odhad ??, případně vypočítat $f(x_k)$ a $f(x_k \pm \varepsilon)$ a použít postup popsany u metody regula falsi.

Newtonova metoda je z metod pro řešení nelineárních rovnice nejefektivnější, nemusí však konvergovat – viz obrázek 5.

Věta 0.8. *Nechť je dána rovnice $f(x) = 0$ a interval $I = \langle a, b \rangle$, na němž leží právě jedno řešení této rovnice. Nechť jsou splněny následující podmínky:*

- *funkce $f(x)$ má na intervalu I spojitou první a druhou derivaci $f'(x)$ a $f''(x)$,*
- *na intervalu I je $f'(x) \neq 0$ a současně $f''(x)$ nemění znaménko.*

Pak zvolíme-li počáteční aproximaci $x_0 \in I$ tak, že platí

- $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

Newtonova metoda bude konvergovat.

Příklad 0.9. Newtonovou metodou najděte záporné řešení rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení. Odhadneme (např. tak, že do jednoho obrázku nakreslíme funkce $f_1(x) = e^x$ a $f_2(x) = 3 - x^2$), že hledané záporné řešení leží v intervalu $\langle -2, -1 \rangle$. Ověříme, že na tomto intervalu jsou splněny předpoklady Věty 0.8.

Vypočteme první a druhou derivaci funkce $f(x) = e^x + x^2 - 3$:

$$f'(x) = e^x + 2x \quad , \quad f''(x) = e^x + 2$$

Na celém intervalu $\langle -2, -1 \rangle$ je $f'(x) < 0$ a $f''(x) > 0$ (tzn. první derivace není nikde nulová a druhá derivace zde nemění znaménko). *Jak to poznáme? Rozmyslete si sami zejména situaci pro $f'(x)$.*

Nyní z intervalu I vybereme počáteční aproximaci x_0 tak, aby byla splněna podmínka 0.8. Protože $f(-2) = e^{-2} + 1 > 0$ a $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$, zvolíme $x_0 = -2$.

Další aproximace řešení budeme počítat pomocí iteračního vztahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} + x_k^2 - 3}{e^{x_k} + 2x_k}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}x_0 &= -2 \\x_1 &\doteq -1,70623 \\x_2 &\doteq -1,67752 \\x_3 &\doteq -1,67723\end{aligned}$$

Nyní můžeme výpočet zastavit, protože $|x_3 - x_2| < 0,01$. Všimněme si, že tři kroky by nám stačily i pro dosažení přesnosti 0,001. Newtonova metoda je obvykle velice rychlá.

Přibližné řešení rovnice je $x_3 \doteq -1,68$

□

0.6.2 Metoda prosté iterace

Připomeňme, že věta o pevném bodu říká, že za splnění určitých předpokladů existuje na intervalu I právě jedno řešení rovnice $x = g(x)$, které je limitou posloupnosti postupných aproximací tvořené body

$$x_{k+1} = g(x_k), \tag{4}$$

přičemž počáteční aproximaci můžeme z intervalu I volit libovolně.

Věta 0.10. *Nechť funkce g zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ do sebe a má na tomto intervalu derivaci. Jestliže existuje číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že*

$$|g'(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in \langle a, b \rangle, \quad (5)$$

pak v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje pevný bod ξ funkce g a posloupnost postupných aproximací získaná předpisem 4 k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Dále platí

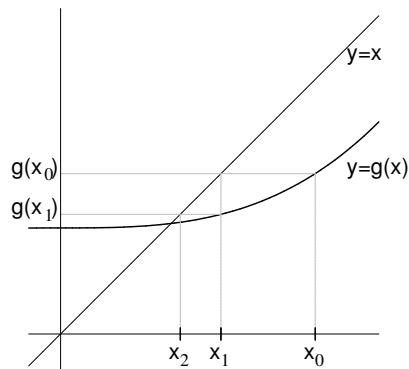
$$|x_k - \xi| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_k - x_{k-1}| \quad (6)$$

$$|x_k - \xi| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} |x_1 - x_0| \quad (7)$$

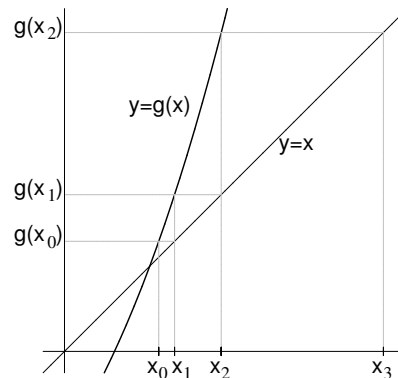
Užití metody si ukážeme na řešení rovnice, které jsme již našli v Příkladu 0.9.

Příklad 0.11. Metodou prosté iterace najděte záporný kořen rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0$$



Obr. 6: Metoda prosté iterace



Obr. 7: Metoda prosté iterace může divergovat

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení. Víme, že kořen leží v intervalu $\langle -2, -1 \rangle$. Budeme hledat vhodnou iterační funkci g . Jedna možnost, jak ze zadané rovnice vyjádřit x , je

$$x^2 = 3 - e^x \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{3 - e^x}.$$

Protože hledáme záporný kořen, je

$$g(x) = -\sqrt{3 - e^x}$$

Ověříme, je-li splněna podmínka 5. K tomu je potřeba funkci g zderivovat. Dostaneme

$$g'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{3-e^x}}.$$

Nyní budeme hledat maximum $|g'(x)|$ na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$. Na tomto intervalu je $|g'(x)| = \frac{e^x}{2\sqrt{3-e^x}}$. Derivace této funkce je $\frac{e^x(6-e^x)}{4(3-e^x)^{\frac{3}{2}}}$. To je funkce na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$ kladná, tedy $|g'(x)|$ je na tomto intervalu rostoucí a svého maxima nabývá v pravém krajním bodě tohoto intervalu. Hodnota maxima je $|g'(-1)| = \frac{e^{-1}}{2\sqrt{3-e^{-1}}} \leq 0,12 < 1$. To znamená, že podmínka 5 je splněna.

Ještě bychom měli ověřit, že funkce g zobrazuje interval $\langle -2, -1 \rangle$ do sebe. Protože je na tomto intervalu $g'(x) > 0$, je funkce g rostoucí a stačí ověřit, že hodnoty g v krajních bodech intervalu do tohoto intervalu patří. (Kdyby g nebyla monotonní, museli bychom hledat její maximum a minimum na zkoumaném intervalu – jen dosadit krajní body by nestačilo.)

Protože $g(-2) \doteq -1,69 \in \langle -2, -1 \rangle$ a $g(-1) \doteq -1,62 \in \langle -2, -1 \rangle$, funkce g zobrazuje zkoumaný interval do sebe.

Konvergence iteračního procesu je tedy zaručena. Můžeme zvolit např. $x_0 = -2$. Další aproximace pak budeme počítat podle předpisu

$$x_{k+1} = g(x_k) = -\sqrt{3-e^{x_k}}$$

Dostaneme

$$x_0 = -2$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\sqrt{3 - e^{-2}} \doteq -1,69253 \\
 x_2 &= -\sqrt{3 - e^{-1,69253}} \doteq -1,67808 \\
 x_3 &= -\sqrt{3 - e^{-1,67808}} \doteq -1,67728
 \end{aligned}$$

Nyní můžeme výpočet zastavit, protože $|x_3 - x_2| < 0,01$. Přibližné řešení rovnice je $x_3 \doteq -1,68$.

□

Z tohoto příkladu je vidět, že zatímco vlastní výpočet postupných aproximací podle vzorce 4 je jednoduchý (jedná se jen o výpočty funkčních hodnot), složité je ověřování splnění podmínek konvergence.

Navíc musíme vzít v úvahu, že převod rovnice $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$ nemusí být jednoznačný. Mohou se také vyskytnout další problémy vyplývající z požadavku vyjádřit neznámou x .

Příklad 0.12. Metodou prosté iterace najděte libovolné řešení rovnice $e^x + 3 \sin x - 2 = 0$.

Řešení. Převod na tvar $x = g(x)$ můžeme provést např. osamostatněním členu e^x nebo členu $3 \sin x$. V prvním případě dostáváme $e^x = 2 - 3 \sin x$, tj. po zlogaritmování $x = \ln(2 - 3 \sin x)$. Ve druhém případě dostáváme $3 \sin x = 2 - e^x$, tj. po úpravě $x = \arcsin\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^x\right)$.

Zatímco definičním oborem funkce $f(x)$ jsou všechna reálná čísla, pro definiční obory funkcí $g(x)$ – ať v první nebo druhém případě – to neplatí! Pomocí těchto iteračních tvarů $x = g(x)$ tedy rozhodně nemůžeme najít libovolné řešení, ale jen některá z nich. Je přitom zřejmé, že zadaná rovnice má nekonečně mnoho záporných řešení (*sami si rozmyslete proč!*). □