

0.1 $\mathcal{Z}$ transformace

Rovnice popisující vlastnosti diferenčních systémů můžeme řešit analogicky jako ve se spojitým případě pomocí transformace. Touto transformací je $\mathcal{Z}$ transformace.

Definice 0.1. Nechť je dána posloupnost čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Jestliže existuje alespoň jedno komplexní číslo $0 \neq z \neq \infty$ takové, že funkční řada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \quad (1)$$

konverguje, potom řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $\mathcal{Z}$ transformovatelná neboli **přípustná**. Její součet $F(z)$ je komplexní regulární funkce definovaná v okolí bodu ∞ a nazýváme ji **obrazem posloupnosti** $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{Z}\{f_n\}$ nebo též $F(z) \leftrightarrow \{f_n\}$. Toto přiřazení je jediné a nazýváme jej **$\mathcal{Z}$ -transformací**.

V dalším textu budeme pro jednoduchost indexování posloupnosti vynechávat, tj. symbolem $\{f_n\}$ budeme rozumět vždy posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Poznamenejme, že často bývá posloupnost zapisována pouze pomocí n -tého členu f_n , resp. posloupnosti funkčních hodnot $f(n)$. Abychom vymezili množinu přípustných posloupností zavedeme pojem index růstu posloupnosti.

Definice 0.2. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je **ohraňčeného růstu s indexem** s , jestliže existují konstanty M, s takové, že

$$|f_n| \leq M e^{sn} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}_0.$$

Věta 0.3. Platí, že posloupnost $\{f_n\}$ je $\mathcal{Z}$ transformovatelná, právě když je ohraničeného růstu s indexem s , kde s je vhodné číslo.

Příklad 0.4. Snadno vidíme, že posloupnost $\{\alpha^n\}$ je ohraničeného růstu s indexem $\ln |a|$, pro libovolné komplexní a . Její obraz nalezneme pomocí součtu geometrické řady.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Obdrželi jsme výsledek ve tvaru

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n\} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Než uvedeme větu, která přehledně shrne základní vlastnosti $\mathcal{Z}$ transformace, zavedeme některé důležité pojmy analogické s pojmy vyskytujícími se ve formulaci podobných vět pro transformace integrální. Důležitým pojmem je konvoluce.

Definice 0.5. Konvolucí $\{f_n * g_n\}$ posloupností $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ nazýváme posloupnost, pro jejíž členy platí vztah

$$f_n * g_n = \sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i.$$

Příklad 0.6. Spočtěme konvoluci několika jednoduchých posloupností

$\{f_n\}$	$\{g_n\}$	$\{f_n * g_n\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\sum_{i=0}^n 1 = \{n+1\}$
$\{1\}$	$\{n\}$	$\sum_{i=0}^n i = \{\frac{n}{2}(n+1)\}$
$\{1\}$	$\{f_n\}$	$\{\sum_{i=0}^n f_i\} = \{s_n\}$ posl. část. součtů
$\{n\}$	$\{f_n\}$	$\{\sum_{i=0}^n (n-i)f_i\} = n(f_n * 1) - (nf_n) * 1$

Poznamenejme, že jsou-li obě posloupnosti přípustné je i jejich konvoluce přípustná posloupnost. Navíc je konvoluce posloupností operací, která je komutativní, distributivní a asociativní.

Definice 0.7. Nechť k je přirozené číslo. O posloupnosti $\{g_n\} = \{f_{n+k}\}$ řekneme, že vznikla z posloupnosti $\{f_n\}$ posunutím o k míst vlevo, jestliže pro její členy g_n platí

$$g_n = f_{n+k} \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O posloupnosti $\{h_n\} = \{f_{n-k}\}$ řekneme, že vznikla z posloupnosti $\{f_n\}$ posunutím o k míst vpravo, jestliže pro její členy h_n platí

$$h_n = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 0, 1, \dots, k-1; \\ f_{n-k}, & \text{pro } n = k, k+1, \dots \end{cases}$$

Další důležitou operací je vytvoření posloupnosti diferencí k dané posloupnosti.

Definice 0.8. Nechť je zadaná posloupnost $\{f_n\}$ potom výraz $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ nazýváme **první diferencí** a $\{\Delta f_n\}$ **posloupností diferencí**. Diference vyšších řádů definujeme rekurentně pomocí první difference

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$$

a výraz $\Delta^k f_n$ nazýváme **k -tou diferencí** a $\{\Delta^k f_n\}$ **posloupností k -tých diferencí**.

Příklad 0.9. Spočtěme všechny difference posloupnosti $f_n = n^2$.

$$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad f_n = n^2 \quad \text{zadaná posloupnost,}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \Delta f_n = 2n + 1 \quad \text{posloupnost prvních diferencí,}$$

$$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\} \quad \Delta^2 f_n = 2 \quad \text{posloupnost druhých diferencí,}$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad \Delta^k f_n = 0 \quad \text{posloupnost } k\text{-tých diferencí, kde } k > 2.$$

Věta 0.10. Předpokládejme, že posloupnosti $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jsou ohraničeného růstu nebo-li jsou obě přípustné. Označme $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ a $G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$, navíc dále předpokládáme, že $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ jsou konstanty. Potom platí

Věta o	Předmět	Obraz
	poznámka	
<i>linearitě</i>	$a\{f_n\} + b\{g_n\}$	$aF(z) + bG(z)$
<i>podobnosti</i>	$\{a^n f_n\}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
<i>posunutí vpravo</i>	$\{f_{n-k}\}$	$z^{-k}F(z)$
	posloupnost $\{f_{n-k}\}$ je doplněna nulami	
<i>posunutí</i>	$\{f_{n+k}\}$	$z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n} \right]$

<i>Věta o</i>	<i>Předmět</i>	<i>Obraz</i>
	<i>poznámka</i>	
<i>derivaci obrazu</i>	$\{nf_n\}$	$-zF'(z)$
<i>integraci obrazu</i>	$\left\{\frac{f_n}{n}\right\}$	$\int_z^\infty \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$
	<i>musí platit $f_0 = 0$, tj. $\{f_n/n\} = \{0, f_1, f_2/2, \dots\}$</i>	
<i>konvoluci předmětu</i>	$\{f_n * g_n\}$	$F(z)G(z)$
<i>diferenci</i>	$\{\Delta^k f_n\}$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-i} \cdot \Delta^i f_0$
	<i>posloupnost Δ^k je také přípustná, $\Delta^0 f_n = f_n$</i>	
<i>částečném součtu</i>	$\{s_n\} = \left\{\sum_{i=0}^n f_i\right\}$	$\frac{z}{z-1}F(z)$
	<i>posloupnost $\{s_n\}$ je také přípustná</i>	

Na místo provádění důkazů procvičíme použití jednotlivých vět při hledání obrazů přípustných posloupností.

Příklad 0.11. Pomocí výsledku v Příkladu 0.4 a věty o linearitě můžeme odvodit s využitím Eulerovy identity následující výsledky.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\sin \alpha n\} &= \frac{\mathcal{Z}\{e^{j\alpha n}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\alpha n}\}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\alpha}} - \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Analogicky dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\cos \alpha n\} &= \frac{\mathcal{Z}\{e^{j\alpha n}\} + \mathcal{Z}\{e^{-j\alpha n}\}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\alpha}} + \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{(z - \cos \alpha) z}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Dále označme $\{a_n\} = \{1\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{c_n\} = \{j^n\}$, $\{d_n\} = \{(-j)^n\}$, potom platí

posloupnost	kombinace	obraz
$\{e_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$	$\{e_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} + \{b_n\})$	$E(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}$
$\{f_n\} = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$	$\{f_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} - \{b_n\})$	$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$
$\{g_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{g_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} + \{d_n\})$	$G(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$
$\{h_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{h_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} - \{d_n\})$	$H(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$
$\{1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots\}$	$\frac{1}{4}(\{a_n\} + \{b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^4}{z^4 + 1}$

Příklad 0.12. Na výsledcích předchozího příkladu je možné demonstrovat použití vět o posunutí vpravo i vlevo. Platí vztahy mezi posloupnostmi $\{e_{n-1}\} = \{f_n\} = \{e_{n+1}\}$, pro jejich obrazy současně také platí:

$$z^{-1}E(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1} = F(z) = z \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} - 1 \right) = z(E(z) - 1)$$

Příklad 0.13. Pomocí věty o derivování obrazu ($\{nf_n\} \leftrightarrow -zF'(z)$) postupně určete obrazy posloupností $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{n^3\}$.

Řešení. $\mathcal{Z}\{n\} = -z(\mathcal{Z}\{1\})' = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = -z\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Analogicky dostaneme obraz posloupností $\{n^2\}$, $\{n^3\}$:

$$\mathcal{Z}\{n^2\} = -z(\mathcal{Z}\{n\})' = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -z\frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}, \quad (2)$$

$$\mathcal{Z}\{n^3\} = -z(\mathcal{Z}\{n^2\})' = -z\left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3}\right)' = z\frac{z^2+1+4z}{(z-1)^4} = \frac{z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4}. \quad (3)$$

□

V následujícím příkladě nalezneme obraz jedné posloupnosti třemi způsoby s využitím různých vět.

Příklad 0.14. Nalezněte obraz posloupnosti $\left\{\binom{n+1}{2}\right\}$

Řešení. 1. Využijeme výsledků Příkladu 0.13 $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$ a $\mathcal{Z}\{n^2\} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$. Součtem obrazů

obou posloupností a jeho dělením 2, neboť $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$, dostáváme:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right) = \frac{z^2 - z + z^2 + z}{2(z-1)^3} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

2. Využijeme skutečnosti $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \{1\} * \{n\}$ (viz Příklad 0.6) a věty o obrazu konvoluce ($\{f_n * g_n\} \leftrightarrow F(z)G(z)$):

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

3. Třetí možností je využít známé skutečnosti $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ a užitím věty částečných součtech:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

□

V následujícím příkladě použijeme větu o integraci obrazu.

Příklad 0.15. Nalezněte obraz posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, 1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$.

Řešení. Tuto posloupnost můžeme také zapsat jako posloupnost $\{f_n/n\}$, kde je posloupnost $\{f_n\} = \{0, 1, -1, \dots\}$. Ve větě o integrálu obrazu položíme $\{f_n\} = \{0, 1, -1, 1, \dots\}$ a její obraz můžeme získat jako součet geometrické řady:

$$\mathcal{Z}\{0, 1, -1, 1, \dots\} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}.$$

Integraci racionálně lomené funkce $F(\zeta)/\zeta$ provedeme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} &= \int_z^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta+1)} = \int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta+1}\right) d\zeta = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} [\text{Ln } \zeta - \\ &\quad \text{Ln}(\zeta+1)]_z^{\zeta_0} = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \left(\text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0+1} - \text{Ln} \frac{z}{z+1}\right) = -\text{Ln} \frac{z}{z+1} = \text{Ln} \left(1 + \frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

kde Ln je hlavní větev logaritmu a navíc platí:

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0+1} = \text{Ln} \lim_{\frac{1}{\zeta_0} \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\zeta_0}} = \text{Ln } 1 = 0.$$

□

Věta 0.16. *Necht $\{f_n\}$ je přípustná tj. $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$. Jestliže níže uvedené limity existují, potom platí:*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0 \quad \text{počáteční hodnota} \quad (4)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{koncová hodnota} \quad (6)$$

Užitečnost těchto limitních vztahů je mimo jiné dána u vztahu (4) možností nahradit předpoklad $f_0 = 0$ předpokladem na funkci $F(\infty) = 0$. Vztah (5) nám umožní využít předchozí ukázky k určení součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{z \rightarrow 1} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \ln 2.$$

0.1.1 Souvislost $\mathcal{Z}$ a Laplaceovy transformace

Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}$ je přípustná. Uvažujme zobecněnou funkci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n)$$

Vypočteme Laplaceův obraz této zobecněné funkce:

$$\mathcal{L} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}.$$

Tento vztah se nazývá diskrétní Laplaceova transformace a substitucí $e^p = z$ dostáváme obraz $\mathcal{Z}$ transformace posloupnosti $\{f_n\}$.

0.1.2 Zpětná $\mathcal{Z}$ transformace

Tímto pojmem rozumíme nalezení vhodné posloupnosti $\{f_n\}$, která má funkci $F(z)$ za svůj obraz při $\mathcal{Z}$ transformaci. Každá funkce komplexní proměnné $F(z)$, která je v okolí bodu ∞ holomorfní, je obrazem vhodné posloupnosti $\{f_n\}$, to jest $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$, což také zapisujeme:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \{f_n\}. \quad (7)$$

Protože členy této posloupnosti jsou koeficienty Laurentova rozvoje je toto zobrazení jednoznačné a navíc pro ně platí integrální vzorec:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z) z^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

kde C_ρ je kružnice se středem v počátku o dostatečně velkém poloměru takovém, že všechny případné singularity leží uvnitř této kružnice. Tento postup je poměrně náročný.

Poznámka 1. Při hledání vzoru $\mathcal{Z}$ transformace můžeme využít všech vlastností $\mathcal{Z}$ transformace, které jsou přehledně shrnuty ve Větě 0.10. V následujícím paragrafu, věnovanému hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci, to bude linearita zpětné transformace $\mathcal{Z}^{-1}$, která plyne z linearit $\mathcal{Z}$ transformace.

Situace se výrazně zjednoduší při hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci.

0.1.3 Předmět k racionální funkci

Je-li obrazem $\mathcal{Z}$ transformace racionálně lomená funkce, lze předmět nalézt poměrně jednoduše několika možnostmi.

1. Rozkladem na parciální zlomky: $\frac{1}{(z - z_0)^k}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a z_0 je konečné komplexní číslo. Přesněji řečeno pro racionální funkci, která není ryzí, je vyjádření ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků. Pro parciální zlomek kde $k = 1$ snadno získáme

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \quad (9)$$

Rozvoj parciálních zlomků $(z - z_0)^{-k}$, kde $2 \leq k \in \mathbb{N}$ můžeme odvodit z rozvoje (9), jestliže jej $k - 1$ krát derivujeme. Situaci přesně popisuje následující věta.

Věta 0.17. *Je-li $z_0 \neq 0$ platí*

$$\frac{1}{(z - z_0)^k} = \frac{1}{z^k} + \binom{k}{k-1} \frac{z_0}{z^{k+1}} + \cdots + \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} + \cdots, \quad (10)$$

což dává předpis pro hledanou posloupnost

$$f_n = 0 \text{ pro } n < k \text{ a } f_{k+n} = \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} \text{ pro } k \leq n.$$

Poznamenejme, že uvedená věta platí i pro $k = 1$ a pravá strana rovnice (10) je jenom složitěji zapsaná pravá strana (9). Podobně případný předpoklad $z_0 \neq 0$ není nutný, ale pro $z_0 = 0$ je parciální zlomek přímo Laurentovým rozvojem.

Celkově můžeme postup hledání předmětu $\mathcal{Z}$ transformace k racionální funkci shrnout do jediné věty. Racionálně lomenou funkci vyjádříme ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků a z linearity $\mathcal{Z}$ transformace získáme předmět jako součet předmětů jednotlivých parciálních zlomků podle známých vzorců. Uvedený postup předvedeme na příkladech.

Příklad 0.18. Nalezněte předmět $\mathcal{Z}$ transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

Řešení. Rozklad racionální funkce má tvar

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{(z + 1)^2}.$$

Podle vztahu (9) dostáváme

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots$$

a podle vztahu (10)

$$\frac{2}{(z + 1)^2} = \frac{2}{z^2} + \frac{2\binom{2}{1}(-1)}{z^3} + \cdots + \frac{2\binom{n}{n-1}(-1)^{n-2}}{z^{n+1}} + \cdots$$

a předmět původní racionální funkce je ve tvaru součtu jednotlivých předmětů

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2 + 1}{z^2} + \cdots + \frac{1 + 2(n - 1)(-1)^n}{z^n}.$$

Zápis předmětu $\mathcal{Z}$ transformace k dané funkci lze realizovat i takto

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n - 1)(-1)^n\},$$

kde δ_{0n} je tzv. Kroneckerův symbol.

□

2. Pomocí reziduí: Je-li funkce $F(z)$ racionálně lomená má konečný počet singularit z_k , které jsou póly nebo odstranitelné singularity a výše uvedený integrál můžeme vyčíslit pomocí reziduí

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z) z^{n-1} dz = \sum_{z_k} \operatorname{rez}_{z=z_k} F(z) z^{n-1}. \quad (11)$$

Postup budeme ilustrovat na stejném zadání.

Příklad 0.19. Nalezněte předmět $\mathcal{Z}$ transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}$$

Řešení. Výpočet členů posloupnosti $\{f_n\}$ musíme provést dvěma způsoby, neboť funkce obsažená v integrálu $\int_{C_\rho} F(z) z^{n-1} dz$ má pro $n > 0$ pouze dva póly $z = 1$ (prvního řádu) a $z = -1$ (druhého řádu). Členy vzoru $\{f_n\}$ k této funkci pro $n > 0$ vyjádříme jako součet

$$f_n = \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z + 1)^2(z - 1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z + 1)^2(z - 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z - 1)} \right)' + \frac{4 \cdot 1^n}{(1 + 1)^2} \\
&= \lim_{z=-1} \frac{z^{n-2}(nz^3 + (3n - 5)z^2 + (2 - 5n)z + n - 1)}{(z - 1)^2} + 1 \\
&= (2n - 1)(-1)^n + 1
\end{aligned}$$

Pro f_0 platí výpočet

$$\begin{aligned}
f_0 &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z + 1)^2(z - 1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z + 1)^2(z - 1)} + \operatorname{rez}_{z=0} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z + 1)^2(z - 1)} = \\
&\quad \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z - 1)} \right)' + \frac{4}{(1 + 1)^2 \cdot 1} + \frac{-1}{-1} = \\
&\quad \lim_{z=-1} -\frac{5z^2 - 2z + 1}{(z - 1)^2 z^2} + 1 - 1 = -\frac{8}{(-2)^2(-1)^2} + 2 = 0
\end{aligned}$$

Celkově dostáváme předmět $\mathcal{Z}$ transformace k dané funkci ve stejném tvaru

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n - 1)(-1)^n\}.$$

□

3. Přímou z definice: Vyjdeme-li ze vztahu (1), je možné získat člen f_n také tak, že daný vztah vynásobíme z^{n-1} a n -krát derivujeme. Získáme tak řadu, která začíná výrazem $(-1)^n f_n n! z^{-n-1}$ neboť z umocněné na nezáporné celé mocnitele derivováním zmizely. Vynásobíme-li nyní řadu z^n a provedeme limitní přechod $z \rightarrow \infty$ dostaneme vzorec

$$f_n = (-1)^n \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)].$$

Přestože, odvození tohoto vzorce je jednoduché, jeho užití komplikuje nutnost určit n -tou derivaci racionálně lomené funkce, což je vhodné realizovat ve tvaru rozkladu této funkce ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků. Nebudeme proto uvádět příklad výpočtu pomocí tohoto v literatuře [8] uváděného vzorce. Místo toho uvedeme další možnost

4. Dělení polynomu polynomem: Tento postup nám umožní v mnohých případech určit vzor jak je dokumentováno v následujícím příkladu

Příklad 0.20. Nalezněte předmět $\mathcal{Z}$ transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

Řešení. $(z^2 + 4z - 1) : (z^3 + z^2 - z - 1) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} - \frac{7}{z^5} + \frac{11}{z^6}$

□

$$\begin{array}{r}
 z^2 \quad +z \quad -1 \quad -\frac{1}{z} \\
 \hline
 3z \qquad \qquad +\frac{1}{z} \\
 3z \quad +3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 \hline
 -3 \quad +\frac{4}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 -3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \quad +\frac{3}{z^3} \\
 \hline
 \frac{7}{z} \qquad \qquad -\frac{3}{z^3} \\
 \frac{7}{z} \quad +\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad -\frac{7}{z^4} \\
 \hline
 -\frac{7}{z^2} \quad +\frac{4}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \\
 -\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \quad +\frac{7}{z^5} \\
 \hline
 \frac{11}{z^3} \qquad \qquad -\frac{7}{z^5}
 \end{array}$$

Poznamenejme, že při ilustrování různých možností byl úmyslně volen tentýž příklad, aby měl čtenář možnost vzájemným porovnáním zvolit metodu, která mu vyhovuje. Další určování předmětů $\mathcal{Z}$ transformace bude dílčí úlohou při využití $\mathcal{Z}$ transformace. V textu jsou uvedeny dvě možnosti užití $\mathcal{Z}$ transformace. První je k řešení diferenční nebo rekurentních rovnic a druhá možnost je k určování konečných součtů.

0.1.4 Řešení diferenčních a rekurentních rovnic

S diferenčními a rekurentními rovnicemi se setkáváme při popisu diskrétních systémů v různých oblastech a to jak v matematice samé (např. při numerickém řešení diferenciálních rovnic, v konstruktivní teorii funkcí, v teorii pravděpodobnosti) tak v aplikacích (numerická analýza fyzikálních polí, elektrotechnika, stavebnictví apod.) Analogicky s řešením lineárních integro-diferenciálních rovnic užitím Laplaceovy transformace můžeme řešit lineární diferenční rovnice. Za lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty považujeme:

$$a_r \{\Delta^r y_n\} + \cdots + a_2 \{\Delta^2 y_n\} + a_0 \{y_n\} = \{f_n\},$$

kde $a \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a navíc

- a_i jsou konečné komplexní konstanty pro $i = 0, \dots, r$, které se nazývají koeficienty rovnice.
- $\{f_n\}$ je zadaná posloupnost komplexních čísel, která se nazývá pravá strana rovnice.
- $\{y_n\}$ je hledaná posloupnost, kde prvních r členů $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}$ jsou obvykle zadány jako počáteční hodnoty.

Při hledání řešení postupujeme obvykle následujícím způsobem:

1. Nalezneme obraz diferenční rovnice, který je v případě lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty rovnice algebraická.
2. Dosazením počátečních podmínek do této algebraické získáme rovnici, která jedno řešení a nalezneme tak obraz řešení diferenční rovnice.
3. Hledané řešení $\{y_n\}$, potom určíme zpětnou transformací.

Příklad 0.21. Řešte diferenční rovnici $\{\Delta^2 y_n\} - \{y_n\} = \{1\}$ s počátečními podmínkami $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = -1$.

Řešení. Určíme obraz diferenční rovnice $\mathcal{Z}\{\Delta^2 y_n\} - \mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{1\}$, přičemž označíme $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$:

$$(z-1)^2 Y(z) - z(z-1)y_0 - z\Delta y_0 - Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Dosazením počátečních podmínek a vyřešením rovnice získáme obraz řešení:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Y(z) + z - Y(z) &= \frac{z}{z-1}, \\ Y(z)(z^2 - 2z) &= \frac{z}{z-1} - z = \frac{2z - z^2}{z-1}, \end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z}.$$

K tomuto obrazu řešení nalezneme snadno předmět užitím (9):

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-1}{z-1} \right\} = \{-1\}.$$

□

Druhou možností zápisu závislostí, které popisují diferenční rovnice je tzv. rovnice rekurentní. Dosadíme-li za všechny difference lineární kombinaci členů hledané posloupnosti při využití vztahu

$$\Delta^r y_n = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{n+i},$$

lze každou diferenční rovnici s konstantními koeficienty přepsat na rovnici, která má tvar:

$$A_r \{y_{n+r}\} + \cdots + A_2 \{y_{n+2}\} + A_1 \{y_{n+1}\} + A_0 \{y_n\} = \{f_n\}, \quad (12)$$

kde $A_r \neq 0 \neq A_0$ a A_i jsou vhodné komplexní konstanty. Vzhledem k tomu, že ze známých počátečních podmínek lze opakovaným použitím tohoto vztahu určit libovolné y_n je tento tvar rovnice nazýván rekurentní rovnicí. Postup naznačíme na rovnici z Příkladu 0.21.

Příklad 0.22. Přepište rovnici z Příkladu 0.21, tak aby neobsahovala difference.

Řešení. Z ilustrativních důvodů odvodíme druhou diferenci $\Delta^2 y_n$ bez použití výše uvedeného vzorce:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} + \{y_n\} - \{y_n\} = \{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} = 1.$$

□

Při hledání řešení rekuretních rovnic postupujeme stejně jako u rovnic diferenčních, to znamená, že nejdříve určíme obraz dané rovnice, který vyřešíme. Potom zpětnou transformací určíme řešení původní rovnice jako vzor řešení obrazu původní rovnice. Situaci budeme ilustrovat na příkladu známé Fibonacciovy posloupnosti. Poprvé byla užita italským matematikem Leonardem z Pisy, známým spíše jako Fibonacci, který žil v letech 1170 až 1240. Problém králíků zveřejnil Leonardo z Pisy již v roce 1202 v knize Liber abaci. Tento problém můžeme formulovat takto: Kolik králíků vzejde po roce z jednoho páru, jestliže každému páru se v období dospělosti, tj. po dvou měsících, narodí jeden nový pár. Označme y_n počet párů králíků v n -té generaci, přičemž předpokládáme, že žádní králíci neuhynou. Pro zjednodušení budeme králíky rozlišovat na staré (mohou mít potomky) a mladé (nemohou mít potomky) páry. V $(n+2)$. generaci je starých párů jako všech párů v $(n+1)$. generaci, tj. y_{n+1} a mladých párů je zde tolik, kolik bylo starých párů v $(n+1)$ -ní generaci, tj. jako všech párů n -té generace, tj. y_n . Touto úvahou jsme odvodili rovnici $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$. Dále předpokládejme, že začínáme s mladým párem tj. $y_0 = y_1 = 1$.

Příklad 0.23. Nalezněte hodnoty tzv. Fibonacciovy posloupnosti určené rekurentním vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ a počátečními hodnotami $f_0 = f_1 = 1$.

Nejdříve nalezneme obraz a následně vyřešíme:

$$\begin{aligned} z^2(F(z) - 1 - 1/z) &= z(F(z) - 1) + F(z), \\ F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1}. \end{aligned}$$

Rozkladem na součet „parciálních“ zlomků dostaneme Fibonacciovu posloupnost:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{z_1 z}{z - z_1} - \frac{z_2 z}{z - z_2} \right), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ f_n &= \frac{z_1 z_1^n - z_2 z_2^n}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Uvedený výsledek není v příliš praktickém tvaru. Rozvineme proto $n + 1$. mocniny podle binomické věty a v rozdílu obou závorek se odečtou sudé mocniny $\sqrt{5}$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}2^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k,$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Poznámka 2. Poznamenejme, že při obecných počátečních podmínkách $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$ má obraz řešení dané rekurentní rovnice tvar

$$F(z) = \frac{y_0 z^2 + (y_1 - y_0)z}{z^2 - z - 1},$$

proto rozklad na „parciální“ zlomky obsahuje pouze zlomky se stejnými jmenovateli. Z toho plyne, že řešení je ve tvaru vhodné lineární kombinace posloupností uvedených výše a koeficienty této lineární kombinace lze stanovit z počátečních podmínek. Pro zjednodušení zápisu doplníme výše uvedenou Fibonacciovu posloupnost členy $f_{-2} = 1$, $f_{-1} = 0$, která je zřejmě také řešením dané rekurentní rovnice. Pro lineární kombinaci posunutých posloupností $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$, platí $g_0 = \alpha$, $g_1 = \beta$. Proto posloupnost $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$ je řešení s počátečními podmínkami $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$.

V dalším příkladu si ukážeme možnost řešit rekurentní rovnice, kde řešení je zadáno jinak než pomocí počátečních podmínek.

Příklad 0.24 (Zruinování hazardního hráče). Hráč hraje proti protivníkovi řadu her, kdy vsadí jednu korunu a s pravděpodobností q korunu vyhraje a s pravděpodobností $1 - q$ korunu prohraje. Tato situace se opakuje, dokud hráč nezíská předem stanovených N korun nebo neprohraje všech n korun, se kterými do hry vstupoval. Určete pravděpodobnost zruinování hazardního hráče, to jest, že hra skončí jeho prohrou.

Řešení. Označme f_n pravděpodobnost prohry (zruinování) hráče, který má n korun. V situaci kdy hráč vlastní n korun mohou nastat dvě vzájemně se vylučující možnosti. První, že hráč korunu získá, tedy pravděpodobnost zruinování je $f_n = qf_{n+1}$. Druhá, že korunu ztratí a pravděpodobnost zruinování je $f_n = (1 - q)f_{n-1}$. Protože pravděpodobnost vzájemně se vylučujících možností je součtem jednotlivých pravděpodobností, dostáváme rovnici

$$f_n = qf_{n+1} + (1 - q)f_{n-1}.$$

Dále ze zadání plyne počáteční podmínka $f_0 = 1$ (hráč prohrál) a $f_N = 0$ (hráč vyhrál). Nejdříve danou rovnici upravíme na tvar analogický s předchozím případem (n nahradíme $n + 1$)

$$f_{n+1} = qf_{n+2} + (1 - q)f_n \Leftrightarrow f_{n+2} - \frac{1}{q}f_{n+1} + \frac{1 - q}{q}f_n = 0.$$

Pro provedení $\mathcal{Z}$ transformace potřebujeme také znát f_1 . Protože hodnotu f_1 neznáme, označíme ji jako parametr $f_1 = \alpha$ s tím, že α dodatečně stanovíme z druhé podmínky ($f_N = 0$). Obraz dané rovnice je ve tvaru

$$z^2(F(z) - 1 - \frac{\alpha}{z}) - \frac{1}{q}z(F(z) - 1) + \frac{1 - q}{q}F(z) = 0.$$

Odtud určíme $F(z)$ a pro $q \neq \frac{1}{2}$ rozložíme na „parciální“ zlomky, tj.

$$F(z) = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{z^2 - \frac{z}{q} + \frac{1-q}{q}} = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{\left(z + 1 - \frac{1}{q}\right)(z - 1)} = \frac{z}{z - 1} \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \frac{z}{z + 1 - \frac{1}{q}} \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}$$

a řešení dané rekurentní rovnice (v závislosti na α) pak je

$$f_n = \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1 - q}{q} \right)^n \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}.$$

Dosazením tohoto řešení do druhé (okrajové) podmínky $f_N = 0$ stanovíme α :

$$\frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1 - q}{q} \right)^N \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q \left(\frac{1 - q}{q} \right)^N + q - 1}{q \left(\left(\frac{1 - q}{q} \right)^N - 1 \right)}.$$

Po dosazení do původního vztahu, tak získáme konkrétní pravděpodobnost zruinování hazardního hráče

$$\frac{\left(\frac{1 - q}{q} \right)^N - \left(\frac{1 - q}{q} \right)^n}{\left(\frac{1 - q}{q} \right)^N - 1}.$$

V případě spravedlivé hry $q = 1/2$ mají obraz řešení a řešení tvary:

$$F(z) = \frac{z^2 + z(\alpha - 2)}{z^2 - 2z + 1} \Leftrightarrow f_n = 1 + n(\alpha - 1) \Leftrightarrow f_n = \frac{N - n}{N}.$$

Situaci budeme ilustrovat pro $n = 5$, $N = 10$ a tři konkrétní možnosti $q_1 = 0,4$, $q_2 = 0,5$ a $q_3 = 0,6$, pro které dostaneme tři různé pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1} = \frac{243}{275} \doteq 0,884 \quad p_2 = \frac{10 - 5}{10} = \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - 1} = \frac{1}{1025}.$$

Pomocí tohoto řešení můžeme provést analýzu popisované situace v návaznosti na volbu parametru q pro „velká očekávání“ tj. $N \rightarrow \infty$:

$$q < \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1} = 1, \text{ neboť } \frac{1-q}{q} > 1,$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-n}{N} = 1.$$

Tedy při spravedlivé $q = \frac{1}{2}$ a nevýhodné $q < \frac{1}{2}$ hře je velká pravděpodobnost zruinování hazardního hráče při velkém očekávání N . $\square$

V posledním příkladě ukážeme jak lze postupovat u nehomogenních diferenčních rovnic tj. u rovnic, které mají nenulovou pravou stranu. Popíšeme řešení diskretizace rovnice z Příkladu ?? s obecnou pravou stranou $u(t)$ (tj. diskretizací LR obvodu s obecným napětím).

Příklad 0.25. Nalezněte řešení rovnice

$$i_{n+1} - bi_n = au_n, \text{ kde } i_0 = 0, a, b, u_n \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Obraz dané rovnice má tvar

$$zI - bI = a\mathcal{Z}\{u_n\} \Leftrightarrow I = \frac{a}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} = \frac{a}{b} \left(\frac{z}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} - \mathcal{Z}\{u_n\} \right).$$

Zpětnou transformací s využitím věty o konvoluci dostáváme

$$\{i_n\} = \frac{a}{b} (\{b^n\} * \{u_n\} - \{u_n\}) \Leftrightarrow i_n = \frac{a}{b} \left(\sum_{l=0}^n b^{n-l} u_l - u_n \right) = a \sum_{l=1}^n b^{n-l} u_{l-1}.$$

V následujícím Příkladu 0.28 bude posloupnost $\{i_n\}$ konkretizována pro tzv. sinusové buzení $u_n = \sin n\alpha$.

□

Při řešení diferenčních resp. rekurentních rovnic jsme mlčky předpokládali, že hledaná řešení mají obraz v $\mathcal{Z}$ transformaci tj. jsou přípustné. Obecně to neplatí, ale pokud se jedná o rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou ve tvaru konečné lineární kombinace funkcí tvaru $P(n)q^n \cos \alpha n$, resp. $P(n)q^n \sin \alpha n$, kde $P(n)$ je polynom, je každé řešení této rovnice přípustné.

0.1.5 Konečné součty

Pomocí $\mathcal{Z}$ transformace můžeme také odvodit součty některých konečných posloupností celých čísel. Využíváme přitom hlavně větu o částečném součtu a větu o derivaci obrazu. Metodiku výpočtu si osvětlíme na následujících příkladech.

Příklad 0.26. Určete součty druhých a třetích mocnin prvních n přirozených čísel (pro „první“ mocniny $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ je všeobecně známo).

Řešení. V Příkladu 0.13 jsme odvodili $\mathcal{Z}$ transformaci posloupností $\{n^2\}$ a $\{n^3\}$, jestliže použijeme větu o částečném součtu pro posloupnost $\{n^2\}$ dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \{i^2\} = \frac{z}{z-1} \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}.$$

Ve výše uvedeném vztahu jsme použili dříve odvozený obraz (2) posloupnosti $\{n^2\}$. Pro nalezení vzoru ve tvaru racionálně lomené funkce použijeme výpočtu pomocí reziduí:

$$\operatorname{rez}_{z=1} F(z) z^{n-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3 z^{n+2} + z^{n+1}}{\partial z^3} = \frac{1}{6} (n+1)n(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

neboť funkce $F(z)$ má pouze pól čtvrtého řádu pro $z = 1$. Analogicky pro posloupnost $\{n^3\}$ využitím (3) dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n i^3 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \{i^3\} = \frac{z}{z-1} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^5}.$$

Analogicky s předchozím případem pro hledání vzoru k funkci $F(z)$ použijeme rezidua, protože funkce $F(z)$ má pouze jeden pól $z = 1$ pátého řádu:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=1} F(z) z^{n-1} &= \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^4 (z^{n+3} + 4z^{n+2} + z^{n+1})}{\partial z^4} = \\ &= \frac{1}{24} \left((n+3)(n+2)(n+1)n + 4((n+2)(n+1)n(n-1) + (n+1)n(n-1)(n-2)) \right) = \\ &= \frac{1}{24} (n+1)n \left((n+3)(n+2) + 4(n+2)(n-1) + (n-1)(n-2) \right) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

□

Povšimněte si, že jsme porovnáním se součtem prvních n přirozených čísel odvodili jednu z nejdéle známých číselných identit

$$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

V dalším příkladu ukážeme jak postupovat v úlohách kdy se nesčítá přes všechna čísla, ale jenom přes vybranou podposloupnost.

Příklad 0.27. Určete součet prvních n lichých čísel a jejich druhých mocnin.

Řešení. Motivování Příkladem 0.11 nalezneme postupně obrazy posloupností $\{(-1)^n n\}$ a $\{(-1)^n n^2\}$ podobně jako v (0.13):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{(-1)^n n\} &= -z \left(\frac{z}{z+1} \right)' = \frac{-z}{(z+1)^2}, \\ \mathcal{Z}\{(-1)^n n^2\} &= -z \left(\frac{-z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{z - z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Analogicky s předchozím příkladem odvodíme

$$\begin{aligned}F1(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{-z}{(z+1)^2} = \frac{-z^2}{(z-1)(z+1)^2}, \\ F2(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{z - z^2}{(z+1)^3} = \frac{-z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Nyní pomocí reziduí určíme vzory k funkcím $F1(z)$, $F2(z)$:

$$f1_n = \operatorname{rez}_{z=1} F1(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z)z^{n-1} = -\frac{1}{2^2} - \left(\frac{z^{n+1}}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=-1} =$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{z^n((n+1)(z-1) - z)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4},$$

$$f2_n = \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z)z^{n-1} = \frac{1}{2}(-z^{n+1})'' \Big|_{z=-1} = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Odvodili jsme tedy vztahy pro součty řad se střídavými znaménky

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4} \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Dosazením těchto vztahů při substituci $n = 2n - 1$ do následujících rovností

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i \right) \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i^2 \right)$$

dostáváme výsledek:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{2} + \frac{(-1)^{2n-1}}{4} - \frac{1}{4} \right) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(2(2n-1)+1)(2n-1+1)(2n-1)}{6} - \frac{(2n-1+1)(2n-1)(-1)^{2n-1}}{2} \right) = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

□

Poslední příklad bude věnován v praxi využitelným typům sumacím. V návaznosti na Příklad 0.25 se budeme zabývat následující sumou.

Příklad 0.28. Určete součet $1 + q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha$.

Řešení. Nejdříve pomocí věty o podobnosti a Příkladu 0.11 určíme:

$$\mathcal{Z}\{q^n \sin n\alpha\} = \frac{zq \sin \alpha}{z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2}.$$

Pro obraz posloupnosti částečných součtů platí

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha\right\} = \frac{z^2 q \sin \alpha}{(z-1)(z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2)}.$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dva komplexně sdružené kořeny $z_{1,2} = q \exp(\pm j\alpha)$. Funkce $\mathcal{Z}$ má tedy tři prosté póly a pomocí reziduí odvodíme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha &= \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} = \\ &= \frac{(z_1)^{n+1}}{2j(z_1 - 1)} - \frac{(z_2)^{n+1}}{2j(z_1 - 2)} + \frac{q \sin \alpha}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{q \sin \alpha + q^{n+1}(q \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha)}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že tento výsledek je pro $|q| < 1$ v souladu s dříve odvozeným součtem analogické nekonečné řady, neboť pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme stejný výsledek. $\square$

Závěrem kapitoly ještě uvedeme přehledně několik obrazů elementárních posloupností, přestože většina vztahů byla již v textu odvozena formou příkladů výše.

Číslo vzorce	$f(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z)$
1.	a^n	$\frac{z}{z - a}$
3.	na^n	$\frac{az}{(z - a)^2}$
6.	$n^2 a^n$	$\frac{az(z + a)}{(z - a)^3}$
7.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
7.	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z - 1)^{k+1}}$
8.	$\{1, 0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, \dots\}$	$\frac{z^2}{z^2 - a}$
9.	$\{0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, a^4, \dots\}$	$\frac{z}{z^2 - a}$

0.1.6 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Nalezněte obraz při $\mathcal{Z}$ transformaci posloupnosti:

$$\text{a) } \left\{ 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}, 0, \frac{1}{128}, \dots \right\}$$

$$\text{e) } \left\{ 1, 0, \frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{-1}{729}, 0, \frac{1}{6561}, \dots \right\}$$

$$\text{g) } \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \frac{2}{243}, \frac{7}{2187}, \dots \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} 3^n \right\}$$

$$\text{d) } \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) 2^n \right\}$$

$$\text{f) } \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$$

$$\text{h) } \left\{ 1, 1, \frac{-1}{4}, -1, \frac{1}{16}, 1, \frac{-1}{64}, -1, \dots \right\}$$

2. Nalezněte vzor k obrazu $F(z)$ při $\mathcal{Z}$ transformaci, tj $\mathcal{Z}^{-1}F(z)$ pro $F(z)$:

$$\text{a) } \frac{z^2}{z^2 + 4}$$

$$\text{c) } \frac{16z^2}{z^4 - 16}$$

$$\text{e) } \frac{18z}{(z-3)^3}$$

$$\text{g) } \frac{z^3}{(z-3)^2(z^2+1)}$$

$$\text{b) } \frac{6z^2}{(z+1)(z^2-4)}$$

$$\text{d) } \frac{26z^2}{(z^4 - 5z^2 - 36)}$$

$$\text{f) } \frac{(2-z)2z}{(z+2)^3}$$

$$\text{h) } \frac{z^3}{(z-3)(z^2-2z-3)}$$

3. Určete řešení $y(n)$ zadané rekurentní rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám, přičemž budeme při jejich zápisu používat dvě v literatuře používané formy : y_n je rovnocenné s $y(n)$.

- a) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$, $y_0 = 2$ a $y_1 = 5$,
- b) $y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 0$, $y(0) = 0$ a $y(1) = -1$,
- c) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, $y_0 = 6$ a $y_1 = 7$,
- d) $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 49 \cdot 5^n$, $y(0) = 2$ a $y(1) = 3$,
- e) $y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 2$, $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$,
- f) $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = (2n+5)2^{n+1}$, $y(0) = 0$ a $y(1) = 2$,
- g) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0$, $y_0 = 0$ a $y_1 = \sqrt{3}$.

4. Určete řešení zadané diferenční rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám

- a) $\Delta^2 y_n - \Delta y_n = 0$, $y(0) = 1$ a $\Delta_0 = 1$,
- b) $\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_0 = 0$, $y(0) = 0$ a $\Delta_0 = -1$,
- c) $\Delta^2 y_n - 4\Delta y_n + 4y_0 = 1$, $y(0) = 1$ a $\Delta_0 = 2$,
- d) $\Delta^2 y_n - 8\Delta y_n + 16y_0 = 50 \cdot 5^n$, $y(0) = 0$ a $\Delta_0 = 5$,

Výsledky

1. Obrazy jsou postupně

$$\text{a) } \frac{z}{2(z^2 - 1)}$$

$$\text{c) } \frac{2z}{4z^2 - 1}$$

$$\text{e) } \frac{9z^2}{9z^2 + 1}$$

$$\text{g) } \frac{3z}{(3z - 1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{z^2}{z^2 - 9}$$

$$\text{d) } \frac{2z}{z^2 + 4}$$

$$\text{f) } -z \ln(1 - z^{-1})$$

$$\text{h) } \frac{z(4z^3 + 4z + 4z^2 + 1)}{(4z^2 + 1)(z^2 + 1)}$$

2. Vzory jsou postupně

$$\text{a) } \{2^n \cos(1/2 \pi n)\}$$

$$\text{c) } \{(-2)^n - 2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 2^n\}$$

$$\text{e) } \{n(n-1)3^n\}$$

$$\text{g) } \left\{ -\frac{3}{50} \cos(1/2 \pi n) - \frac{2}{25} \sin(1/2 \pi n) + \frac{3}{50} 3^n + 3/10 n 3^n \right\}$$

$$\text{h) } \left\{ \frac{15}{16} 3^n + 1/16 (-1)^n + 3/4 n 3^n \right\}$$

$$\text{b) } \{2^n - 3(-2)^n + 2(-1)^n\}$$

$$\text{d) } \{-2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 3^n + (-3)^n\}$$

$$\text{f) } \{n^2(-2)^n\}$$

3. a) $y_n = 2^n + 3^n$, b) $y(n) = n(-1)^n$, c) $y(n) = 2^n + 5$, d) $y(n) = (-2)^n + 5^n$, e) $y(n) = n^2$, f) $y(n) = n^2 2^n$, g)

$$y(n) = 2^n \sin(n\pi/3)$$

4. a) $y_n = 2^n$, b) $y_n = 2^n - 3^n$, c) $y_n = n2^n + 1$, d) $y_n = n^2 5^n$.

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [\$\mathcal{Z}\$ transformace - hledání obrazu číselné posloupnosti či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty pomocí \$\mathcal{Z}\$ transformace.](#)

Literatura

- [1] Došlý, O.–Došlá, Z. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Brno: MU Brno, 1999. Skriptum.
- [2] Došlý, O.–Došlá, Z. *Metrické prostory*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2000. Skriptum.
- [3] Elaydi S.N. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Verlag 1999.
- [4] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [5] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [6] Kalas, J.–Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2001. Skriptum.
- [7] Kuben, J. *Diferenciální rovnice*. 1. vydání. Brno: VA Brno, 1991. Skriptum.

-
- [8] Melkes, F.–Řezáč, M. *Matematika 2*. 1. vydání. Brno: VUT v Brně, 2003. Skriptum.
- [9] Pírko, Z.–Veit, J. *Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: Alfa Bratislava. 1970.
- [10] Sikorski, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Druhé, změněné a doplněné vydání. Vydání překladu 1. Praha: Academia, 1973. 496 s.
- [11] Šulista, M. *Základy analýzy v komplexním oboru*. Praha: SNTL 1981.
- [12] Veselý, J. *Komplexní analýza*. Praha: UKP Brno, 2000. Skriptum.