

0.1 Pravděpodobnost

V příkladech, na kterých budeme základní pojmy vysvětlovat, se většinou setkáme s možná poněkud neprakticky vyhlížejícím házením kostkami, vytahováním barevných kuliček z osudí, apod. Neberte to, prosím, jako další důkaz neužitečnosti matematiky. Důvod je ten, že např. házení kostkou si každý snadno představí a můžeme se pak soustředit na matematickou stránku věci. V praktických úlohách bývá formulace zadání často složitá a nepřehledná a člověku může jistou dobu trvat, než zadání rozluští a zjistí, že vlastně potřebuje tutéž úvahu, jako při onom nudném házení kostkami.

Teorie pravděpodobnosti se začala rozvíjet v souvislosti s hazardními hrami již v 17. století a jejími zakladateli byli slavní matematici Blaise Pascal a Pierre de Fermat.

Základní situace je taková, že provádíme nějaký pokus (např. hod mincí nebo kostkou, výběr jedné karty z balíčku, apod.), u kterého je n možných výsledků, přičemž lze očekávat, že při opakování pokusu budou všechny tyto výsledky nastávat stejně často, žádný nebude ve výhodě proti ostatním. Ptáme se, jaká je šance, že nastane výsledek, který je pro nás nějakým způsobem zajímavý (např. padne šestka, vytáhneme si eso, atd.). Tato šance odpovídá poměru počtu možností vyhovujících tomuto „zajímavému“ výsledku ku počtu všech možných výsledků pokusu.

Příklad 0.1. Máme balíček karet na Kanastu: celkem 56 karet, z toho čtyři žolíci. Jak často při sejmutí balíčku dostaneme žolíka?

Řešení. Jelikož karet je celkem 56 a žolíci 4, můžeme očekávat, že budeme-li pokus mnohokrát opakovat, žolíka sejmeme přibližně v $\frac{4}{56} = \frac{1}{14}$ případů, tj. zhruba v 7 % případů. $\square$

Zatím jsme o pravděpodobnosti mluvili poněkud neurčitě, nyní pojmy upřesníme.

Definice 0.2 (Náhodné jevy). Předpokládejme, že provádíme pokus, který může dopadnout n **stejně pravděpodobnými** způsoby. Označme Ω **množinu všech možných výsledků** tohoto pokusu, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Množinu Ω nazveme **základní prostor**.

Náhodným jevem budeme rozumět libovolnou podmnožinu množiny Ω . Náhodné jevy budeme zpravidla značit velkými písmeny $(A, B, \dots)$. Speciálně prázdnou množinu $\emptyset$ nazveme jevem **nemožným** a celou množinu Ω jevem **jistým**.

Jednoprvkové podmnožiny, tj. množiny $\{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, n$, nazveme **elementární jevy**.

Definice 0.3 (Klasická pravděpodobnost). **Pravděpodobnost** jevu A označíme $P(A)$ a definujeme ji jako

$$P(A) = \frac{\text{počet možností příznivých jevu } A}{\text{počet všech možností}} = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad (1)$$

kde symbolem $|\cdot|$ značíme počet prvků množiny.

Protože počet příznivých možností nemůže být větší než počet všech možností a počty prvků množin rozhodně nemohou být záporné, pravděpodobnost nemůže být záporná ani přesáhnout jedničku:

Pro pravděpodobnost libovolného náhodného jevu A platí

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Při stanovení počtu možností velmi často pracujeme s různými kombinatorickými pojmy, jako např. variace s opakováním či bez opakování, kombinace, apod. Stručný přehled kombinatoriky najdete ve sbírce příkladů z pravděpodobnosti.

Příklad 0.4. Hodíme dvěma kostkami, bílou a červenou. Určete pravděpodobnosti následujících jevů:

A ... na bílé kostce padne šestka,

B ... součet ok na obou kostkách bude větší než 10,

C ... na bílé kostce padne vyšší číslo než na červené.

Řešení. Při zkoumání pravděpodobnosti jevu A bychom se na červenou kostku nemuseli ohlížet a mohli bychom rovnou říct, že $P(A) = \frac{1}{6}$, protože ze šesti možností, které mohou padnout na bílé kostce, jevu A vyhovuje jediná. Protože však u dalších jevů musíme pracovat s oběma kostkami, zavedeme základní

prostor Ω o 36 prvcích. Jednotlivé prvky budou uspořádané dvojice udávající, co padlo na bílé a co na červené kostce:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}.$$

Náhodné jevy A , B a C jsou pak

$$\begin{aligned} A &= \{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}, & B &= \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \\ C &= \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), \dots, (6, 5)\}. \end{aligned}$$

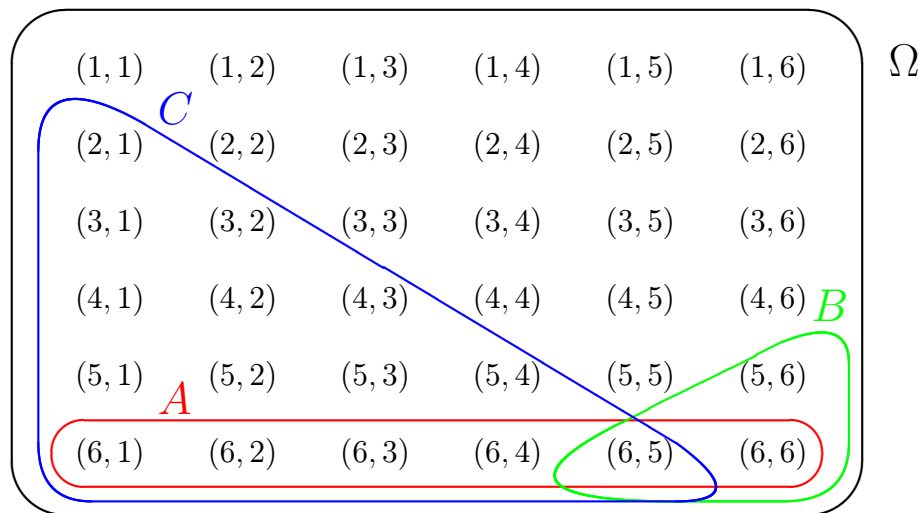
Množiny Ω , A , B a C jsou znázorněny na obrázku 1.

Počty možností odpovídajících jevům A a B jsou na první pohled patrné: $|A| = 6$ a $|B| = 3$. Počet možností vyhovujících jevu C můžeme určit různými způsoby. Z obrázku vidíme, že $|C| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Nebo si můžeme uvědomit, že vyloučíme-li případy, kdy na obou kostkách padlo stejné číslo, tak ze zbývajících 30 případů tvoří ty, kdy je větší číslo na bílé kostce, polovinu, takže opět $|C| = 30/2 = 15$.

Hledané pravděpodobnosti jsou tedy

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \doteq 0,167, \quad P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \doteq 0,083, \quad P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \doteq 0,417.$$

Tyto výsledky můžeme interpretovat tak, že kdybychom mnohokrát hodili dvěma kostkami, jev A by nastal zhruba v 16,7 % případů, jev B zhruba v 8,3 % případů a jev C zhruba v 41,7 % případů. V předchozí větě zdůrazněme slova „mnohokrát“ a „zhruba“, protože rozhodně nemůžeme očekávat s jistotou, že by např. ze 36 pokusů právě třikrát padl součet větší než 10 (i když stát se to samozřejmě může). $\square$

Obr. 1: Základní prostor Ω a jevy A, B, C z příkladu 0.8

Poznámka 0.5. Nyní uvažujme pravděpodobnost jevu B pro dvě nerozlišitelné kostky (např. obě bílé):

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

Bezmyšlenkovitou analogií předchozího postupu získáme špatný výsledek. Nyní má základní prostor jedna

dvacet elementárních prvků a jevu B vyhovují pouze dva elementární jevy tedy $P(B) = 2/21$. Chyba je způsobena nevysloveným předpokladem, že všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné.

Příklad vyřešíme správně použijeme-li obecnější model model pravděpodobnosti než klasická pravděpodobnost.

0.1.1 Diskrétní pravděpodobnost

Další možnou komplikací je, že počet možností může být nekonečný, ovšem můžeme je uspořádat do posloupnosti – v takovém případě mluvíme o spočetné množině (určete pravděpodobnost, že při házení mincí padne poprvé líc v n -tém hození.)

Definice 0.6. Množina Ω se nazývá **spočetná**, jestliže její prvky lze uspořádat do nekonečné posloupnosti, tj.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}.$$

Je-li množina konečná nebo spočetná, nazývá se **nanejvýš spočetná**.

Spočetná množina je tedy taková, že na její prvky si lze jednotlivě „ukazovat“, lze je „počítat“ neboli očíslovat je přirozenými čísly. Příkladem spočetné množiny je množina všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$, množina všech celých čísel, množiny $\{2, 4, 6, \dots\}$, $\{1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots\}$, apod. Příkladem nespočetné množiny je třeba interval $\langle 0, 1 \rangle$ nebo množina všech reálných čísel.

Definice 0.7 (Diskrétní pravděpodobnost). Předpokládejme, že množina všech možných výsledků pokusu Ω je nanejvýš spočetná a jednotlivým elementárním jevům $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ jsou přiřazeny pravděpodobnosti $P(\{\omega_i\}) \geq 0$, které mohou být navzájem různé a které splňují

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1. \quad (2)$$

Pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ pak definujeme jako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}). \quad (3)$$

Klasická pravděpodobnost, definovaná pomocí (1), je speciálním případem diskrétní pravděpodobnosti s tím, že $P(\{\omega_i\}) = 1/n$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Nyní můžeme „vyřešit“ $p(B)$ v modifikaci příkladu 0.8 s nerozlišitelnými kostkami. Základní prostor Ω má základní prostor s 21 elementárními jevy dvou typů $\omega_i = (i, i)$ pro $i = 1, \dots, 6$ a ω_i pro $i = 7, \dots, 21$,

kde $2p(\omega_i) = p(\omega_j)$ pro $i \leq 6, j \geq 7$ což spolu s podmínkou 2 dává jedinou možnost: $\frac{1}{6 + (21 - 6)2}$

$$p(\omega_i) = \frac{1}{36} \text{ pro } i = 1, \dots, 6 \quad p(\omega_i) = \frac{1}{18} \text{ pro } i \geq 6.$$

Potom dostáváme podle (3):

$$p(B) = p((5, 6)) + p((6, 6)) = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Příklad 0.8. Vypočtete pravděpodobnost, že při házení mincí poprvé padne líc při sudém hoďu.

Řešení. Základní prostor $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ je tvořen elementárními jevy ω_n , že poprvé padne líc v n -tém hoďu. K určení pravděpodobnosti $p(\omega_n)$ použijeme klasickou pravděpodobnost. Při n -násobném hoďu mincí dostáváme stejný výsledek jako při současném hození n očíslovanými mincemi. Jev, že na minci s číslem n padne líc a na ostatních rub je pouze jeden z celkově 2^n stejně možných jevů. Tedy platí:

$$p(\omega_n) = \frac{1}{2^n} \quad \text{navíc ověříme podmínku (2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Jev A – poprvé padne líc při sudém hoďu je tvořen:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_{2k}$$

a pravděpodobnost tohoto jevu je podle (1)

$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

□

Příkladem pravděpodobnostního modelu, který může obsahovat i nespočetně mnoho výsledků je geometrická pravděpodobnost.

0.1.2 Geometrická pravděpodobnost

Definice 0.9 (Geometrická pravděpodobnost). Jestliže množina všech výsledků pokusu Ω tvoří oblast v $\mathbb{R}^m$, všechny její prvky jsou stejně pravděpodobné a $\mu(\Omega) < \infty$, pak pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ definujeme jako

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kde symbolem $\mu(\cdot)$ myslíme míru oblasti, tj. pro jednorozměrnou oblast její délku, pro dvourozměrnou obsah a pro třírozměrnou objem.

Příklad 0.10. Honza a Marek chodí venčit své psy na louku před domem. Každý z nich tam přichází někdy mezi osmou a devátou hodinou (každý okamžik příchodu je stejně pravděpodobný) a je na louce 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se Honza s Markem mezi 8. a 9. hodinou setkají?

Řešení. Označme

$8 + x \dots$ čas příchodu Honzy (v hodinách);

$8 + y \dots$ čas příchodu Marka.

Víme, že oba přijdou určitě do devíti hodin, tedy $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Všechny možnosti tak tvoří množinu

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

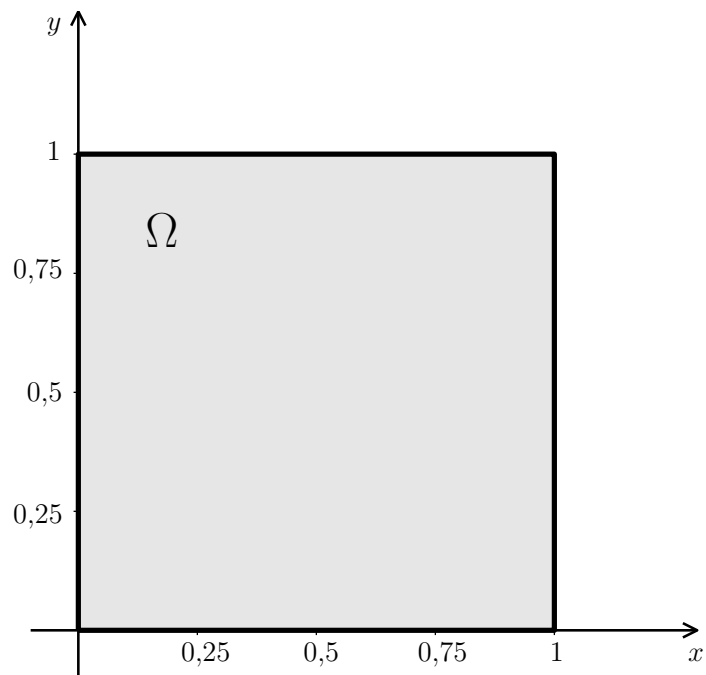
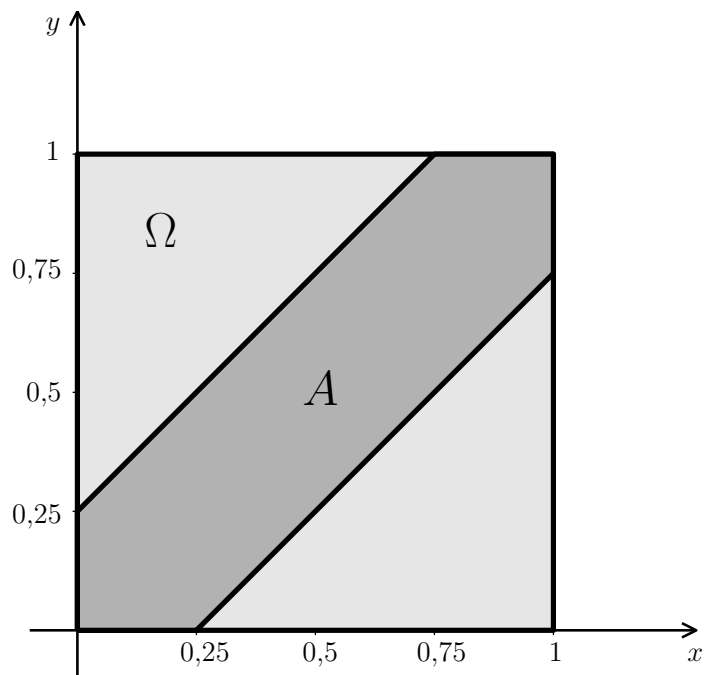
což je čtverec v rovině, viz obrázek 2. Obsah (neboli míra) tohoto čtverce je

$$\mu(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Označme dále jako jev A to, že se Honza a Marek setkají.

Případům příznivým jevu A odpovídají ty příchody (x, y) obou chlapců, ve kterých se x od y liší nanejvýš o 15 minut, což je $1/4$ hodiny. To znamená, že musí platit současně

$$x - \frac{1}{4} \leq y, \quad y \leq x + \frac{1}{4}.$$

Obr. 2: K příkladu 0.10: množina všech výsledků Ω 

Obr. 3: Množina všech příznivých výsledků

Body splňující tyto podmínky jsou na obrázku 3.

Jev A lze tedy vyjádřit jako množinu bodů v rovině:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \leq x + \frac{1}{4}, y \geq x - \frac{1}{4}\}.$$

Obsah (míru) množiny A snadno vypočteme tak, že od celkového obsahu množiny Ω odečteme obsah „zbytku“, který v A neleží. Vidíme, že tato oblast je složená ze dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami o délce $3/4$. Kdybychom tyto trojúhelníky přiložili k sobě, dostaneme čtverec o obsahu $(3/4)^2$. Tedy

$$\mu(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Pravděpodobnost jevu A teď určíme jako podíl míry množiny příznivých případů a míry množiny všech možných případů:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{7}{16}}{1} = \frac{7}{16}.$$

□

0.1.3 Operace s náhodnými jevy

Nyní probereme různé operace, které lze s náhodnými jevy provádět. Jelikož jsme jevy definovali vlastně jako množiny, budou tyto operace splývat s množinovými operacemi a obrázky těchto množin můžeme brát

jako geometrický pravděpodobnostní model.

Jev opačný

U některých náhodných jevů je snazší určit pravděpodobnost, že se takový jev nestane, než počítat pravděpodobnost zkoumaného jevu přímo.

Příklad 0.11. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet ok na obou kostkách bude větší než 4?

Řešení. Označme jev popsáný v zadání jako A . Už víme, že pro hod dvěma kostkami máme 36 možných výsledků. Kdybychom měli probrat všechny možnosti vyhovující A , bylo by to pracné. Jednodušší je vyloučit případy, kdy součet větší než 4 není. Pohledem na obrázek 1 (nebo i z hlavy) zjistíme, že takových možností je celkem 6. Pravděpodobnost jevu A je tedy

$$P(A) = \frac{36 - 6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \doteq 0,833.$$

□

V tomto příkladu jsme využili tzv. opačný jev:

Definice 0.12 (Jev opačný). Opačný jev (nebo též doplněk) k jevu A je jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A . Označíme jej jako $\overline{A}$ a platí

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

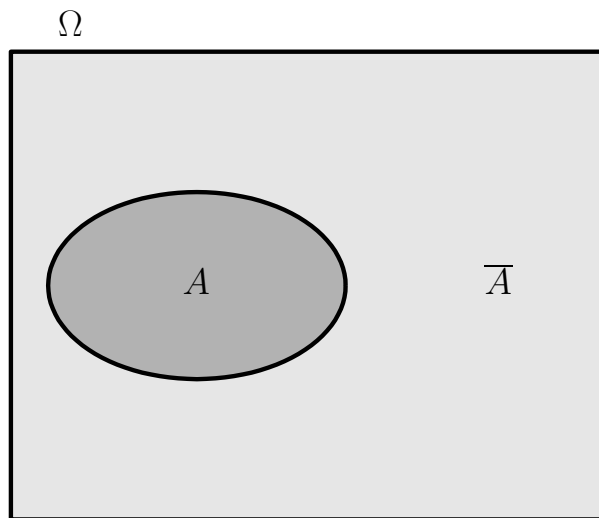
(operace $\setminus$ je množinový rozdíl), viz obrázek 4.

Z příkladu 0.11 už jste mnozí vytušili, jaký bude vztah mezi pravděpodobnostmi jevů A a $\overline{A}$. Nyní tento vztah odvodíme obecně. Využijeme toho, že počet možností nevyhovujících jevu A dostaneme tak, že od počtu všech možností odečteme počet možností jevu A vyhovujících:

$$P(\overline{A}) = \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A).$$

Pro pravděpodobnost jevu opačného k jevu A platí

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \quad (4)$$



Obr. 4: Opačný jev

Průnik jevů

Mnohé jevy jsou zadány několika různými podmínkami, které mají platit zároveň.

Definice 0.13 (Průnik jevů). Průnik jevů A a B je jev, který nastane právě tehdy, když nastanou jevy A a B současně, viz obrázek 5. Označíme jej jako

$$A \cap B.$$

Jestliže jevy A a B současně nastat nemohou, tj. $A \cap B = \emptyset$, pak mluvíme o jevech **neslučitelných** nebo též disjunktních.

Příklad 0.14. Popište průniky jevů A a B a A a C z příkladu 0.8 (hod dvěma kostkami) a určete jejich pravděpodobnosti.

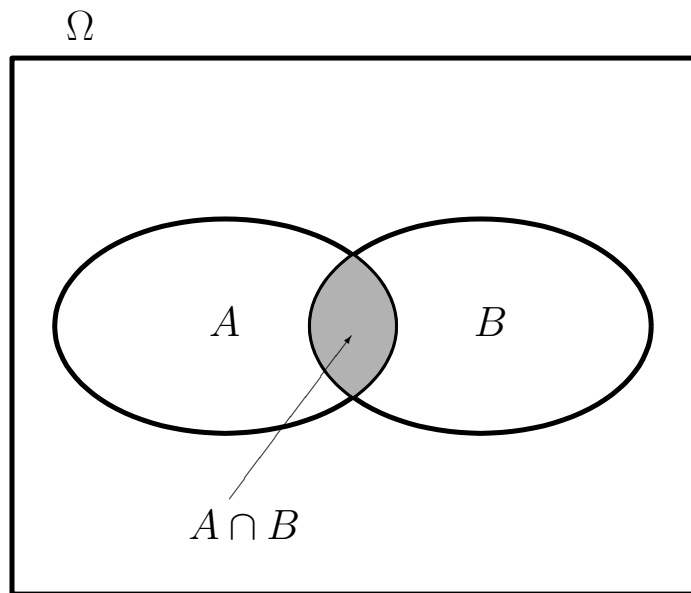
Řešení. Jev $A \cap B$ nastane, jestliže na bílé kostce padne šestka a zároveň bude součet ok větší než 10. Tomu odpovídají dvě možnosti, $A \cap B = \{(6, 5), (6, 6)\}$, a tedy

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \doteq 0,056.$$

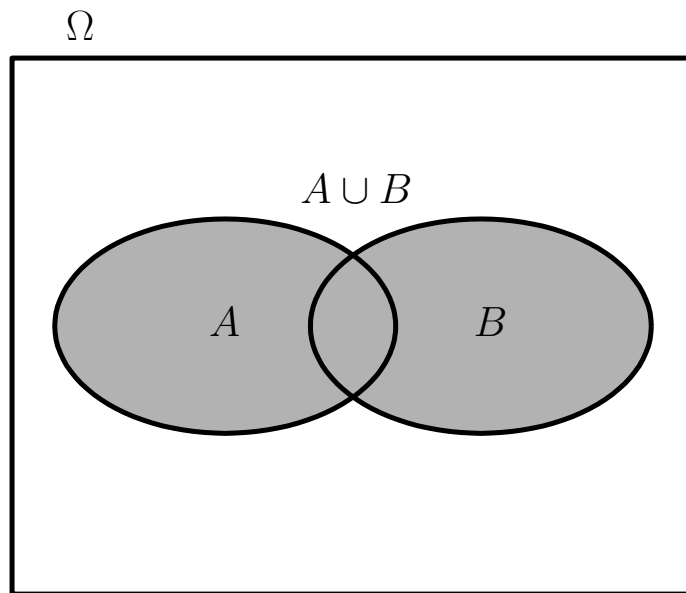
Jev $A \cap C$ nastane, jestliže na bílé kostce padne šestka a zároveň bude na bílé kostce větší číslo než na červené. Takových možností je 5, $A \cap C = \{(6, 1), \dots, (6, 5)\}$, a tedy

$$P(A \cap C) = \frac{5}{36} \doteq 0,139.$$

□



Obr. 5: Průnik jevů



Obr. 6: Sjednocení jevů

Poznámka 0.15. Možná si někteří z vás ze střední školy vybavují vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. V této kapitole jej však zatím do žádného rámečku psát nebudeme, dočkáme se jej až v kapitole ??, kde

vysvětlíme, za jakých podmínek platí. Na tomto místě si povšimněme, že jeho platnost není univerzální – v právě uvedeném příkladu nám vyšlo $P(A \cap B) = 1/18$, zatímco $P(A) \cdot P(B) = (1/6) \cdot (1/12) = 1/72$!

Sjednocení jevů

Definice 0.16 (Sjednocení jevů). Sjednocení jevů A a B je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A a B , viz obrázek 6. Označíme jej jako

$$A \cup B.$$

Příklad 0.17. Popište sjednocení jevů A a B z příkladu 0.8 (hod dvěma kostkami) a určete jeho pravděpodobnost.

Navíc popište sjednocení jevu B s jevem D popsáním podmínkou „součet ok bude roven 10“ a určete pravděpodobnost tohoto sjednocení.

Řešení. Jev $A \cup B$ nastane, jestliže na bílé kostce padne šestka nebo bude součet ok větší než 10 (případně nastanou oba tyto jevy současně). Už víme, že jevu A odpovídá 6 možností, jevu B 3 možnosti, takže by se mohlo zdát, že jevu $A \cup B$ bude odpovídat $6 + 3 = 9$ možností. Z obrázku 1 však vidíme, že jev $A \cup B$ se

skládá ze 7 prvků: $A \cup B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (5, 6)\}$. Kdybychom mechanicky sečetli počty prvků A a B , tak by možnosti, které jsou obsaženy v obou jevech, byly započítány dvakrát. Abychom dostali správný výsledek, musíme jejich počet odečíst. Dohromady máme

$$P(A \cup B) = \frac{6 + 3 - 2}{36} = \frac{7}{36} \doteq 0,194.$$

Jev $B \cup D$ nastane, jestliže součet ok bude větší nebo rovný 10. Tentokrát jevy B a D nemohou nastat současně, takže stačí sečíst možnosti vyhovující jevu B a D (ty jsou 3) a dostáváme, že

$$P(B \cup D) = \frac{3 + 3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \doteq 0,167.$$

□

Zobecníme-li právě provedenou úvahu o počtech prvků dílčích jevů a počtu prvků oběma jevům společným, dostaneme

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pro pravděpodobnost sjednocení jevů A, B platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (5)$$

Jsou-li jevy A a B neslučitelné, tj. nemohou-li nastat současně, pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (6)$$

Maplety

Odkazy na některé maplety:

1. [Kombinatorika – zjištění počtu a výpis všech variací, kombinací, atd.](#)

0.2 Axiomatická definice pravděpodobnosti

V předchozím textu jsme vždy použili samotné slovo „pravděpodobnost“ – „všechny možnosti jsou stejně pravděpodobné...“. Pro intuitivní pochopení pojmu pravděpodobnosti to tak (doufejme) stačilo. V této části předvedeme, jak lze pravděpodobnost definovat formálně přesně, ukážeme si tzv. axiomatickou definici pravděpodobnosti.

Všechny dříve zavedené typy pravděpodobnosti pak budou její zvláštní případy. Nejprve musíme přepracovat definici náhodného jevu.

Definice 0.18 (Jevové pole). Buď $\Omega \neq \emptyset$ a $\mathcal{S}$ systém podmnožin množiny Ω , který má tyto vlastnosti

1. $\Omega \in \mathcal{S}$,
2. jestliže $A \in \mathcal{S}$, pak také $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{S}$,
3. jestliže $A_k \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2, \dots$, pak také $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$.

Pak $\mathcal{S}$ nazveme množinovou σ -algebrou a dvojici $(\Omega, \mathcal{S})$ nazveme jevovým polem.

Množinu $A \subseteq \Omega$ nazveme náhodným jevem, jestliže $A \in \mathcal{S}$.

Dá se ukázat, že z podmínek 1., 2., 3. vyplývá, že s každými dvěma množinami $A, B \in \mathcal{S}$ σ -algebra obsahuje nejen jejich doplňky (viz podmínka 2.), ale i jejich sjednocení, průnik a rozdíl, tj. σ -algebra je systém uzavřený na obvyklé operace s množinami. Z podmínek 1. a 2. také plyne, že každá σ -algebra musí obsahovat prázdnou množinu $\emptyset$.

Definice 0.19 (Axiomatická definice pravděpodobnosti). Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je jevové pole. Pak zobrazení $P: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme pravděpodobností, jestliže splňuje následující tři axiomy:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathcal{S}$,
3. jestliže $A_k \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2, \dots$, jsou navzájem disjunktní jevy, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$.

Pro libovolný náhodný jev A číslo $P(A)$ nazveme pravděpodobností jevu A .

Trojice $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Pravděpodobnost jsme tedy definovali jako funkci, která každé množině ze σ -algebry $\mathcal{S}$ přiřazuje jakousi „velikost“, přičemž „velikost“ celé množiny Ω je rovna jedné.

Jestli vám přijde zvláštní, že v požadavcích na pravděpodobnost není to, že $P(\emptyset) = 0$, tak vězte, že tato očekávaná podmínka vyplývá z axiomů 1. až 3.: Platí $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, a tedy, podle třetího axiomu, $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$. Protože podle prvního axiomu je $P(\Omega) = 1$, předchozí rovnost může být splněna jedině tak, že $P(\emptyset) = 0$.

Sami si rozmyslete, že klasická pravděpodobnost definovaná pomocí (1) s tím, že za jevové pole bereme systém všech podmnožin základního prostoru Ω , splňuje všechny tři axiomy pravděpodobnosti. Stejně tak diskrétní pravděpodobnost definovaná pomocí (3).

Z axiomů pravděpodobnosti se dají odvodit vlastnosti, které jsme v kapitole ?? vydedukovali speciálně pro klasickou pravděpodobnost:

$$\begin{aligned}P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\P(A \cup B) &= P(A) + P(B), \text{ jestliže } A \cap B = \emptyset \\P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\0 &\leq P(A) \leq 1\end{aligned}$$

0.3 Podmíněná pravděpodobnost, závislost a nezávislost náhodných jevů

0.3.1 Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 0.20. Zkoušku dělali studenti dvou oborů: Automatizace a Silnoproud. Ze studentů Automatizace uspělo 80 %, ze studentů Silnoproudu 75 %. Jestliže náhodně vybereme jednoho studenta, jaká je pravděpodobnost, že uspěl?

Řešení. Záleží na tom, ze kterého oboru vybraný student je. Je-li z Automatizace, je odpověď 0,8. Pokud je ze Silnoproudu, pak 0,75. Ale jak to symbolicky zapsat? Označíme-li jako jev A to, že vybraný student je z Automatizace, jako S to, že je ze Silnoproudu, a jako Z to, že udělal zkoušku, pak pravděpodobnost jevu Z za podmínky, že nastal jev A , zapíšeme jako $P(Z|A)$. Tedy $P(Z|A) = 0,8$. Podobně $P(Z|S) = 0,75$ je pravděpodobnost, že student udělal zkoušku, když víme, že je ze Silnoproudu. Jestliže ale nevíme, z jakého oboru student je, pravděpodobnost Z na základě informací ze zadání nejsme schopni určit, záleží na tom, v jakém poměru byly počty studentů obou oborů. $\square$

Pravděpodobnost jevu B za podmínky, že nastal jev A , nazveme **podmíněnou pravděpodobností** a označíme ji

$$P(B|A).$$

0.3.2 Obecná definice podmíněné pravděpodobnosti a nezávislosti náhodných jevů

Zatím jsme podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ počítali úvahou – věděli jsme, že nějaký jev B nastal, tím byl omezen počet všech možností a z nich jsme vybírali ty, které vyhovovaly i jevu A . U axiomatické

definice pravděpodobnosti se nedá mluvit konkrétně o nějakých počtech možností, ale zato máme pravděpodobnost definovanou jako „velikost“ množiny. Proto si můžeme (analogickou úvahou jako v poznámce ??) podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky B představit tak, že zkoumáme, jakou část B tvoří $A \cap B$. Tím se dostáváme k definici podmíněné pravděpodobnosti:

Definice 0.21 (Podmíněná pravděpodobnost). Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in \mathcal{S}$, $P(B) > 0$. Pak číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

nazveme pravděpodobnost jevu A za podmínky B .

Nezávislost jevů jsme zatím také posuzovali podle konkrétního zadání. Z podstaty věci jsme viděli, jestli se nějaké jevy A, B navzájem ovlivňují či nikoli. Ukázali jsme, že u klasické pravděpodobnosti pro nezávislé jevy platí rovnost (??). Tuto rovnost teď použijeme pro definici nezávislosti pro případ, že pracujeme s abstraktním pravděpodobnostním prostorem, kde jevy slovně nijak popsány nejsou.

Definice 0.22 (Nezávislost jevů). Řekneme, že náhodné jevy A, B jsou nezávislé, jestliže

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Příklad 0.23. Víme, že $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ a $P(A \cup B) = 0,7$. Jsou jevy A, B nezávislé?

Řešení. Nejprve určíme pravděpodobnost průniku zadaných jevů:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,7 = 0,3.$$

Vidíme, že

$$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \neq 0,3,$$

takže jevy A, B nezávislé nejsou. □

0.3.3 Úplná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Vraťme se nyní k příkladu 0.20 a doplňme zadání:

Příklad 0.24. Zkoušku dělali studenti dvou oborů: Automatizace a Silnoproud. Studentů Automatizace bylo celkem 60 a uspělo jich 80 %, studentů Silnoproudu bylo 40 a uspělo 75 %. Jestliže náhodně vybereme jednoho studenta, jaká je pravděpodobnost, že uspěl?

Řešení. Použijeme označení jevů A , S a Z z příkladu 0.20. K určení $P(Z)$ musíme spočítat, kolik studentů z celkového počtu 100 uspělo. Vidíme, že to bylo $60 \cdot 0,8 + 40 \cdot 0,75 = 78$. Výsledek je tedy $P(Z) = 0,78$, ale výpočet ještě jednou rozepíšeme, protože se snažíme dojít k obecnějšímu vzorci:

$$P(Z) = \frac{60 \cdot 0,8 + 40 \cdot 0,75}{100} = \frac{60}{100} \cdot 0,8 + \frac{40}{100} \cdot 0,75 = P(A) \cdot P(Z|A) + P(S) \cdot P(Z|S).$$

□

Zobecníme nyní situaci z příkladu 0.24. Předpokládejme, že množinu všech výsledků Ω lze rozepsat jako sjednocení navzájem disjunktních jevů $H_1, \dots, H_n$, tzv. hypotéz. Hypotézami se myslí možné výchozí stavy, v předchozím příkladu by to byly obory, ze kterých student mohl být. Budeme zkoumat pravděpodobnost určitého jevu A , když známe podmíněné pravděpodobnosti při platnosti jednotlivých hypotéz $P(A|H_i)$, $i = 1, \dots, n$. Odvodíme nyní vzorec podobný tomu, který jsme ukázali v příkladu 0.24. Jev A můžeme rozdělit na části, které spadají do jednotlivých hypotéz, viz obrázek 7, tj.

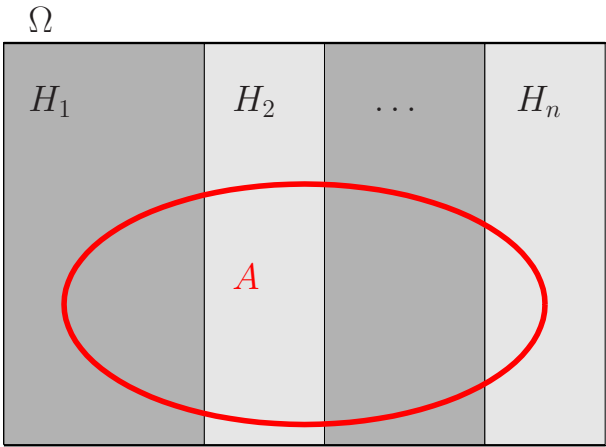
$$A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_n \cap A).$$

Jevy $H_i \cap A$, $i = 1, \dots, n$, jsou navzájem disjunktní, takže pravděpodobnost sjednocení můžeme rozepsat podle (6) jako součet jednotlivých pravděpodobností. Na každý sčítanec pak aplikujeme pravidlo o pravděpodobnosti prů-

niku (??):

$$P(A) = P(H_1 \cap A) + \cdots + P(H_n \cap A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

Shrnutím právě popsaných úvah je věta o úplné pravděpodobnosti.



Obr. 7: Úplná pravděpodobnost

Věta 0.25 (O úplné pravděpodobnosti). *Nechť $H_1, H_2, \dots, H_n$ jsou navzájem disjunktní náhodné jevy (tzv. hypotézy) takové, že $P(H_i) > 0$ pro $i = 1, \dots, n$ a že $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$.*

Pak pro každý náhodný jev A platí

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) \quad (7) \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i). \end{aligned}$$

Závisí-li tedy pravděpodobnost jevu A na tom, která z možných výchozích hypotéz nastala, můžeme ji počítat podle vzorce (7), podobně jako v příkladu 0.24. Někdy jsme postaveni před opačný problém: už víme, jak pokus dopadl, a ptáme se na pravděpodobnost některé z hypotéz.

Příklad 0.26. V situaci z příkladu 0.24 jsme náhodně vybrali jednoho studenta a ten nám radostně oznámil, že zkoušku udělal. Jaká je pravděpodobnost, že je ze Silnoproudu?

Řešení. Řešení je snadné: už víme, že zkoušku udělalo 78 studentů, z čehož ze Silnoproudu jich bylo 30. Tedy pravděpodobnost, že student je ze Silnoproudu, když víme, že zkoušku udělal, je $P(S|Z) = 30/78$. Teď si představme, že nevíme, že studentů je celkem 100, ale pouze to, že z Automatizace jich je 60 % a ze Silnoproudu 40 %. Chceme-li opět vypočítat $P(S|Z)$, stačí určit, jakou část studentů, kteří zkoušku

udělali, tvoří studenti ze Silnoproutu. Z celkového počtu (ať už je jakýkoli) zkoušku udělalo 78 % a těch, kdo jsou ze Silnoproutu a mají zkoušku, je 30 %. Výsledek tedy bude tentýž. Rozepíšeme, jak jsme k němu došli, protože za chvíli situaci zobecníme.

$$P(S|Z) = \frac{P(S \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0,4 \cdot 0,75}{0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,75}.$$

□

Obecně pro výpočet tzv. aposteriorní pravděpodobnosti („aposteriori“ = „po“ provedení kontroly, experimentu, apod.) některé z hypotéz platí:

Věta 0.27 (Bayesův vzorec). *Jestliže $P(A) > 0$, pak pro každé $j = 1, \dots, n$ platí*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}. \quad (8)$$

Vzorec (8) je důsledkem (??), (??) a (7):

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}.$$

Příklad 0.28. Víme, že pravděpodobnost, že Honza na pálce při baseballu dobře odpálí míč, je 0,1. Pravděpodobnost, že kdokoli jiný z jeho týmu dobře odpálí, je rovna 0,3. V jednom týmu je celkem devět hráčů. Z rádia se dovídáme, že Honzův tým je na pálce, a slyšíme: Je to zásah! Jaká je pravděpodobnost, že rozhlasový reportér mluví o Honzovi?

Řešení. Tento příklad je možná trochu složitější než ten předchozí, protože v něm nejsou žádné konkrétní počty kusů. Představa vedoucí k výsledku je tato: Kdyby se „pokus“ ze zadání mnohokrát opakoval (tj. opakovaně bychom náhodně vybrali jednoho hráče, který by odpálil), jakou část případů, kdy byl míč zasažen, by tvořily případy, kdy byl na pálce Honza? Neboli: jakou část pravděpodobnosti, že míč bude zasažen, tvoří pravděpodobnost, že míč bude zasažen Honzou? Každopádně musíme určit pravděpodobnost, že míč bude zasažen. Použijeme k tomu vzorec pro úplnou pravděpodobnost (7).

Označme jevy H_1 ... Honza je na pálce, H_2 ... někdo jiný z Honzova týmu je na pálce. Tyto dva jevy tvoří disjunktní pokrytí, protože vyčerpávají všechny situace, které nás zajímají, a přitom nemohou nastat současně. Dále A ... Honzův tým zasáhl míč.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{1}{9} \cdot 0,1 + \frac{8}{9} \cdot 0,3.$$

Naším úkolem je zjistit $P(H_1|A)$, k tomu použijeme (8):

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 0,1}{\frac{1}{9} \cdot 0,1 + \frac{8}{9} \cdot 0,3} = 0,04.$$

□

0.4 Náhodné veličiny

Procesů, kde nás zajímá číselný výsledek, je celá řada. Můžeme např. sledovat životnost výrobku, počet přístupů na počítačový server, atd.

Náhodná veličina (nebo též náhodná proměnná) je veličina X , jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.

Je to funkce, která prvkům množiny Ω přiřazuje reálná čísla,

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Náhodné veličiny budeme značit **velkými písmeny**, nejčastěji X .

Příklad 0.29. Hodíme dvěma mincemi. Náhodná veličina X udává, kolikrát padl líc.

Množina Ω všech možných výsledků pokusu má 4 prvky,

$$\Omega = \{RR, RL, LR, LL\},$$

kde R znamená rub a L líc. Náhodná veličina X jednotlivým možnostem přiřazuje číselné hodnoty:

$$X(RR) = 0, \quad X(RL) = 1, \quad X(LR) = 1, \quad X(LL) = 2.$$

Náhodný jev, který by byl slovně popsán „líc padl právě jednou“, lze nyní vyjádřit pomocí náhodné veličiny X jako $[X = 1]$. Podobně jev „líc padl aspoň jednou“ se pomocí X zapíše jako $[X \geq 1]$.

Obecně zápisem $[X = x]$ rozumíme náhodný jev složený ze všech $\omega \in \Omega$, pro která je $X(\omega) = x$, tedy $[X = x] = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\}$, analogicky $[X < x] = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}$, apod. Jak asi tušíte, hlavním cílem bude počítat pro náhodné veličiny různé pravděpodobnosti. Abychom se vyhnuli nadměrnému množství závorek, nebudeme psát např. $P([X = 1])$, ale pouze $P(X = 1)$, atd.

Zápis $P(X = x)$ čteme: „Pravděpodobnost, že náhodná veličina velké X nabude hodnoty malé x .“

Podobně pro $P(X < x)$, $P(X \geq x)$, atd.

Příklad 0.30. Pro náhodnou veličinu X z příkladu 0.29 platí

$$P(X = 1) = \frac{2}{4} = 0,5, \quad P(X \leq 1) = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Základní typy náhodných veličin

Náhodné veličiny lze rozdělit velmi podobně jako číselné statistické znaky, o kterých jsme mluvili v kapitole ???. Některé mohou nabývat pouze konečně mnoha hodnot, typickým příkladem jsou počty prvků

s určitou vlastností. Jiné se mohou rovnat čemukoli z nějakého intervalu, příkladem by byla již zmíněná životnost výrobku.

Nejdůležitější typy náhodných veličin jsou:

- **diskrétní** – mohou nabývat pouze hodnot z určité konečné nebo spočetné množiny
- **spojité** – mohou nabývat kterékoli hodnoty z určitého intervalu

Metody různých výpočtů se budou lišit podle toho, jakého typu zkoumaná náhodná veličina bude.

0.4.1 Diskrétní náhodné veličiny

Definice 0.31 (Diskrétní náhodná veličina). Náhodná veličina X se nazývá diskrétní, jestliže její obor hodnot je nanejvýš spočetná množina. To znamená, že X se buď může rovnat jen konečně mnoha hodnotám, nebo sice nekonečně mnoha hodnotám, ale tyto hodnoty lze seřadit do posloupnosti.

Hodnoty, kterých diskrétní náhodná veličina může nabývat, označíme $x_1, x_2, \dots$ a jejich počet označíme n , přičemž n může být i ∞ .

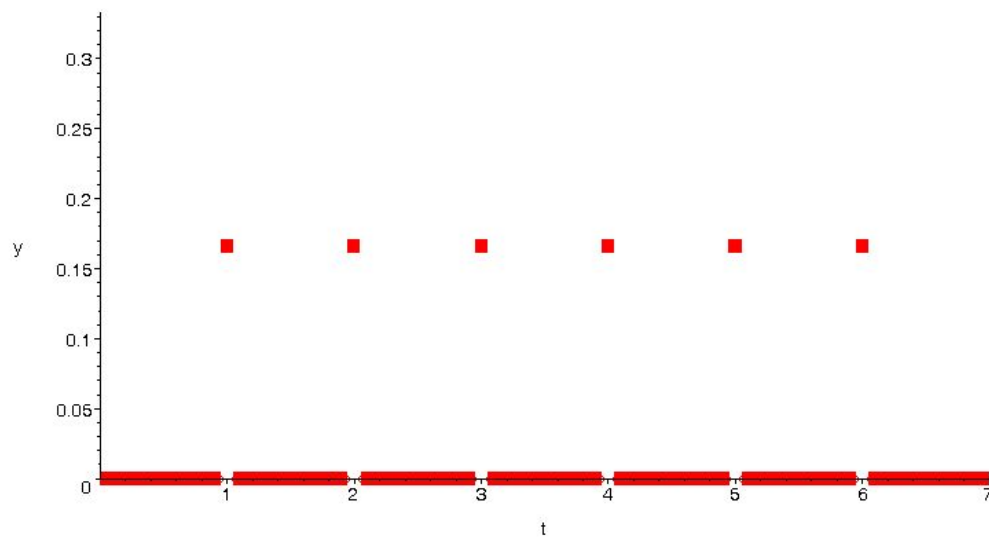
Definice 0.32 (Pravděpodobnostní funkce). Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X je funkce $p: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, která je definována jako

Vztah (9) čteme: „Hodnota funkce malé p v bodě malé x je rovna pravděpodobnosti, že náhodná veličina velké X se bude rovnat malému x .“ Poznamenejme, že platí $\sum_i p(x_i) = 1$.

Řešení. Náhodná veličina X může nabývat pouze hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Užitím klasické pravděpodobnosti dostáváme, že hodnota $p(i) = 1/6$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ještě si uvědomme, že pro jakoukoli hodnotu $x \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je $p(x) = 0$. Hodnoty pravděpodobnostní funkce můžeme zapsat do tabulky:

[illegible]

Graf pravděpodobnostní funkce je na obrázku 8.



Obr. 8: Graf pravděpodobnostní funkce z příkladu 0.33

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2.$$



Kromě pravděpodobnostní funkce se k popisu náhodných veličin používá distribuční funkce.

Definice 0.34 (Distribuční funkce). Distribuční funkce náhodné veličiny X je funkce $F: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, která je definována jako

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (10)$$

Vztah (10) čteme: „Hodnota funkce F v bodě malé x je rovna pravděpodobnosti, že náhodná veličina velké X nabude hodnoty menší nebo rovné malému x , tj. hodnoty z intervalu $(-\infty, x]$.“ Definice 0.34 platí univerzálně pro všechny náhodné veličiny, nejen pro ty diskrétní. Zdůrazněme, že písmeno F v označení funkce je velké. Funkci označenou malým f budeme používat u spojitých náhodných veličin a bude mít jiný význam.

Poznámka 0.35. Někdy se používá také definice $F(x) = P(X < x)$, tj. s ostrou nerovností. Tuto definici lze nalézt i ve starších skriptech pro FEKT a FIT i ve starší verzi sbírky z pravděpodobnosti. A proto pozor: když budete zkoumat nějaký příklad ze starší verze sbírky, resp. ze starších zadání písemek, může se stát, že předváděné řešení nebude v souladu s definicí (10). My se však striktně budeme držet definice s nerovností neostrou!

Příklad 0.36. Najděte distribuční funkci náhodné veličiny z příkladu 0.33.

Řešení. Nejprve najdeme hodnoty distribuční funkce v bodech z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a potom se podíváme, jak se distribuční funkce chová jinde.

Hodnota distribuční funkce v bodě $x = 1$ je:

$$F(x) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = p(1) = \frac{1}{6}.$$

Hodnota v bodě $x = 2$ je:

$$P(X \leq 2) = F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = p(0) + p(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Podobně pokračujeme dál. Při výpočtu vždy můžeme využít hodnotu funkce F v předchozím bodě:

$$F(3) = P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) = F(2) + p(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = F(3) + p(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = F(4) + p(5) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

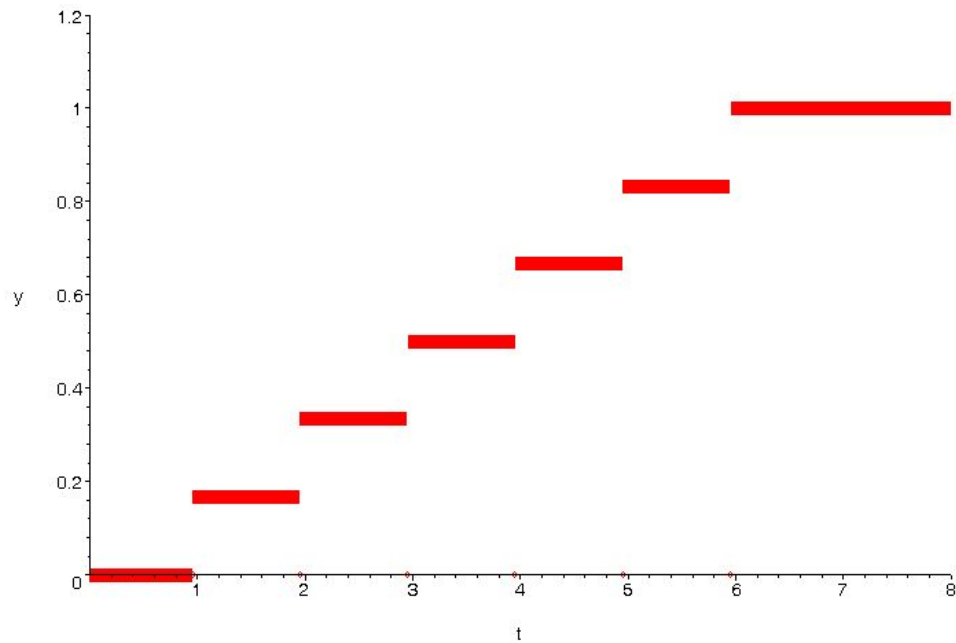
$$F(6) = P(X \leq 5) = F(5) + p(6) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Na rozdíl od pravděpodobnostní funkce distribuční funkce v jiných než tabulkových bodech není nulová. V našem příkladu je $F(x)$ rovno nule pro všechna $x < 1$. Dosadíme-li do F jakékoli číslo větší než 6, dostaneme jedničku. Ještě zbývají hodnoty, které leží mezi tabulkovými body. Dosadíme-li např. do F nějaké $x \in (2, 3)$, řekněme $x = 2,5$, dostaneme $F(2,5) = P(X \leq 2,5)$. Počet ok je menší nebo roven 2,5, jestliže nabývá některé z hodnot 1, 2, takže $F(2,5)$ je stejná jako $F(2)$. Podobně např. $F(3,1) = F(3)$, atd. Dohromady dostáváme

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ \frac{1}{3} & \text{pro } x \in \langle 2, 3 \rangle, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle, \\ \frac{2}{3} & \text{pro } x \in \langle 4, 5 \rangle, \\ \frac{5}{6} & \text{pro } x \in \langle 5, 6 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 6, \infty \rangle. \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 8.

□

Obr. 9: Graf distribuční funkce z příkladu [0.36](#)

Vlastnosti distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

1. $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
2. Graf funkce F má schodovitý tvar: je po částech konstantní, schody jsou v bodech x_i a jejich výšky jsou hodnoty pravděpodobnostní funkce $p(x_i)$, tj.

$$p(x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x).$$

Jsou-li hodnoty x_i , $i = 1, \dots, n$ seřazené vzestupně podle velikosti, tj. $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, lze poslední vztah (možná srozumitelněji) zapsat jako

$$p(x_1) = F(x_1), \quad p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ pro } i = 2, 3, \dots$$

Z definice distribuční funkce coby „kumulativní“ pravděpodobnosti vyplývají další vlastnosti, které platí univerzálně, tj. nejen pro diskrétní náhodné veličiny.

Vlastnosti distribuční funkce jakékoli náhodné veličiny

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
2. F je neklesající, tj. když $a < b$, pak $F(a) \leq F(b)$,
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
4. $P(X > a) = 1 - F(a)$ pro každé $a \in \mathbb{R}$,
5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
6. F je zprava spojitá, tj. $\lim_{t \rightarrow x^+} F(t) = F(x)$.

Střední hodnota

Definice 0.37 (Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny). Střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny X označíme EX (jiná používaná značení: $E(X)$, $\mu(X)$, μ) a definujeme ji vztahem

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i). \quad (11)$$

Příklad 0.38. Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X z příkladu 0.33.

Řešení.

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Při mnoha hodech kostkou tedy lze očekávat, že průměrná hodnota počtu hozených ok bude někde kolem 3,5. □

Vlastnosti střední hodnoty

1. Jestliže X a Y jsou náhodné veličiny, pak

$$E(X \pm Y) = EX \pm EY. \tag{12}$$

2. Jestliže X je náhodná veličina a $c \in \mathbb{R}$, pak

$$E(cX) = cEX. \tag{13}$$

3. Jestliže X a Y jsou náhodné veličiny a $a, b, c \in \mathbb{R}$, pak

$$E(a + bX + cY) = a + bEX + cEY.$$

4. Jestliže X a Y jsou **nezávislé** náhodné veličiny, pak

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Rozptyl

Definice 0.39 (Rozptyl a směrodatná odchylka diskrétní náhodné veličiny). Rozptyl náhodné veličiny X je

$$DX = E(X - EX)^2. \quad (14)$$

Používá se též termín disperze nebo variance a jiná označení jsou $V(X), \sigma^2$. Směrodatná odchylka σ je odmocnina z rozptylu:

$$\sigma = \sqrt{DX}.$$

U diskrétních náhodných veličin rozptyl počítáme jako

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 \cdot p(x_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i) \right) - (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2. \quad (15)$$

Příklad 0.40. Vypočtěte rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X z příkladu 0.33.

Řešení. Pro výpočet rozptylu potřebujeme znát střední hodnotu EX . Tu už jsme spočítali v příkladu 0.33, $EX = 3,5$. Rozptyl je tedy

$$DX = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{49}{4}\right)^2 \doteq 2,197.$$

Směrodatná odchylka je $\sigma \doteq \sqrt{2,197} \doteq 1,708$.

□

Podobně jako pro rozptyl statistického znaku (viz (??), (??)) platí pro rozptyl náhodné veličiny:

Vlastnosti rozptylu

1. $DX \geq 0$

2. Jestliže $a \in \mathbb{R}$, pak

$$D(a + X) = DX.$$

3. Jestliže $a \in \mathbb{R}$, pak

$$D(aX) = a^2 DX. \tag{16}$$

4. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$D(a + bX) = a + b^2 DX.$$

5. Jestliže X a Y jsou **nezávislé** náhodné veličiny, pak

$$D(X \pm Y) = DX + DY. \tag{17}$$

0.4.3 Významná diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

Některá rozdělení pravděpodobnosti se často opakují v různých reálných situacích, a proto si zasloužila vlastní názvy. Pro taková rozdělení známe jejich vlastnosti – pravděpodobnostní funkci, střední hodnotu a rozptyl, případně i další charakteristiky. Statistické softwary mívají pro práci s těmito rozděleními speciální funkce. Při řešení praktických problémů pak stačí rozeznat typ rozdělení a dosadit do příslušných vzorců.

Alternativní rozdělení

Nejjednodušší rozdělení je tzv. alternativní – náhodná veličina nabývá hodnoty 0 nebo 1 podle toho, zda se pokus podařil nebo nepodařil. Taková náhodná veličina by sama o sobě moc zajímavá nebyla, ale používá se pro odvození složitějších vztahů.

Příklad 0.41. Střelec vystřelí do terče, pravděpodobnost zásahu je 0,8. Náhodná veličina X udává, jestli trefil: položíme $X = 1$, jestliže ano, a $X = 0$, jestliže ne. Najděte pravděpodobnostní funkci, vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .

Řešení. Pravděpodobnostní funkce je

x	0	1	jinak
$p(x)$	0,2	0,8	0

Střední hodnota je $EX = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,8 = 0,8$ a rozptyl je

$$DX = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,8 - 0,8^2 = 0,8 \cdot (1 - 0,8) = 0,16.$$

□

Jestliže právě uvedený příklad zobecníme – nebude řeč zrovna o střelení a pravděpodobnost úspěchu nebude konkrétně 0,8, nýbrž nějaké $p \in (0, 1)$, pak bude příslušná náhodná veličina popsána takto:

Provádíme pokus, u kterého úspěch nastane s pravděpodobností p a neúspěch s pravděpodobností $1 - p$. Náhodná veličina X , která udává, zda úspěch nastal ($X = 1$), nebo nenastal ($X = 0$), má **alternativní rozdělení** pravděpodobnosti, píšeme

$$X \sim A(p).$$

Pravděpodobnostní funkce: $p(0) = 1 - p$, $p(1) = p$,
střední hodnota $EX = p$, rozptyl $DX = p(1 - p)$.

Binomické rozdělení

Uvažujme experiment takové povahy, že mohou nastat jen dva různé výsledky, které se navzájem vylučují (nemůže k nim dojít současně): „úspěch“ a „neúspěch“ („úspěch“ nemusí znamenat nic světoborného; označuje se tímto termínem proto, že se jedná o ten ze dvou možných výsledků, na který se ve svých úvahách chceme zaměřit). Pravděpodobnost úspěchu je p , pravděpodobnost neúspěchu $1 - p$. Tento pokus n -krát nezávisle zopakujeme. Slovo „nezávisle“ znamená, že výskyt úspěchu při jednom opakování experimentu nemá vliv na to, zda při druhém a dalších opakováních nastane úspěch nebo ne. Za této situace

budeme počítat, kolikrát v celkovém počtu n pokusů nastal úspěch. Náhodná veličina X udávající počet úspěchů v n nezávislých pokusech má tzv. binomické rozdělení pravděpodobnosti, což budeme zapisovat jako $X \sim Bi(n, p)$.

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad EX = n \cdot p \quad DX = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Dobrý modelový příklad pro tuto situaci je opakované házení kostkou:

Příklad 0.42. Házeme čtyřikrát kostkou. Náhodná veličina X udává, kolikrát přitom padne šestka. Najděte pravděpodobnost jevu A , že šestka padne alespoň dvakrát a určete její střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny.

Řešení. Pravděpodobnost, že při jednom hodu padne šestka, je $p = 1/6$, a pravděpodobnost, že šestka nepadne, je $1 - 1/6 = 5/6$. Hody jsou navzájem nezávislé. Jedná se o $Bi(1/6, 4)$ tedy

$$p(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{1296} \quad p(4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} \quad P(A) = p(3) + p(4) = \frac{21}{1296}$$

$$EX = 4 \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad DX = 4 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$

□

0.4.4 Spojité náhodné veličiny

Nyní se budeme věnovat spojitým náhodným veličinám, tedy takovým, které mohou nabývat nespočetně mnoha hodnot. Spojitou náhodnou veličinou může být např.:

- životnost baterie,
- naměřená hodnota napětí v síti,
- délka časového intervalu mezi dvěma přístupy na server.

U diskrétních náhodných veličin jsme pravděpodobnost, že náhodná veličina X padne do určitého intervalu, počítali pomocí součtu hodnot pravděpodobnostní funkce. Např. u náhodné veličiny z příkladu 0.42 (počet šestek ve čtyřech hodech) by $P(2 \leq X \leq 4)$ byla $p(2) + p(3) + p(4)$. U spojitých náhodných veličin pro výpočet $P(a < X < b)$ také musíme projít všechny možnosti, které do zadaného intervalu spadají. Protože je těchto možností nespočetně mnoho, se sumou už zde nevystačíme.

Definice 0.43 (Spojitá náhodná veličina). Náhodná veličina X se nazývá spojitá, jestliže existuje nezáporná funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro každé $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$, platí

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (18)$$

Funkce f se nazývá **hustota** pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

Podobně jako součet všech hodnot pravděpodobnostní funkce musel být roven 1, i zde platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (19)$$

neboli obsah plochy mezi grafem hustoty a osou x musí být roven 1.

Kromě hustoty je pro práci se spojitými náhodnými veličinami mimořádně užitečná **distribuční funkce**. Tato funkce definovaná jako

$$F(x) = P(X \leq x).$$

U diskrétních náhodných veličin jsme při výpočtu hodnoty distribuční funkce v daném bodě x sčítali hodnoty pravděpodobnostní funkce, teď budeme místo toho integrovat:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Odtud plyne, že známe-li distribuční funkci F , pak hustotu f vypočteme jako její derivaci.

Vztah distribuční funkce s hustotou u spojitě náhodné veličiny

Distribuční funkci F vypočteme pomocí hustoty f jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad (20)$$

zatímco hustota f se z distribuční funkce F spočítá jako

$$f(x) = F'(x). \quad (21)$$

V bodech, kde $F'(x)$ není definována, můžeme $f(x)$ zvolit libovolně.

Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny je spojitá.

Příklad 0.44. Je dán kruh o poloměru r_0 . Určete hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny X , která udává vzdálenost náhodně vybraného bodu od středu kruhu, přičemž pravděpodobnost vybrání libovolného bodu nezávisí na jeho poloze uvnitř kruhu. Určete pravděpodobnost jevu A , že bod padne do mezikruží, které vznikne z daného kruhu vybráním kruhu se středem ve středu daného kruhu o poloměru $r_0/2$.

Řešení. Nejdříve určíme distribuční funkci $F(x) = P(X \leq x)$ pro $x \in \langle 0, r_0 \rangle$, čemuž užijeme geometrickou

pravděpodobnost:

$$P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi r_0^2} = \frac{x^2}{r_0^2}.$$

Poznamenejme, že $F(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, r_0 \rangle$. Hustotu potom získáme jako derivaci pro $x \in \langle 0, r_0 \rangle$

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{r_0^2} \right)' = \frac{2x}{r_0^2}$$

a $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, r_0 \rangle$. Pravděpodobnost jevu A můžeme určit pomocí integrálu:

$$P(A) = \int_{r_0/2}^{r_0} \frac{2x}{r_0^2} dx = \frac{3}{4}.$$

Druhou možností je přímé užití distribuční funkce $P(A) = P(r_0/2 \leq X \leq r_0) = F(r_0) - F(r_0/2) = 3/4$. $\square$

Poslední použitý obrat můžeme považovat za podstatný důvod užívání distribuční funkce

Pro spojitou náhodnou veličinu X platí, že pro každé $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (22)$$

Střední hodnota a rozptyl spojité náhodné veličiny

Střední hodnota a rozptyl spojité náhodné veličiny X se vypočítají jako

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (23)$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (EX)^2. \quad (24)$$

Příklad 0.45. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny z příkladu 0.44.

Řešení. Zopakujme, že hustota náhodné veličiny X z předchozího příkladu je $f(x) = \frac{2x}{r_0^2}$. Střední hodnota

EX je podle vztahu (23)

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{r_0} x \cdot \frac{2x}{r_0^2} dx + \int_{r_0}^{\infty} x \cdot 0 dx = \left[\frac{2}{3r_0^2} x^3 \right]_0^{r_0} = \frac{2r_0}{3}.$$

Rozptyl je podle (24) roven

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (EX)^2 = \int_0^{r_0} x^2 \cdot \frac{2x}{r_0^2} dx - (EX)^2 = \left[\frac{2}{4r_0^2} x^4 \right]_0^{r_0} - \left(\frac{2r_0}{3} \right)^2 = \frac{r_0^2}{2} - \frac{4r_0^2}{9} = \frac{r_0^2}{18}.$$

□

0.4.5 Normální rozdělení

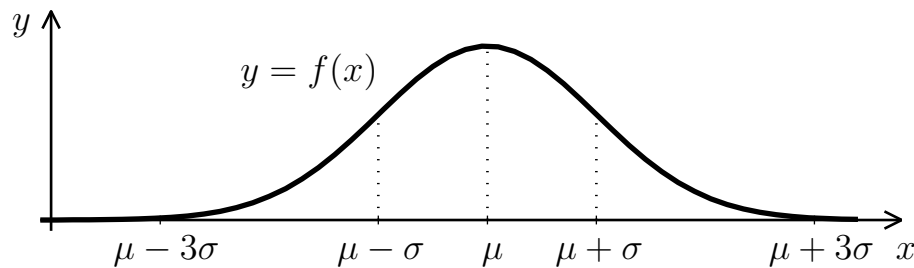
Normální (nebo též Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti je nejvýznamnější ze všech pravděpodobnostních rozdělení. Jeho hustota má tvar tzv. Gaussovy křivky (viz obrázek 10). Normálním rozdělením lze popsat např. veličiny, jejichž hodnoty jsou ovlivněny velkým množstvím nepatrných navzájem nezávislých faktorů. Představme si např. automatizovanou výrobu nějakých součástek. Výsledný tvar by měl být u všech součástek víceméně stejný, je však ovlivněn mnoha vlivy. Další důležitá oblast, kde se normální rozdělení používá, je zpracování chyb vzniklých při měření, střelba atd. Důležitost normálního rozdělení spočívá také v tom, že pomocí něj lze aproximovat řadu dalších rozdělení.

Náhodná veličina X s normálním rozdělením se střední hodnotou $EX = \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$) a rozptylem $DX = \sigma^2$ ($\sigma > 0$) má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Zapisujeme

$$X \sim No(\mu, \sigma^2).$$



Obr. 10: Graf hustoty normálního rozdělení

Graf hustoty normálního rozdělení je souměrný kolem střední hodnoty μ , kde funkce též nabývá svého

maxima. V bodech $x = \mu \pm \sigma$ jsou inflexní body (funkce se mění z konvexní v konkávní, resp. naopak). Funkce f je kladná pro všechna reálná x , avšak mimo rozmezí $\mu \pm 3\sigma$ už graf s osou x téměř splývá (tzv. pravidlo tří sigma. Při praktických výpočtech budeme pracovat s tzv. standardizovaným normálním rozdělením.

Normální rozdělení s parametry $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ se nazývá standardizované (nebo též normované) normální rozdělení. Náhodnou veličinu s tímto rozdělením budeme značit $U \sim No(0, 1)$. Hustota náhodné veličiny U je

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Distribuční funkci náhodné veličiny U označíme Φ ,

$$\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Funkci $\Phi(u)$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, avšak statistické počítačové programy (i některé kalkulačky) s ní umí pracovat. Navíc jsou hodnoty funkce Φ tabelovány.

Transformovaná náhodná veličina $(X - \mu)/\sigma$ má standardizované normální rozdělení $U \sim No(0, 1)$.

Jestliže X je náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , $X \sim No(\mu, \sigma^2)$, pak transformací

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (27)$$

získáme náhodnou veličinu se standardizovaným normálním rozdělením $U \sim No(0, 1)$. Výpočty pravděpodobností pro X pak provádíme pomocí distribuční funkce náhodné veličiny U :

$$P(X < b) = P\left(U < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) \quad (28)$$

$$P(X > a) = P\left(U > \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (29)$$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < U < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (30)$$

Příklad 0.46. Náhodná veličina X udávající spotřebu barvy na 100 m^2 natírané plochy má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 9$ litrů a rozptylem $\sigma^2 = 0,16$, $X \sim No(9; 0,16)$. S jakou pravděpodobností

bude spotřeba barvy

- a) větší než 9,5 litru,
- b) v intervalu 8,6 až 9,3 litru,
- c) v intervalu $\langle \mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma \rangle$?
- d) Pod jakou hranicí leží spotřeba barvy s pravděpodobností 0,99?

Řešení. Protože $X \sim No(9; 0,16)$, použijeme transformaci (27) ve tvaru

$$\frac{X - 9}{\sqrt{0,16}} = \frac{X - 9}{0,4} = U.$$

Pozor na jmenovatel zlomku. Je v něm směrodatná odchylka σ , nikoli rozptyl σ^2 . Části a), b) a c) nyní budeme počítat pomocí vztahů (28)–(30) a (?), hodnoty funkce Φ vždy najdeme v tabulkách 2 a 3:

- a) $P(X > 9,5) = P\left(U > \frac{9,5-9}{0,4}\right) = P(U > 1,25) = 1 - \Phi(1,25) \doteq 1 - 0,894 = 0,106$ Vypočítali jsme obsah vyšrafované plochy na obrázku 11.
- b) $P(8,6 \leq X \leq 9,3) = P\left(\frac{8,6-9}{0,4} \leq U \leq \frac{9,3-9}{0,4}\right) = P(-1 \leq U \leq 0,75) =$
 $= \Phi(0,75) - \Phi(-1) = \Phi(0,75) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(0,75) - 1 + \Phi(1) \doteq 0,774 - 1 + 0,841 = 0,615$ Vypočítali jsme obsah šedě vybarvené plochy na obrázku 11.

c) Zde nebudeme dosazovat konkrétní hodnoty μ a σ , výpočet provedeme obecně:

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= P\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \leq U \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(-3 \leq U \leq 3) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 \doteq 0,997. \end{aligned}$$

U normálního rozdělení naprostá většina hodnot (99,7%) leží v intervalu $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$ (= tzv. pravidlo tří sigma, viz též obrázek 10).

d) Hledáme x , pro které platí $P(X < x) = 0,99$, viz obrázek 12. Musíme tedy postupovat zpětně. Kdybychom x znali, vypočítali bychom k němu příslušné $u = (x - 9)/0,4$ a platilo by

$$P(X < x) = P(U < u) = \Phi(u) = 0,99.$$

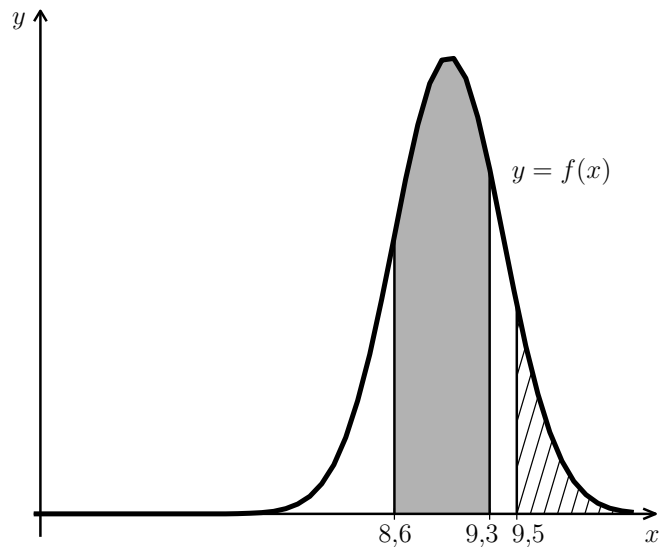
Najdeme u , pro které je $\Phi(u) = 0,99$. Pohledem do tabulky zjistíme, že je to přibližně $u \doteq 2,33$. Takže

$$\frac{x - 9}{0,4} \doteq 2,33 \quad \Rightarrow \quad x \doteq 2,33 \cdot 0,4 + 9 = 9,932 \text{ litru}$$

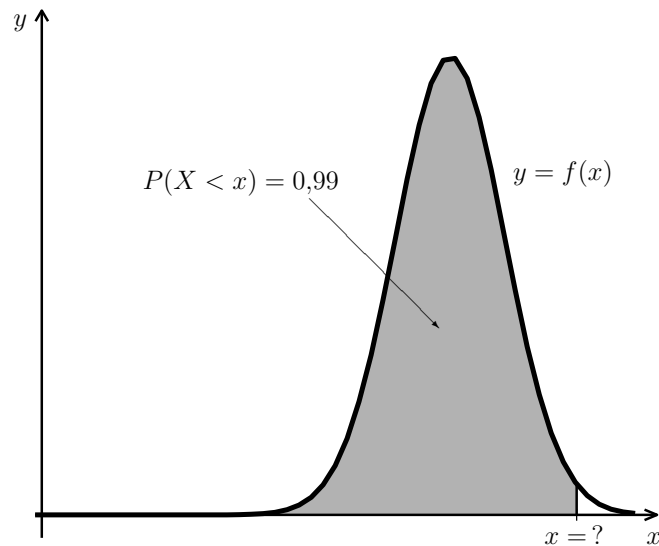
□

0.4.6 Centrální limitní věta

Už jsme řekli, že normální rozdělení dobře popisuje veličiny, jejichž výsledná hodnota vzniká působením mnoha nezávislých vlivů. Nyní toto tvrzení formulujeme přesněji. Předpokládejme, že máme n navzájem



Obr. 11: K příkladu 0.46, část a) (šrafovaná plocha) a b) (šedá plocha)



Obr. 12: K příkladu 0.46, část d)

nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n$, které mají všechny stejné rozdělení (libovolné, ne nutně normální) se střední hodnotou $EX_i = \mu$ a rozptylem $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$. Budeme zkoumat součet a

průměr všech těchto veličin

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{a} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Podle pravidel pro počítání se střední hodnotou a rozptylem (viz (12)–(17); zdůrazněme, že X_i jsou nezávislé) máme

$$EY = n\mu, \quad DY = n\sigma^2, \quad E\bar{X} = \mu, \quad D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ukazuje se, že pro vzrůstající n se rozdělení náhodných veličin Y a $\bar{X}$ přibližuje normálnímu rozdělení se střední hodnotou $\mu_Y = n\mu$, resp. $\mu_{\bar{X}} = \mu$ a rozptylem $\sigma_Y^2 = n\sigma^2$, resp. $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n$ neboli rozdělení transformovaných náhodných veličin

$$\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

se přibližuje standardizovanému normálnímu rozdělení $No(0, 1)$. A to je právě obsahem tzv. centrální limitní věty.

Věta 0.47 (Lindenberg-Lévyho). Jestliže $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou $EX_i = \mu$ a rozptylem $DX_i = \sigma^2$, pak pro součet a průměr těchto náhodných veličin

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad a \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq u\right) &= \Phi(u) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq u\right) &= \Phi(u) \end{aligned}$$

pro každé $u \in \mathbb{R}$.

Jinými slovy, pro dostatečně velké n (za přijatelné se považuje $n > 30$) je

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq u\right) \doteq \Phi(u), \quad kde \quad u = \frac{y - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \\ P(\bar{X} \leq x) &= P\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq u\right) \doteq \Phi(u), \quad kde \quad u = \sqrt{n} \cdot \frac{x - \mu}{\sigma}. \end{aligned}$$

0.4.7 Aproximace binomického rozdělení pomocí normálního rozdělení

Vrátíme se nyní k jednomu z významných diskrétních rozdělení – binomickému. Nalistujeme-li zpět obrázky ??–??, vidíme, že jejich tvar poněkud připomíná Gaussovu křivku. Binomické rozdělení lze skutečně přibližně nahradit (aproximovat) rozdělením normálním, a to tím lépe, čím je počet pokusů n větší. Připomeňme, že střední hodnota a rozptyl binomického rozdělení pravděpodobnosti jsou

$$EX = np, \quad DX = np(1 - p).$$

Věta 0.48 (Moivre-Laplaceova). *Nechť náhodná veličina X udává počet úspěchů v sérii n nezávislých pokusů, kde v jednom pokusu úspěch nastává s pravděpodobností $p \in (0, 1)$, tj. $X \sim Bi(n, p)$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x) = \Phi \left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \right).$$

Příklad 0.49. Firma vyrábí balíčky ořechů po 200ks, přičemž $3/4$ oříšků jsou burské a $1/4$ lískové, dokonale se promíchají, a pak se teprve sypou do balíčků. Jestliže koupíme jeden balíček ořechů, jaká je pravděpodobnost, že počet lískových ořechů je v intervalu $\langle 47, 56 \rangle$?

Řešení. Náhodná veličina X udávající počet lískových ořechů v jednom balíčku má rozdělení $Bi(200; 0,25)$. Přímý výpočet

$$\begin{aligned} P(47 \leq X \leq 56) &= P(X = 47) + P(X = 48) + \cdots + P(X = 56) = \\ &= \binom{200}{47} 0,25^{47} 0,75^{153} + \binom{200}{48} 0,25^{48} 0,75^{152} + \cdots + \binom{200}{56} 0,25^{56} 0,75^{144} \doteq 0,572 \end{aligned}$$

byl proveden pomocí vhodného matematického softwaru, „ručně“ bychom k tomuto výsledku došli jen těžko.

Nyní výpočet zopakujeme pomocí náhrady binomického rozdělení normálním rozdělením. Nejprve najdeme střední hodnotu a rozptyl:

$$EX = \mu = 200 \cdot 0,25 = 50, \quad DX = \sigma^2 = 200 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 37,5.$$

Teď počítáme stejně, jako kdyby X mělo normální rozdělení:

$$\begin{aligned} P(47 \leq X \leq 56) &\doteq P\left(\frac{47 - 50}{\sqrt{37,5}} \leq U \leq \frac{56 - 50}{\sqrt{37,5}}\right) \doteq \Phi(0,98) - \Phi(-0,49) = \\ &= \Phi(0,98) - (1 - \Phi(0,49)) \doteq 0,524. \end{aligned}$$

Je vidět, že chyba od přesného výsledku je v řádu procent (druhé desetinné místo). Pokud bychom použili korekci (viz následující příklad ??), dostali bychom výsledek $P(46,5 \leq X \leq 56,5) \doteq 0,569$, jehož odchylka od přesného výsledku je v řádu desetin procenta (třetí desetinné místo). $\square$

Tab. 1: Hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$ - 1.část.

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,5000000	0,17	0,5674949	0,34	0,6330717	0,51	0,6949743	0,68	0,7517478
0,01	0,5039894	0,18	0,5714237	0,35	0,6368307	0,52	0,6984682	0,69	0,7549029
0,02	0,5079783	0,19	0,5753454	0,36	0,6405764	0,53	0,7019440	0,70	0,7580363
0,03	0,5119665	0,20	0,5792597	0,37	0,6443088	0,54	0,7054015	0,71	0,7611479
0,04	0,5159534	0,21	0,5831662	0,38	0,6480273	0,55	0,7088403	0,72	0,7642375
0,05	0,5199388	0,22	0,5870604	0,39	0,6517317	0,56	0,7122603	0,73	0,7673049
0,06	0,5239222	0,23	0,5909541	0,40	0,6554217	0,57	0,7156612	0,74	0,7703500
0,07	0,5279032	0,24	0,5948349	0,41	0,6590970	0,58	0,7190427	0,75	0,7733726
0,08	0,5318814	0,25	0,5987063	0,42	0,6627573	0,59	0,7224047	0,76	0,7763727
0,09	0,5358564	0,26	0,6025681	0,43	0,6664022	0,60	0,7257469	0,77	0,7793501
0,10	0,5398278	0,27	0,6064199	0,44	0,6700314	0,61	0,7290691	0,78	0,7823046
0,11	0,5437953	0,28	0,6102612	0,45	0,6736448	0,62	0,7323711	0,79	0,7852361
0,12	0,5477584	0,29	0,6140919	0,46	0,6772419	0,63	0,7356527	0,80	0,7881446
0,13	0,5517168	0,30	0,6179114	0,47	0,6808225	0,64	0,7389137	0,81	0,7910299
0,14	0,5556700	0,31	0,6217195	0,48	0,6843863	0,65	0,7421539	0,82	0,7938919
0,15	0,5596177	0,32	0,6255158	0,49	0,6879331	0,66	0,7453731	0,83	0,7967306
0,16	0,5635595	0,33	0,6293000	0,50	0,6914625	0,67	0,7485711	0,84	0,7995458

Tab. 2: Hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$ - 2.část.

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,85	0,8023375	1,02	0,8461358	1,19	0,8829768	1,36	0,9130850	1,53	0,9369916
0,86	0,8051055	1,03	0,8484950	1,20	0,8849303	1,37	0,9146565	1,54	0,9382198
0,87	0,8078498	1,04	0,8508300	1,21	0,8868606	1,38	0,9162067	1,55	0,9394392
0,88	0,8105703	1,05	0,8531409	1,22	0,8887676	1,39	0,9177356	1,56	0,9406201
0,89	0,8132671	1,06	0,8554277	1,23	0,8906514	1,40	0,9192433	1,57	0,9417924
0,90	0,8159399	1,07	0,8576903	1,24	0,8925123	1,41	0,9207302	1,58	0,9429466
0,91	0,8185887	1,08	0,8599289	1,25	0,8943502	1,42	0,9221962	1,59	0,9440826
0,92	0,8212136	1,09	0,8621434	1,26	0,8961653	1,43	0,9236415	1,60	0,9452007
0,93	0,8238145	1,10	0,8643339	1,27	0,8979577	1,44	0,9250663	1,61	0,9463011
0,94	0,8263912	1,11	0,8665005	1,28	0,8997274	1,45	0,9264707	1,62	0,9473839
0,95	0,8289439	1,12	0,8686431	1,29	0,9014747	1,46	0,9278550	1,63	0,9484493
0,96	0,8314724	1,13	0,8707619	1,30	0,9031995	1,47	0,9292191	1,64	0,9494974
0,97	0,8339768	1,14	0,8728568	1,31	0,9049021	1,48	0,9305634	1,65	0,9505285
0,98	0,8364569	1,15	0,8749281	1,32	0,9065825	1,49	0,9318879	1,66	0,9515428
0,99	0,8389129	1,16	0,8769756	1,33	0,9082409	1,50	0,9331928	1,67	0,9525403
1,00	0,8413447	1,17	0,8789995	1,34	0,9098773	1,51	0,9344783	1,68	0,9535213
1,01	0,8437524	1,18	0,8809999	1,35	0,9114920	1,52	0,9357445	1,69	0,9544860

Tab. 3: Hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$ - 3.část.

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,70	0,9554345	1,87	0,9692581	2,04	0,9793248	2,21	0,9864474	2,38	0,9913437	2,55	0,9946139
1,71	0,9563671	1,88	0,9699460	2,05	0,9798178	2,22	0,9867906	2,39	0,9915758	2,56	0,9947664
1,72	0,9572838	1,89	0,9706210	2,06	0,9803007	2,23	0,9871263	2,40	0,9918025	2,57	0,9949151
1,73	0,9581849	1,90	0,9712834	2,07	0,9807738	2,24	0,9874545	2,41	0,9920237	2,58	0,9950600
1,74	0,9590705	1,91	0,9719334	2,08	0,9812372	2,25	0,9877755	2,42	0,9922397	2,59	0,9952012
1,75	0,9599408	1,92	0,9725711	2,09	0,9816911	2,26	0,9880894	2,43	0,9924506	2,60	0,9953388
1,76	0,9607961	1,93	0,9731966	2,10	0,9821356	2,27	0,9883962	2,44	0,9926564	2,70	0,9965330
1,77	0,9616364	1,94	0,9738102	2,11	0,9825708	2,28	0,9886962	2,45	0,9928572	2,80	0,9974449
1,78	0,9624620	1,95	0,9744119	2,12	0,9829970	2,29	0,9889893	2,46	0,9930531	2,90	0,9981342
1,79	0,9632730	1,96	0,9750021	2,13	0,9834142	2,30	0,9892759	2,47	0,9932443	3,00	0,9986501
1,80	0,9640697	1,97	0,9755808	2,14	0,9838226	2,31	0,9895559	2,48	0,9934309	3,20	0,9993129
1,81	0,9648521	1,98	0,9761482	2,15	0,9842224	2,32	0,9898296	2,49	0,9936128	3,40	0,9996631
1,82	0,9656205	1,99	0,9767045	2,16	0,9846137	2,33	0,9900969	2,50	0,9937903	3,60	0,9998409
1,83	0,9663750	2,00	0,9772499	2,17	0,9849966	2,34	0,9903581	2,51	0,9939634	3,80	0,9999277
1,84	0,9671159	2,01	0,9777844	2,18	0,9853713	2,35	0,9906133	2,52	0,9941323	4,00	0,9999683
1,85	0,9678432	2,02	0,9783083	2,19	0,9857379	2,36	0,9908625	2,53	0,9942969	4,50	0,9999966
1,86	0,9685572	2,03	0,9788217	2,20	0,9860966	2,37	0,9911060	2,54	0,9944574	5,00	0,9999997