1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

V první kapitole se stručně seznámíme se základními pojmy, které se týkají funkcí více proměnných a jsou nezbytné pro výklad dalších tematických celků probíraných v rámci předmětu Matematika 2.

1.1 Funkce více proměnných a související pojmy

Definice 1.1. Nechť $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, $D(f) \neq \emptyset$. Zobrazení $f : D(f) \to \mathbb{R}$ se nazývá reálná funkce n reálných proměnných a množina $D(f)$ se nazývá definičním oborem funkce f. Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebo zkráceně $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. V případě funkce dvou proměnných, resp. tří

proměnných obvykle preferujeme zápis $z = f(x, y)$, resp. $u = f(x, y, z)$. Množinu $H(f)$ definovanou jako $H(f) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in D(f)\}$ nazýváme oborem hodnot funkce f.

Příkladem funkce více proměnných mohou být například známé matematické (či fyzikální) vzorce. Objem rotačního válce V je funkcí svého poloměru r a výšky v, což zapíšeme jako

$$V = V(r, v) = \pi r^2 v.$$

Analogicky objem komolého rotačního kužele V je funkcí tří proměnných − poloměrů r a R jeho spodní a horní podstavy a výšky tělesa v, což zapíšeme jako

$$V = V(r, R, v) = \frac{\pi v}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right).$$

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a předpisem, kterým je každému bodu $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in D(f)$ přiřazena funkční hodnota $f(x)$. Pokud je předpis dán vzorcem a definiční obor funkce není zadán, pak definičním oborem rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl. Např. u výše uvedené funkce pro objem rotačního válce je definičním oborem množina $D(f) = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ve shodě s geometrickým významem proměnných r a v.

Příklad 1.2. Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

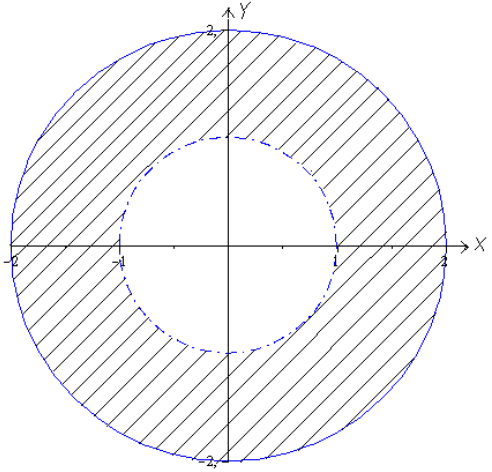
Řešení. Výraz pod odmocninou, resp. v logaritmu musí být nezáporný, resp. kladný. Odtud dostáváme podmínku

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 - 1 > 0,$$

což je ekvivalentní s

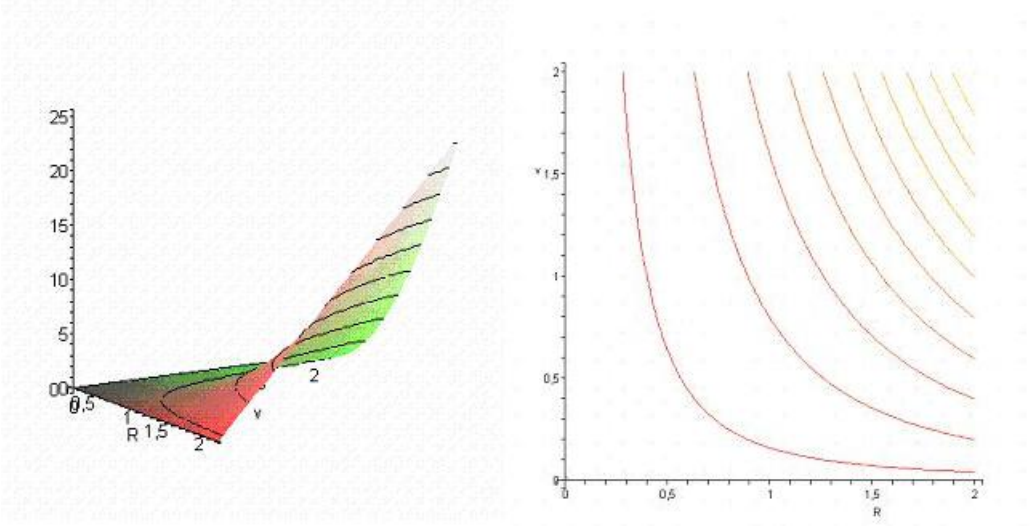
$$x^2 + y^2 \leq 4 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 > 1.$$

Rovnice $x^2 + y^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = 1$ jsou rovnicemi kružnic se středy v počátku o poloměrech $r = 2$ a $r = 1$.



□

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$ vyhovující předpisu f obvykle plocha v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$. Pro grafické znázornění funkce $z = f(x, y)$ často využíváme i tzv. metodu rovinných řezů. Speciálním případem těchto řezů jsou tzv. vrstevnice, což jsou průsečnice grafu funkce f s rovinami $z = c$. V následujících obrazcích je pro $r, v \in (0, 2)$ znázorněn graf a vrstevnice výše uvedené funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$ pro objem válce V.



Pro funkce n proměnných lze analogicky definovat tzv. hladinu funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na úrovni $c \in \mathbb{R}$ jako množinu všech bodů $\{[x_1, \ldots, x_n] \in D(f) \,|\, f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$.

Dalším důležitým pojmem, který přímo souvisí s funkcemi více proměnných, je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Pro názornost uvedeme pouze definici zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a další rozšíření definice pro vyšší dimenze ponecháme na samotném čtenáři. Poznamenejme, že zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, má mnohá využití v geometrii a dá se jím do jisté míry dobře popsat i funkce komplexní proměnné, jak uvidíme později.

Definice 1.3. Nechť jsou dány funkce f, g dvou reálných proměnných a $D = D(f) \cap D(g)$. Dále nechť zobrazení $F : D \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$[x, y] \overset{F}{\longmapsto} [f(x, y), g(x, y)].$$

Pak řekneme, že zobrazení F je určeno funkcemi f, g a tyto funkce nazýváme složkami zobrazení F.

Poznámka 1.4. Zobrazení F z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (resp. z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$) si můžeme představit jako „přemísťování“ bodů v rovině $\mathbb{R}^2$ (resp. v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$). V takovém to případě nazýváme zobrazení F transformací.

Speciální zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$ se nazývá rovinná křivka ($x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x = r\cos t \ \wedge \ y = r \sin t$ vyjadřuje kružnici) a zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^3$ se nazývá prostorová křivka. Nezávisle proměnnou často interpretujeme jako čas a jednotlivé složky zobrazení jako odpovídající souřadnici v konkrétním čase. Proto křivky ztotožňujeme s pohybem.

Příklad 1.5. V matematice se často používá transformace do polárních souřadnic, která umožní v rovině $\mathbb{R}^2$ převést kruh nebo výseč mezikruží na obdélník. Transformace je definována vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Pro bod roviny $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, značí první složka zobrazení $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku soustavy souřadnic. Druhá složka $\varphi(x, y)$ značí úhel, který svírá vektor určený počátečním bodem $[0, 0]$ a koncovým bodem $[x, y]$ s kladnou částí osy x, a jejím oborem hodnot je tedy interval $\langle 0, 2\pi)$. Úhel φ lze určit ze vztahů:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pro funkce n proměnných, které mají neprázdný průnik svých definičních oborů, zavádíme analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné algebraické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí a násobení funkce konstantou. Nechť $x = [x_1, \ldots, x_n]$ a $c \in \mathbb{R}$, potom:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \qquad (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \text{ taková, že } g(x) \neq 0.$$

Při operaci skládání funkcí n proměnných, resp. zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je situace podstatně složitější. Situaci popíšeme pro zobrazení a odtud vyplyne, jak je to se skládáním funkcí více proměnných.

Definice 1.6. Nechť $n, m, k \in \mathbb{N}$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ jsou množiny takové, že $Z_2 \subseteq Z_1$. Dále nechť $F : Z_1 \to Y$ a $G : X \to Z_2$. Potom zobrazení $F \circ G : X \to Y$ přiřazující každému bodu $x \in X$ bod $y \in Y$ předpisem

$$y = F \circ G = F(G(x))$$

nazveme složeným zobrazením.

Poznámka 1.7. Bod $z \in Z_2$ musí ležet současně v oboru hodnot zobrazení G, které nazýváme vnitřním, a v definičním oboru zobrazení F, které nazýváme vnějším, což znamená, že počet složek vnitřního zobrazení musí být stejný jako dimenze definičního oboru vnějšího zobrazení.

Příklad 1.8. Složte funkce $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ a $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Řešení. Oborem hodnot funkce g je zřejmě interval $\langle 1, \infty)$, což je podmnožinou definičního oboru funkce f, jímž je interval $(0, \infty)$. Tedy

$$f \circ g = f(g(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

□

Metrické vlastnosti $\mathbb{R}^n$

Při studiu „lokálních“ vlastností funkcí více proměnných je vhodné zavést některé pojmy popisující vlastnosti podmnožin v prostoru $\mathbb{R}^n$. Základním pojmem je vzdálenost dvou bodů.

Definice 1.9. Nechť $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$ jsou libovolné body prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom číslo

$$v(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

nazýváme vzdáleností bodů x a y. Vzdálenost dvou množin $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\min\{v(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Definice 1.10. Nechť $\varepsilon > 0$. Množinu

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε-okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Množinu

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε-ryzím nebo ε-prstencovým nebo též ε-redukovaným okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pokud není vzdálenost ε podstatná, budeme symbol ε vynechávat a psát jednoduše $U(x_0)$, resp. $P(x_0)$.

Definice 1.11. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná množina, $a \in \mathbb{R}^n$ bod v $\mathbb{R}^n$. Bod a se nazývá:

(i) vnitřním bodem množiny A, jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá vnitřek množiny A a značí se A°.

(ii) bodem uzávěru množiny A jestliže pro každé okolí $U(a)$ platí $U(a) \cap A \neq \emptyset$. Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá uzávěr množiny A a značí se $\overline{A}$.

(iii) hraničním bodem množiny A, jestliže v každém okolí $U(a)$ existují body x_1, x_2 takové, že současně platí $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá hranice množiny A a značí se ∂A.

(iv) hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí $U(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá derivace množiny A a značí se A'.

(v) izolovaným bodem množiny A, jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \cap A = \{a\}$.

Dále definujme nejznámější typy množin v $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.12. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou libovolné množiny. Řekneme, že množiny A a B jsou oddělené v $\mathbb{R}^n$ pokud $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Dále řekneme, že množina A je:

(i) otevřená, pokud obsahuje pouze své vnitřní body, tedy $A^\circ = A$.

(ii) uzavřená, pokud obsahuje pouze body svého uzávěru, tedy $\overline{A} = A$.

(iii) komplementem nebo-li doplňkem množiny B, pokud $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Množinu B pak značíme A^C.

Limita a spojitost funkce

V případě funkcí více proměnných se můžeme do bodu x_0 blížit nekonečně mnoha způsoby, tj. po libovolné křivce. Pokud limita existuje, musí nám (ať se do bodu x_0 blížíme jakkoliv) vycházet vždy stejná hodnota. Již z tohoto pohledu je výpočet limity obtížnější.

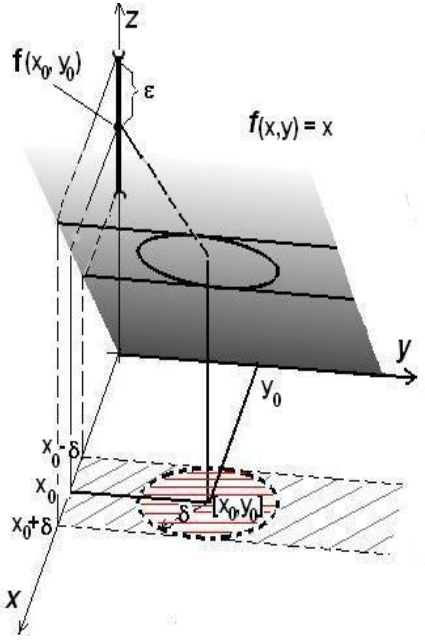
> Z výše uvedených důvodů nebudeme při výpočtu limity funkce více proměnných v bodě x_0 požadovat, aby funkce byla definována ve všech bodech nějakého ryzího okolí bodu x_0. Aby ovšem definice limity v bodě x_0 dávala smysl, budeme v dalším textu, aniž bychom tento fakt stále zdůrazňovali, předpokládat, že **bod x_0 je hromadným** (klidně i hraničním) **bodem svého definičního oboru**.

Definice 1.13. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ limitu L, $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limita se nazývá vlastní, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě $(L = \pm\infty)$ se limita nazývá nevlastní. Bod $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ se nazývá limitní bod.

Uvedená definice limity je univerzální definicí pro funkci jedné či více proměnných a zahrnuje i případy vlastní či nevlastní limity pro vlastní i nevlastní limitní bod. Na následujícím obrázku je znázorněná (vlastní) limita funkce dvou proměnných $f(x, y) = x$.



Poznamenejme, že pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je definice limity analogická, jen je vhodné si uvědomit, že limitou v tomto případě není číslo, ale m-tice čísel.

Z definice limity (podobně jako u funkce jedné proměnné) lze přímo ukázat platnost mnohých tvrzení. Uveďme si ty nejdůležitější, jež budou obdobou těch, která dobře známe z teorie funkce jedné proměnné.

Věta 1.14. *Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 1.15. *Nechť $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou funkce, $a \in (\mathbb{R}^*)^n$. Dále nechť f je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu a. Pokud platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \infty$, pak*

i $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$,

ii $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 0$.

Věta 1.16. *Nechť $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ a nechť existují vlastní limity funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě a. Potom pro algebraické operace s funkcemi platí*

i $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

ii $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x)$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

iv $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, *pokud* $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Spojitost funkce více proměnných je definována analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Definice 1.17. Řekneme, že funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, resp. zobrazení $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ je spojité v bodě $a\in\mathbb{R}^n$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Poznamenejme, že vzhledem k existenci limity funkce, která je výsledkem algebraických operací s funkcemi majících limitu, platí také, že výsledkem algebraických operací se spojitými funkcemi je spojitá funkce. Pro zobrazení platí následující tvrzení.

Věta 1.18. *Nechť F a G jsou zobrazení. Existuje-li kompozice $F(G(x))$ a $\lim\limits_{x\to a}G(x)=b$ a navíc je-li zobrazení F spojité v bodě b, potom*

$$\lim_{x\to a}F(G(x))=F(b).$$

Tato věta spolu s předcházející poznámkou umožňuje tvrdit:

Elementární funkce (jedné i více proměnných) jsou spojité tam, kde jsou definované, přičemž za elementární funkce považujeme mocninné funkce, exponenciální funkce, goniometrické funkce a všechny funkce k nim inverzní. Dále mezi elementární funkce řadíme všechny funkce, které vznikly z těchto funkcí konečným počtem algebraických operací nebo operací skládání.

Tyto skutečnosti jsou podstatné při stanovení postupu při výpočtu limity u elementárních funkcí, kdy nejdříve zkusíme vypočítat hodnotu funkce (resp. zobrazení) dosazením limitního bodu do předpisu funkce. Pokud tato hodnota existuje, tj. po dosazení obdržíme určitý výraz, je limita rovna této funkční hodnotě.

Příklad 1.19. Vypočtěte limitu

$$\lim_{[x,y,z]\to[2,-3,1]} \left[\frac{\sqrt{x^3+y^2-z}}{x+y\ln z}, x+y+z \right]$$

zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Přímým dosazením dostáváme

$$\lim_{[x,y,z]\to[2,-3,1]} \left[\frac{\sqrt{x^3+y^2-z}}{x+y\ln z}, x+y+z \right] = \left[\frac{\sqrt{2^3+(-3)^2-1}}{2-3\ln 1}, 2-3+1 \right] = [2,0].$$

□

Zobrazení má limitu (je spojité) právě tehdy, když mají limitu (jsou spojité) všechny složky tohoto zobrazení. Proto se v dalším zaměříme pouze na výpočet limit funkcí více proměnných.

Příklad 1.20. Určete limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3}{y-2x}.$$

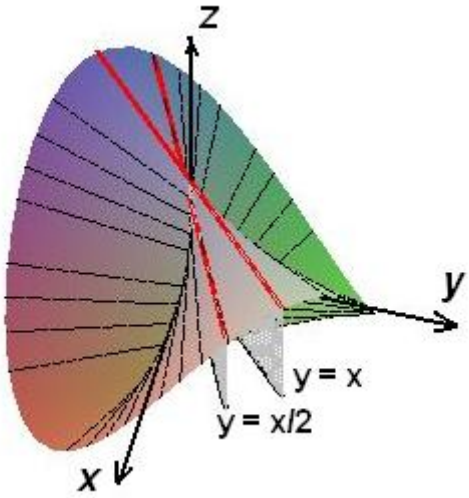
Řešení. Po dosazení limitního bodu dostaneme výraz $\frac{3}{0}$. Aby limita existovala, musela by se hodnota funkce v okolí bodu $[0,0]$ blížit k ∞ nebo k $-\infty$. Snadno nahlédneme, že funkce je ve II. kvadrantu (tj. pro $x<0$ a $y>0$) kladná a blízko bodu $[0,0]$ roste nade všechny meze. Naopak, ve IV. kvadrantu (tj. pro $x>0$ a $y<0$) je funkce záporná a blízko bodu $[0,0]$ klesá pod všechny meze. Odtud (dle Věty 1.14) zkoumaná limita neexistuje. □

Příklad 1.21. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Vyšetříme všechny limity vzhledem k přímkám procházejícím počátkem mající tvar $y=kx$. Potom platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ [x,y]\in[x,kx]}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

To znamená, že hodnota limity v bodě $[0,0]$ vzhledem k přímkám tvaru $y=kx$ závisí na volbě k. Tudíž výsledek limity je pro různá k různý a vyšetřovaná limita neexistuje, viz Obrázek. □



Příklad 1.22. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení. Abychom zjistili spojitost v bodě $[0,0]$, je nutné (dle Definice 1.17) porovnat funkční hodnotu a limitu funkce f v bodě $[0,0]$.

Jelikož v tomto případě vychází po dosazení limitního bodu $[0,0]$ do předpisu funkce neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, použijeme při výpočtu limity transformaci do polárních souřadnic. Po nahrazení proměnných x, y novými proměnnými má funkce f tvar

$$\frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1-\cos^2[r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)]}{[r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)]^2} = \frac{1-\cos^2(r^2)}{r^4}$$

a tudíž lze výpočet uvedené limity nahradit výpočtem limity funkce jedné proměnné. Při výpočtu použijeme L'Hospitalovo pravidlo, jakožto aparát známý z teorie funkcí jedné proměnné:

$$\begin{aligned}\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1-\cos^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r\to 0^+} \frac{4r\sin(r^2)\cos(r^2)}{4r^3} = \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin(r^2)\cos(r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin(r^2)}{r^2}\cdot \lim_{r\to 0^+}\cos(r^2) = 1\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 1 = f(0,0),$$

funkce je v bodě $[0,0]$ spojitá. □

Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

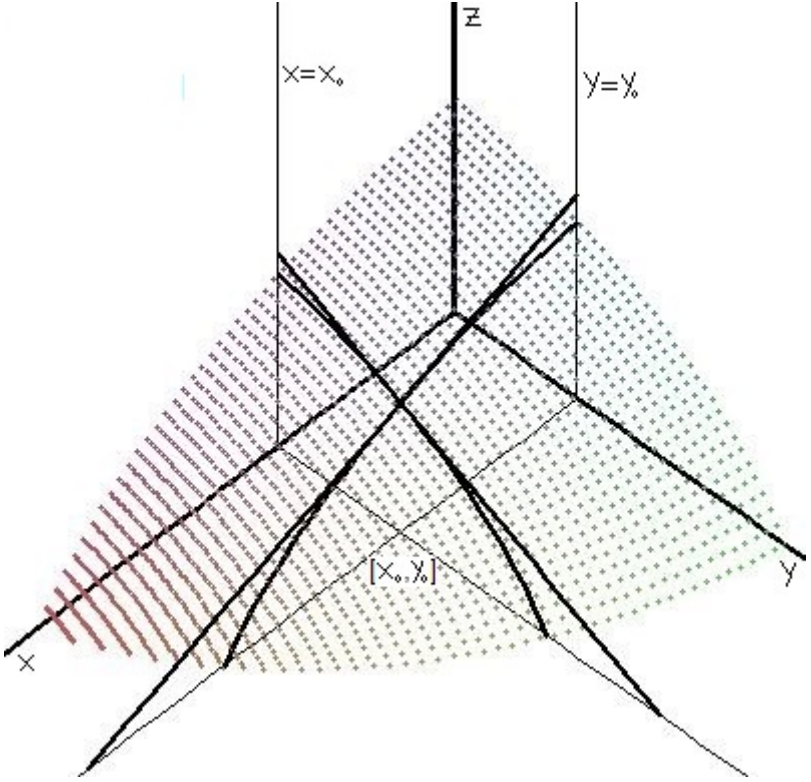
Definice 1.23. Parciální derivací funkce $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \ldots, a_n]$ podle proměnné x_i rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

v bodě a_i. Tuto derivaci zapisujeme dvěma možnými způsoby:

$$f'_{x_i}(a) \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Tedy všechny proměnné kromě proměnné x_i „zafixujeme“, tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné x_i. Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace v bodě se omezíme pouze na funkci dvou proměnných a bod $[x_0, y_0]$. V tomto případě „zafixování“ proměnné y, resp. x a výpočet $f'_x(x_0, y_0)$, resp. $f'_y(x_0, y_0)$ značí omezit se na rovinu $y = y_0$, resp. $x = x_0$. Potom ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0]$ k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $y = y_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.


z
x=x₀
y=y₀
[x₀,y₀]
y
x

Definice 1.24. Nechť funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ má definovanou parciální derivaci podle proměnné x_i v každém bodě množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom je funkce, přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace, nazývána parciální derivací funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i, což zapisujeme

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

První parciální derivace na nějaké množině M je tedy funkce n proměnných. Při praktickém výpočtu (první) parciální derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ postupujeme tak, že nejprve spočítáme parciální derivaci obecně a poté do ní bod a dosadíme, viz následující příklad.

Příklad 1.25. Vypočtěte všechny první parciální derivace funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad \text{v bodě } [0, 1].$$

Řešení. Derivujeme jako složenou funkci, tj.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad z'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud $z'_x(0, 1) = 1$ a $z'_y(0, 1) = 0$. □

Poznámka 1.26. Z existence parciálních derivací funkce f v bodě $[x_1, \dots, x_n]$ neplyne nutně spojitost funkce f v tomto bodě. Tedy neplatí jistá analogie s funkcí jedné proměnné, kde existence derivace funkce f v bodě x_0 implikovala spojitost funkce f v tomto bodě.

Definice 1.27. Derivací funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(t) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)$$

v bodě $t = 0$ a zapisujeme ji $f'_{\vec{s}}(a)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

Volíme-li vektor $\vec{s} = (0, .., 1, .., 0)$ tvořený nulami s výjimkou i-té pozice (kde je 1), derivace funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru je rovna parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial i}(x_1, \dots, x_n)$.

Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem gradientu funkce $f(x_1, \dots, x_n)$.

Definice 1.28. Jestliže má funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ parciální derivace v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ podle všech proměnných x_i, řekneme, že funkce y má v bodě a gradient grad $f(a)$, který je roven vektoru parciálních derivací v tomto bodě podle jednotlivých proměnných, tj.

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Věta 1.29. *Existuje-li okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, v němž má funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ spojité parciální derivace podle všech proměnných x_i, potom pro libovolný vektor $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ existuje derivace funkce y ve směru $\vec{s}$ a platí:*

$$f'_{\vec{s}}(a) = \langle grad\, f(a) \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, s_n,$$

kde výraz $\langle grad\, f(a) \cdot \vec{s} \rangle$ označuje skalární součin těchto vektorů.

Interpretací derivace ve směru je představa, že funkce f lokálně popisuje nadmořskou výšku zemského povrchu. Postavíme-li se s lyžemi na svah v bodě tak, že lyže se nám při rovnoběžném promítání ve směru osy z promítnou do vektoru (s_1, s_2), potom podíl rozdílu nadmořských výšek špiček a pat lyží ku délce lyží je roven derivaci funkce f v daném bodě a směru.

Jak jsme již uvedli dříve, lze parciální derivaci chápat jako funkci více proměnných na množině M. Jestliže má funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na této množině parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, která má v bodě $a = [a_1, \dots, a_n] \in M$ parciální derivaci podle proměnné x_j, nazveme tuto parciální derivaci parciální derivací druhého řádu funkce f podle $x_i x_j$, tj.

$$f''_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a).$$

Opakováním uvedeného postupu definujeme rekurentně i parciální derivace vyšších řádů. Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. Schwarzova věta o záměně pořadí derivování. Uvedeme ji v nejjednodušší podobě, tj. pro funkci dvou proměnných a (smíšené) parciální derivace druhého řádu.

Věta 1.30 (Schwarzova). *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $a=[a_1,a_2]$ parciální derivace prvního řádu spojitou parciální derivaci f''_{xy} nebo f''_{yx} a druhá existuje. Potom jsou spojité obě tyto derivace a navíc jsou záměnné, tj. platí*

$$f''_{yx}(a) = f''_{xy}(a).$$

Pro jednoduchý zápis gradientu se používá symbolického vektoru nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\, x_n}\right) f(a).$$

Dalším důležitým operátorem je tzv. Laplaceův operátor, který můžeme symbolicky vyjádřit jako

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Poznamenejme, že s tzv. Laplaceovou rovnicí pro funkci $u(x,y)$, tj. s rovnicí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se setkáme později u funkcí komplexní proměnné.

1.2 Diferenciál funkce

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x_0 vnímáme jako nahrazení funkce tečnou v bodě x_0 a jeho existence je rovnocenná existenci derivace v tomto bodě. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když z formálního hlediska je význam diferenciálu totožný.

Definice 1.31. Řekneme, že funkce $f(x_1, \dots, x_n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definována v nějakém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existují konstanty $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{[h_1,\dots,h_n]\to[0,\dots,0]} \frac{f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) - (D_1h_1 + \cdots + D_nh_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0$$

Lineární výraz $D_1h_1 + \cdots + D_nh_n$ proměnných $h_1, \dots, h_n$ se nazývá diferenciál nebo též totální diferenciál funkce f v bodě $[a_1, \dots, a_n]$ a značí se $\mathrm{d}f(a_1, \dots, a_n)$.

Věta 1.32. *Je-li funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ diferencovatelná v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$, resp. v jeho okolí, pak je v tomto bodě, resp. v jeho okolí spojitá. Navíc v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a splňují rovnosti*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = (D_1, \dots, D_n).$$

Poznámka 1.33. Výrazy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ pro $i = 1, \dots, n$ parciální diferenciály. Přírůstky h_i lze značit jako $\mathrm{d}x_i$.

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = f'_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y \ .$$

Vyjádříme-li přírůstky $\mathrm{d}x = x - x_0$, $\mathrm{d}y = y - y_0$, $\mathrm{d}z = z - z_0$ a dosadíme do výše uvedené rovnice, vznikne nám pro proměnné x, y, z lineární rovnice

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{1.1}$$

která je vzorcem tečné roviny k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Příklad 1.34. Napište rovnici tečné roviny a normály (normálové přímky), tj. přímky kolmé k tečné rovině k funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $[1, 1, ?]$.

Řešení. Nejdříve vypočteme třetí souřadnici z_0 tečného bodu $z_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ Tedy tečný bod má souřadnice $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$. Dále vypočteme parciální derivace prvního řádu, tj.

$$f'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{a} \qquad f'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud dostáváme $f'_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$ a $f'_y(1, 1) = \frac{1}{2}$. Dosazením do vztahu (1.1) dostáváme hledanou rovinu, tj.

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny $\vec{n} = (1, -1, 2)$ je směrovým vektorem normálové přímky, což spolu se znalostí jednoho bodu normály, tj. bodu $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$, umožňuje napsat např. kanonickou rovnici normálové přímky:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

□

Kromě určení tečné roviny je dalším možným vyžitím diferenciálu přibližný výpočet funkční hodnoty $f(b)$ funkce více proměnných $f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $b = [b_1, \ldots, b_n]$, který je „blízko“ bodu $a = [a_1, \ldots, a_n]$, jehož funkční hodnotu známe přesně. Platí totiž $f(b) \doteq f(a) + \mathrm{d}f(a)$, nebo–li

$$f(b) \doteq f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)\mathrm{d}x_i = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)(b_i - a_i).$$

Příklad 1.35. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2}$.

Řešení. K výpočtu využijeme diferenciál funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $[1, 4, 8]$ s přírůstky $\mathrm{d}x = 0,05$, $\mathrm{d}y = -0,03$ a $\mathrm{d}z = 0,02$. Platí

$$\mathrm{d}f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}z$$

a odtud

$$\mathrm{d}f(1,4,8) = \frac{1}{9}\mathrm{d}x + \frac{4}{9}\mathrm{d}y + \frac{8}{9}\mathrm{d}z = \frac{1\cdot 0,05 - 4\cdot 0,03 + 8\cdot 0,02}{9} = 0,01. \Rightarrow$$
$$\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2} = f(1,05; 3,97; 8,02) \doteq f(1,4,8) + \mathrm{d}f(1,4,8) = 9,01,$$

což se od přesné hodnoty $9,010205$ liší až v řádech 10^{-4}. □

Dále můžeme využít totálního diferenciálu k symbolickému odvozování „vzorců“ pro parciální derivování složených funkcí.Uvažujme funkci $f(U) = f(u_1, ..., u_m)$ m proměnných jako vnější složku a zobrazení tvořené m-ticí vnitřních složek $(..., u_i = u_i(x_1, ..., x_n), ...) = U(X)$ funkcí n proměnných. Poté $f(U(X)) = f(u_1, ..., u_m)(x_1, ..., x_n) = f(u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_m(x_1, ..., x_n))$ označuje složenou funkci o n proměnných. Při zavedení symbolického vyjádření parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dx_i}$, které je analogické s funkcí jedné proměnné, dostáváme:

$$\frac{\partial f(U(X))}{\partial x_i} = \frac{df(U)}{dx_i} = \frac{... + \frac{\partial f}{\partial u_j}du_j + ..}{dx_i} = ... + \frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{du_j}{dx_i} + ... = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Podobně lze postupovat i u parciálních derivací vyšších řádů.

Příklad 1.36. Transformujte Laplaceův operátor $\Delta z = \vec{\nabla}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ do polárních souřadnic.

Řešení. Uvažujme neznámou funkci $z = z(x, y)$ a polární souřadnice ve tvaru dvojice funkcí dvou proměnných $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Inverzní závislost je popsána vztahy: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Začneme pomocným výpočtem, který je přímým použitím vzorce uvedeného výše dostáváme:

$$z'_x = z'_\rho\rho'_x + z'_\varphi\varphi'_x = z'_\rho\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z'_\varphi\frac{-y}{x^2+y^2} \quad z'_y = z'_\rho\rho'_y + z'_\varphi\varphi'_y = z'_\rho\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + z'_\varphi\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Při výpočtu vyšší derivace postupujeme podle definice vyšší derivace:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_\rho\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z'_\varphi\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial z'_\rho}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z'_\rho\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial z'_\varphi}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} + \\ z'_\varphi\frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} = \left(z''_{\rho\rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z''_{\rho\varphi}\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z'_\rho\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \\ \left(z''_{\varphi\rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z''_{\varphi\varphi}\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\frac{-y}{x^2+y^2} + z'_\varphi\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \\ z''_{\rho\rho}\frac{x^2}{x^2+y^2} - z''_{\rho\varphi}\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + z''_{\varphi\varphi}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + z'_\rho\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + z'_\varphi\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{gathered}$$

Analogicky dostáváme i parciální derivaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{\rho\rho}\frac{y^2}{x^2+y^2} + z''_{\rho\varphi}\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + z''_{\varphi\varphi}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + z'_\rho\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - z'_\varphi\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad .$$

Po dosazení do Laplaciánu a úpravě ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ dostaneme:

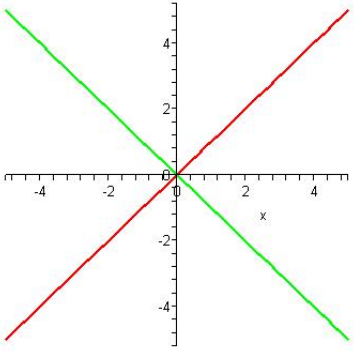
$$z''_{xx} + z''_{yy} = z''_{\rho\rho} + z''_{\varphi\varphi}\frac{1}{x^2+y^2} + z'_\rho \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = z''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}z''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}z'_\rho$$

□

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci dvou proměnných $F(x, y)$. Množinou M, definovanou jako $M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\}$, může být křivkou v rovině $\mathbb{R}^2$. případně i funkcí.

Uvažme jednoduchou rovnici $x^2 = y^2$. Řešení této rovnice můžeme popsat pomocí funkcí jedné proměnné, a to dvěma způsoby $y = \pm x$ nebo $y = \pm|x|$. Uvážíme-li toto řešení pouze v okolí nějakého bodu, který je řešením dané rovnice je tato funkce lokálně určena jednoznačně. Toto platí s výjimkou jediného bodu $(0, 0)$.



Analogicky pro funkci $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ je křivka M jednotková kružnice se středem v počátku.

Věta 1.37. *Nechť má funkce $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ v nějakém okolí bodu $a = [a_1, ..., a_n]$, pro který platí $f(A) = 0$, spojité parciální derivace prvního řádu. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$, potom existuje funkce*

$$x_i = g(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$$

taková , že $a_i = g(a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n)$ a tato funkce je řešením dané rovnice, tj.

$$f(x_1, .., x_{i-1}, g(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n), x_{i+1}, .., x_n) = 0.$$

Navíc má funkce $x_i = g(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$ spojité parciální derivace prvního řádu v nějakém okolí bodu $[a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_n]$ (je spojitá) a platí

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \text{ pro } j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

Uvedené vztahy pro parciální derivace lze odvodit pomocí derivací složené funkce více proměnných. Situaci budeme ilustrovat pro funkci jedné proměnné.

$$(F(x, y(x)))' = F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}$$

$$(F(x, y(x)))'' = F''_{xx}(x, y(x)) + 2F''_{xy}(x, y(x))y'(x) + F''_{yy}(x, y(x))(y'(x))^2 + F'_y(x, y(x))y''(x) = 0$$

Příklad 1.38. Ukažte, že funkce daná implicitně rovnicí

$$F(x,y) = y^4 + \left(x^2-4\right) y^3 - 2\,\left(x^2+2\right) y^2 - 8\,x^2 y - 16\,x^2 + 32 = 0 \text{ a bodem } A = [0,2]$$

má v tomto bodě lokální extrém a určete jej.

Řešení. Nejdříve ověříme, že zadaný bod je řešením rovnice $F(0,2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 - 2\cdot 2\cdot 2^2 + 32 = 0$. Dále danou rovnici chápeme tak, že y je funkce proměnné x, tj. $y(x)$, potom ji derivujeme (podle x):

$$y(x)^4 + \left(x^2-4\right) y(x)^3 - 2\,\left(x^2+2\right) y(x)^2 - 8\,x^2 y(x) - 16\,x^2 + 32 = 0$$

$$4\,y(x)^3 y'(x) + 2\,xy(x)^3 + 3\,\left(x^2-4\right) y(x)^2 y'(x) - 4\,xy(x)^2 - 4\,\left(x^2+2\right) y(x)y'(x) - 16\,xy(x) - 8\,x^2 y'(x) - 32\,x = 0.$$

Po dosazení $x = 0$, $y(0) = 2$ dostaneme pro $y'(0)$ rovnici: $4\,2^3 y'(x) + 3\,(-4)\,2^2 y'(x) - 4\,(+2)\,2y'(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = 0$. Pro druhou derivaci dané rovnice odvodíme:

$$\begin{aligned} &12\,y(x)^2 y'(x)^2 + 4\,y(x)^3 y''(x) + 2\,y(x)^3 + 12\,xy(x)^2 y'(x) + 6\,y(x)y'(x)^2 x^2 - 24\,y(x)y'(x)^2 + \\ &\quad 3\,y(x)^2 y''(x)\,x^2 - 12\,y(x)^2 y''(x) - 4\,y(x)^2 - 16\,xy(x)y'(x) - 4\,y'(x)^2 x^2 - \\ &\quad 8\,y'(x)^2 - 4\,y(x)y''(x)\,x^2 - 8\,y(x)y''(x) - 16\,y(x) - 32\,xy'(x) - 8\,x^2 y''(x) - 32 = 0 \end{aligned}$$

Po dosazení $x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ dostaneme pro $y''(0)$ rovnici:

$$\begin{aligned} 12\,2^2 0^2 + 4\,2^3 y''(0) + 2\,2^3 + 12\,02^2 0 + 6\,20^2 0^2 - 24\,20^2 + \\ 3\,2^2 y''(0)\,0^2 - 12\,2^2 y''(0) - 4\,2^2 - 16\,020 - 4\,0^2 0^2 - \\ 8\,0^2 - 4\,2y''(0)\,0^2 - 8\,2y''(0) - 16\,2 - 32\,00 - 8\,0^2 y''(0) - 32 = \\ + 4\,2^3 y''(0) + 2\,2^3 - 12\,2^2 y''(0) - 4\,2^2 - 8\,2y''(0) - 16\,2 - 32 = -32y''(0) - 64 \Leftrightarrow y''(0) = -2. \end{aligned}$$

Pro funkci danou implicitně platí $y'(0) = 0$ a $y''(0) = -2$, tedy má v tomto bodě lokální maximum. □

Poznámka 1.39. Podobně je možné ukázat, že všechny derivace vyššího řádu této implicitně dané funkce mají nulové derivace a dosazením do Taylorovy řady je možné určit toto řešení explicitně

$$y = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2} x^2 + \cdots = 2 - x^2.$$

Toto je jedna z možností využití derivování funkce dané implicitně.

Další standardně probíranou aplikací je stanovení normálového vektoru k ploše implicitně zadané rovnicí

$$F(x, y, z) = 0.$$

Libovolná křivka $[x(t), y(t), z(t)]$ leží v ploše, jestliže $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Derivováním této rovnice podle t dostáváme:

$$0 = (F(x(t), y(t), z(t)))' = F'_x x' + F'_y Y' + F'_z z' = \langle \big(F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)\big) \cdot (x', y', z') \rangle.$$

To znamená, že vektor $\vec{\nabla} F$ je kolmý na libovolný tečný vektor, tedy je normálovým vektorem tečné roviny.