

Speciální funkce, Fourierovy řady a Fourierova transformace

Při studiu mnoha přírodních jevů se setkáváme s veličinami, které jsou všude nulové s výjimkou malého časového intervalu I , ale jejich celková energie (integrál) je kladná. Takový charakter má velká síla působící po velmi krátkou dobu (náraz), velké elektrické proudy působící jen velice krátkou dobu (elektrický impuls), aj. Při úvahách o derivaci těchto veličin nejdříve uveďme možný postup pro zavedení derivace spojitých funkcí, které nemají v daném bodě derivaci. Takovou funkcí je např. absolutní hodnota $y = |x|$ v bodě 0. V těchto případech považujeme za derivaci této funkce funkci, jejíž integrál je roven zadané funkci. V tomto smyslu je nespojitá funkce $\text{sgn}(x)$ derivací funkce $|x|$, neboť platí

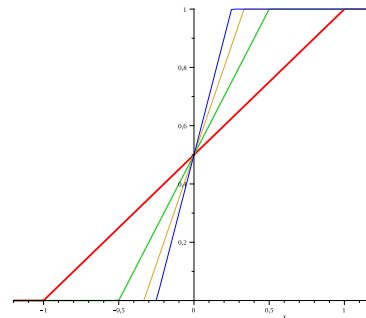
$$|x| = \int_0^x \text{sgn}(t) dt.$$

Jako prototyp nespojité funkce uvažujme Heavisideovu funkci jednotkového skoku $\eta(t)$, které je definována:

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } x = 0; \\ 1, & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

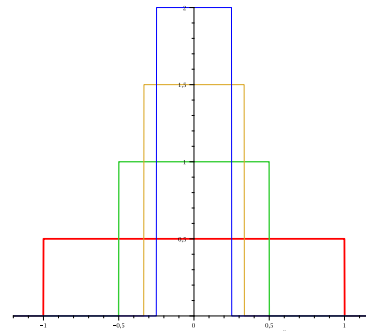
Funkce $\eta(t)$ je nespojitá v bodě 0 (bod nespojitosti prvního druhu) bez ohledu na funkční hodnotu pro $x = 0$, neboť má funkce $\eta(t)$ různé jednostranné limity. Pomocí této funkce je možné modelovat funkce, které mají v izolovaných bodech nespojitosti prvního druhu (jednostranné limity jsou konečné a nejsou si rovny). Heavisideova funkce je limitou posloupnosti funkcí

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -1/n; \\ \frac{n}{2} \left(t + \frac{1}{n}\right), & \text{pro } -1/n \leq t \leq 1/n; \\ 1, & \text{pro } 1/n \leq t, \end{cases}$$



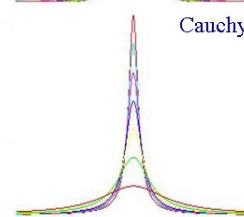
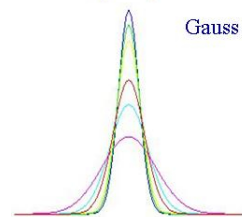
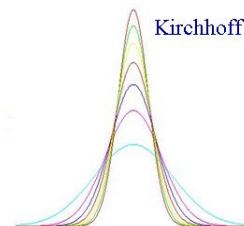
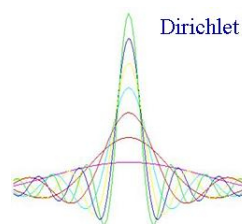
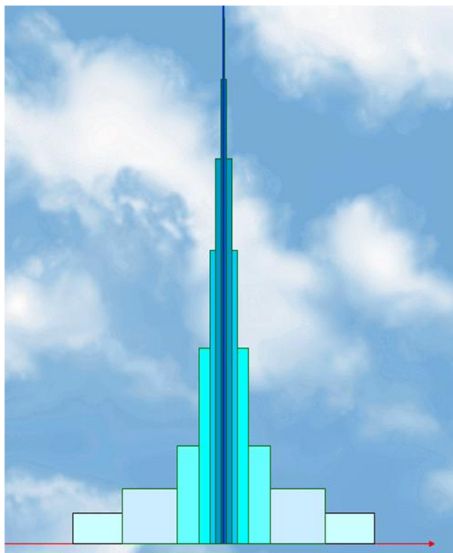
které jsou spojité a mají ve výše uvedeném smyslu derivaci:

$$F'_n(t) = f_n(t) = \frac{n}{2} \left(\eta\left(t + \frac{1}{n}\right) - \eta\left(t - \frac{1}{n}\right) \right).$$



Provedením obvyklého limitního přechodu pro funkce $f_n(t)$, dostaneme funkci nulovou s výjimkou jednoho bodu s neohrazenou funkční hodnotou ($f(0) = \infty$). Integrál z takovéto funkce je ovšem nulový a tedy výše naznačený postup je nevyhovující. Budeme postupovat podobně jako u reálných čísel, kdy mohou

být užity různé „definice“ čísla e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Podobně posloupnost obdélníkových kmitů $f_n(t)$ není jedinou posloupností funkcí, které jsou derivací funkcí majících za limitu Heavisideovu funkci jednotkového skoku. Stručně jsou uvedeny grafy některých dalších možných posloupností funkcí:



Uvedená nejednoznačnost těchto posloupností je důvodem k zavedení pojmu jehlové funkce.

Definice 0.1. Spojitou, příp. po částech spojitou funkci, $\delta(t, \lambda)$ argumentu t závislou na parametru λ nazveme jehlovou funkcí jestliže platí:

1. $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $|t| > \lambda$;
2. $\delta(t, \lambda) \geq 0$ pro $|t| < \lambda$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$.

Protože hodnota $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \begin{cases} f(0), & \text{pro } ab < 0; \\ 0, & \text{pro } ab > 0, \end{cases}$ tedy nezávisí na volbě konkrétní jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ můžeme použít stručnější zápis

Definice 0.2. Zavedme označení

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \int_a^b f(t) \delta(t) dt. \quad (1)$$

Potom v integrálech používaný symbol $\delta(t)$ nazýváme **Diracovou distribucí**, či **Diracovým impulsem**.

Diracova distribuce je tzv. zobecněnou funkcí, charakterizující limitní chování jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$ a užívá se při výpočtu integrálů. Pro Diracovu distribuci $\delta(t)$ a spojitou funkci $f(t)$ platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt = f(t_0). \quad (2)$$

Pro Diracův impulsem platí : $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$, což je Heavisideova funkce $\eta(t)$ a tedy

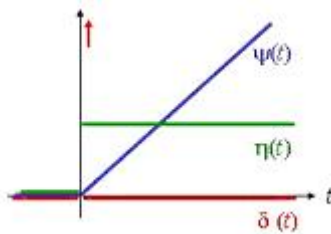
Heavisideovou funkci jednotkového skoku tak můžeme chápat jako zobecněnou primitivní funkci Diracova impulsu, což je analogické vztahu mezi Heavisideovou funkcí $\eta(t)$ a identickou funkcí $\psi(t)$, kde platí

$$\int_{-\infty}^t \eta(\tau) d\tau = \psi(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases}$$

Využitím vztahu mezi integrálem a derivací můžeme interpretovat Diracovu distribuci jako derivaci Heavisideovy funkce jednotkového skoku, kterou podobně můžeme dále chápat jako derivaci identické funkce $\psi(t)$. Tj.

$$\psi''(t) = \eta'(t) = \delta(t).$$

Situaci ilustruje následující obrázek



Příklad 0.3. Vlastnosti Diracova impulsu jsou demonstrovány na funkcích.

a) Zjednodušte výraz $(t^3 + 1)\delta(t - 2)$

Řešení. Funkce $t^3 + 1$ tedy podle (2) nahradit $(2^3 + 1)\delta(t - 2) = 9\delta(t - 2)$. □

b) Vypočtete integrál $\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt, t_0 \geq 0$. Později bude tento integrál interpretován jako obraz Laplaceovy transformace Diracovy funkce $\delta(t - t_0)$.

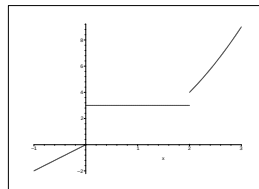
Řešení. S využitím (2) a skutečnosti $\int_{-\infty}^0 e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = 0$ dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = e^{-t_0p}$$

□

c) Zapište funkci jediným analytickým zápisem a určete její zobecněnou derivaci.

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } -\infty < t < 0 \\ 3 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ t^2 & \text{pro } 2 < t < \infty \end{cases}$$



Řešení. K požadovanému zápisu využijeme funkci jednotkového skoku. Uvažme funkci $g(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t)$. Pro $t < 0$ platí $g(t) = 2t$, neboť součin $(3 - 2t)\eta(t)$ je nulový a pro $t > 0$ platí $g(t) = 2t + 3 - 2t = 3$, neboť $(3 - 2t)\eta(t) = 3 - 2t$. Tedy platí $g(t) = f(t)$ pro $t < 2$. V dalším zopakujeme daný postup, tj. k funkci $g(t)$ přičteme součin vhodné funkce s $\eta(t - 2)$. Tato je rovna rozdílu analytického vyjádření funkce $f(t)$ pro $t > 2$ minus analytického vyjádření funkce $f(t)$ pro $0 < t < 2$, dohromady dostáváme:

$$f(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t) + (t^2 - 3)\eta(t - 2).$$

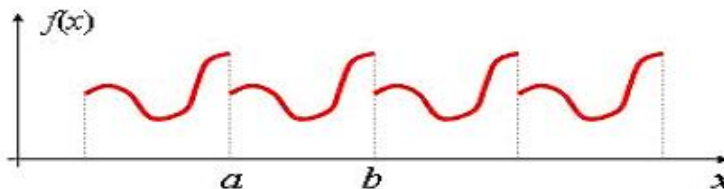
Pro funkce vyjádřené „složitěji“ postupujeme analogicky vždy „zleva doprava“. Zobecněné derivace získáme podle definice:

$$f'_o(t) = 2 - 2\eta(t) + (3 - 2t)\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + (t^2 - 3)\delta(t - 2) = 2 - 2\eta(t) + 3\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + \delta(t - 2).$$

Poznamenejme, že třetí zobecněná derivace bude pouze lineární kombinací funkce jednotkového skoku a jejich derivací. □

Periodické a harmonické funkce

Při vyšetřování periodických dějů, jako jsou např. elektrické, mechanické a akustické kmity, kruhové pohyby, ale také při řešení diferenciálních či integrálních rovnic používáme periodické funkce. Mějme interval $I =]a, b[$ a označme $T = b - a$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *periodická s periodou T* , jestliže platí $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.



Definice 0.4. Reálnou harmonickou funkcí nazýváme každou reálnou funkci, kterou je možné zapsat v tzv. fázovém tvaru

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } -\infty < t < \infty \quad (3)$$

a tato je jednoznačně určena trojicí parametrů F , φ a ω , které jsou postupně nazývány **amplituda**, **počáteční fáze** a **frekvence** harmonické funkce,

Za předpokladu, že hodnota frekvence ω je pevně zvolena, lze funkci (3) jednoznačně určit dvojicí F , φ nebo jedním komplexním parametrem $\hat{F}$ nazývaným **komplexní amplituda**:

$$\hat{F} = F e^{j\varphi} = F(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (4)$$

tj. $|\hat{F}| = F$, $\arg \hat{F} = \varphi$. V Paragrafověnovaném komplexní funkci reálné proměnné jsme ukázali, že i součet harmonických funkcí se (stejnou frekvencí ω)

$$f_1(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad f_2(t) = F_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

je za předpokladu

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 = F_1 e^{j\varphi_1} + F_2 e^{j\varphi_2} \neq 0$$

harmonická (funkce se stejnou frekvencí ω), tj.

$$f(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + F_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = F \cos(\omega t + \varphi).$$

Navíc komplexní amplituda součtu je součtem komplexních amplitud, tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

Poznamenejme, že i funkce $f(t) = F \sin(\omega t + \varphi)$ je také harmonická funkce, neboť platí $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$. Další možností zápisu harmonické funkce $F \cos(\omega t + \varphi)$ je

$$F \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

přičemž $a = F \cos \varphi$, $b = -F \sin \varphi$, který bude dále využíván.

0.0.1 Fourierovy trigonometrické řady

Dále se budeme zabývat možností vyjádřit periodickou funkci $f(t)$ s periodou T . Jedna z možností může být odvozena jako důsledek Laurentova rozvoje holomorfních funkcí.

Definice 0.5. Nechť je funkce $f(t)$ integrovatelná na intervalu $\langle \theta, \theta + T \rangle$. Označme $\omega = 2\pi/T$. Potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (5)$$

nazýváme **Fourierovou trigonometrickou řadou** funkce $f(t)$, kde konstanty a_n, b_n jsou určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (6)$$

a nazývají se **koefficienty Fourierovy řady** funkce $f(t)$. Tuto řadu je možné vyjádřit v tzv. **komplexním tvaru Fourierovy řady**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega t), \text{ kde } c_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp(-jn\omega t) dt. \quad (7)$$

nebo tzv. **fázovém tvaru Fourierovy řady**:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \text{ kde } 2c_{-n} = F_n e^{j\varphi_n} \quad (8)$$

Poznámka 0.6. Konstanty v jednotlivých tvarech Fourierovy řady jsou svázány jednoduchými vztahy. F_n je modul a φ_n je argument komplexního čísla $2c_{-n}$ dále

$$F_n = |a_n - jb_n| \quad \varphi_n = \text{Arg}(a_n - jb_n) \quad a_n = F_n \cos \varphi_n \quad b_n = -F_n \sin \varphi_n$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}.$$

Podmínkou pro stanovení koeficientů a_n , b_n , případně c_n nebo F_n , φ_n je možnost určit integrál z funkce $f(t)$ na intervalu délky T . Tato podmínka není ovšem dostatečná pro konvergenci řad (5) případně (7) nebo (8) rovnost jejich součtu původní funkci.

Definice 0.7. Řekneme, e funkce $f(t)$ splňuje na uzavřeném intervalu **Dirichletovy podmínky** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem tak, že na každém z těchto intervalů je spojitá a monotónní.

Věta 0.8. *Nechť funkce $f(t)$ je periodická s periodou T a splňuje Dirichletovy podmínky na libovolném intervalu délky T . Potom řada ve vztahu (5), resp. (7), resp. (8) (kde Fourierovy koeficienty jsou definovány vztahy (6), resp. (7), resp. (8) konverguje pro každé t a její součet je roven:*

1. $f(t)$ v každém bodě t , v němž je funkce $f(t)$ spojitá,
2. $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě t , v němž je funkce $f(t)$ nespojitá.

Příklad 0.9. Sestrojte Fourierovu řadu funkce $f(t) = t$ pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, která má periodu $T = 2\pi$.

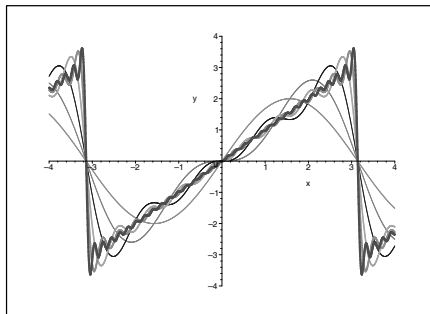
Řešení. V tomto případě je $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Dále zvolíme $\theta = -\pi$, abychom mohli při určení koeficientů a_n využít skutečnosti, že funkce $f(t) = t$ je lichá, protože potom integrály (6) určující koeficienty a_n jsou integrály z liché funkce na symetrickém intervalu kolem počátku nulové a tedy $a_n = 0$. Pomocí integrace per partes spočítáme

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Při výpočtu integrálu jsme také využili možnosti vyjádřit integrál ze sudé funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ jako dvojnásobek integrálu z této funkce na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Protože funkce $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky, podle Věty 0.8 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n}$$

konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a pro $t \in (-\pi, \pi)$ je rovna t , pro $t = n\pi$ je rovna 0. Následující obrázek ukazuje částečné součty postupně pro 1, 2, 4, 8, 16, 32 členů.



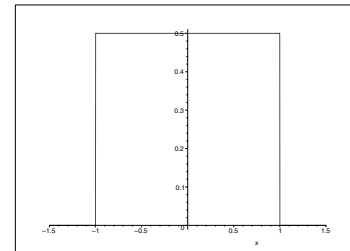
Aproximace funkce $f(t) = t$

□

V dalším příkladě rozvineme sudou funkci, která popisuje periodicky se opakující obdélníkové impulsy, do komplexního tvaru Fourierova rozvoje.

Příklad 0.10.

Uvažujme obdélníkový signál, který má šířku 2ε , výšku h a délka periody je T ($T > 2\varepsilon$). Funkci $f(t)$, která vyhovuje zadaným požadavkům, zvolíme tak, aby byla sudá, tj. v intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$, který má délku T , bude signál nenulový pouze v intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, viz obrázek vpravo



Řešení. Pro frekvenci ω platí $\omega = 2\pi/T$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h e^{-jn\omega t} dt = \frac{h}{-jn\omega T} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{h}{T} \frac{2 \sin(n\omega\varepsilon)}{n\omega}$$

Koeficient $c_0 = 2h\varepsilon/T$ není daným vztahem definován, neboť se jedná o podíl $\frac{0}{0}$. Tato skutečnost bývá zejména v technické literatuře řešena zavedením funkce sinc, která je definována vztahem

$$\text{sinc } t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{pro } t \neq 0; \\ 1, & \text{pro } t = 0, \end{cases} \quad (9)$$

což umožňuje zápis $c_n = \frac{2h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon)$ a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon) e^{jn\omega t} = \frac{2h\varepsilon}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon) \cos(n\omega t).$$

Řada vpravo je fázový tvar Fourierovy řady. Skutečnost, že funkce $f(t)$ je sudá, nám sice neumožnila určit část koeficientů c_n , ale projevila se díky Poznámce 0.6 v tom, že c_n jsou reálné (neboť $b_n = 0$). $\square$

Příklad 0.11. Rozvíňme tzv. **dvoucestné a jedoucestné usměrnění** ve Fourierovu řadu.

Dvoucestné usměrnění je definované relací $f_d(t) = |\sin t|$ nebo-li $f_d(t) = \sin t$ pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a funkce $f_d(t)$ je periodická s periodou π , tj. $f(t + \pi) = f(t)$. Funkce je zřejmě sudá, proto pro všechna n je $b_n = 0$. Stačí tedy určit jen koeficienty a_n . Nejdříve vypočteme koeficient a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Využitím známé trigonometrické relace $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ postupně vypočteme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right) = \end{aligned}$$

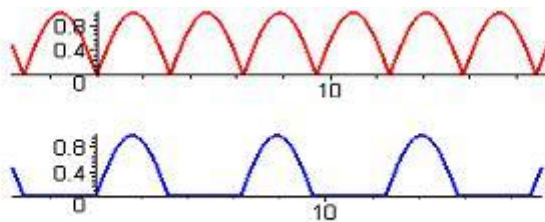
$$\frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože funkce $f_d(t)$ je spojitá dostáváme její Fourierův rozvoj, kde $n = 2m$, ve tvaru

$$f_d(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mt}{4m^2 - 1}.$$

Jednocestné usměrnění je definováno vztahem $f_j(t) = \frac{1}{2}(|\sin t| + \sin t)$. S využitím linearit integrálu je zřejmé, že součet funkcí má rozvoj ve tvaru součtu rozvojů:

$$f_j(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mt)}{4m^2 - 1}$$



0.0.2 Rozvoj pouze do sinů resp. kosinů

Předcházející ukázky nás mohou motivovat k úvaze, za jakých předpokladů je možné funkci rozvinout v řadu sinů nebo kosinů. Z předcházejících ukázek je patrné, že lichou funkci ($f(-t) = -f(t)$) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze lichých funkcí, tj. v řadu sinů a sudou funkci ($f(-t) = f(t)$) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze sudých funkcí, tj. v řadu kosinů. Tato skutečnost je dána tím, že integrál na symetrickém intervalu kolem počátku je z liché funkce nulový a pro součin sudých a lichých funkcí platí obdobná pravidla jako pro sčítání sudých a lichých čísel.

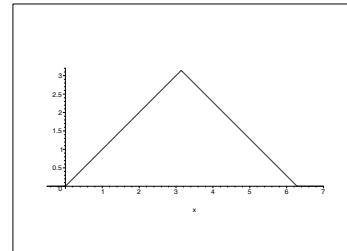
Tedy nebudeme-li trvat na periodicitě dané funkce $f(t)$ můžeme postupovat tak, že funkci $f(t)$ definovanou na intervalu $\langle 0, T \rangle$, je možné dodefinovat v intervalu $\langle -T, 0 \rangle$ v sudou $f_s(t)$ resp. lichou funkci $f_l(t)$, která má periodu $2T$. Potom v bodech kde je funkce $f(t)$ spojitá platí:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt,$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt.$$

Příklad 0.12. Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozviňte do sinů a kosinů funkci $f(t)$ definovanou vztahem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{pro } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$



Řešení. Pro rozvoj do sinů je třeba vypočíst integrály (při jejich výpočtu zohledníme, že platí $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (2\pi - t) \sin \frac{nt}{2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right) \right]_0^\pi + \right. \\ &\quad \left. 2\pi \left[-\frac{2}{n} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right]_\pi^{2\pi} - \left[\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right) \right]_\pi^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n^2} \left(\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{n\pi}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) - \frac{4\pi}{n} (-1)^n + \frac{4\pi}{n} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{4}{n^2} \left(-n\pi(-1)^n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) = \frac{8}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Rozvoj do sinů $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n t}{2\pi}\right)$ obsahuje pouze členy s lichými koeficienty:

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \dots \right)$$

Pro rozvoj do kosinů je třeba vypočítat integrály

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \cos \frac{nt}{2} dt = \\ &\quad \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_0^{\pi} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left[\frac{2}{n} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\ &\quad \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) + \frac{4\pi}{n} \sin(n\pi) - \frac{4\pi}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{n^2} \left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right) = \frac{4}{\pi n^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

Dále musíme ještě vyčíslit $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$, což lze určením plochy shora ohraničené funkcí $f(t)$ zdola osou x , jejíž hodnota je π . Rozvoj do kosinů můžeme tedy formálně vyjádřit ve tvaru

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2\pi}\right).$$

Tento tvar lze zjednodušit v závislosti na sudosti resp. lichosti n :

Pro $n = 2k - 1$ platí

$$a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} (0 - 1 + 1) = 0.$$

Pro $n = 2k$ platí

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi(2k)^2} (2(-1)^k - 1 - 1) = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Další zjednodušení dostáváme analogicky s předchozím opětovným rozlišením na sudá resp. lichá k

Pro $k = 2\ell$ $a_{2k} = a_{4\ell} = 0$

Pro $k = 2\ell - 1$ $a_{2(2\ell-1)} = \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2}.$

Funkci $f(t)$ můžeme tedy rozvinout do kosinů tak, že budeme zapisovat pouze nenulové členy rozvoje tj. budeme sčítat přes index ℓ a tomu odpovídajícím způsobem upravíme koeficienty v argumentu funkcí

kosinus $n = 2k = 2(2\ell - 1)$:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell - 1)^2} \cos \frac{2(2\ell - 1)}{2}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell - 1)^2} \cos((2\ell - 1)t)$$

Tento tvar odpovídá rozvoji na intervalu poloviční délky, což není žádná náhoda, neboť funkce $y = t$ definovaná v intervalu $(0, \pi)$ rozvinutá do cosinů, tj. sudá funkce, má stejné periodické pokračování jako funkce $f(t)$. Tento fakt umožňuje podstatným způsobem zjednodušit výpočet Fourierova rozvoje do kosinů a sice volit $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos \frac{n\pi t}{\pi} dt$ a rozvoj provést vzhledem k funkcím $\cos(nt)$. $\square$

0.0.3 Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum

Graficky Fourierův rozvoj reprezentujeme pomocí **spektra**, kdy jednu číselnou osu užíváme k vynášení frekvencí $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ a v rovině kolmé na osu frekvencí koeficienty $a_n = F_n \cos \varphi_n$, $b_n = -F_n \sin \varphi_n$ jsou souřadnicemi bodu přiřazeného n -té harmonické složce Fourierova rozvoje. Tato grafická interpretace je ovšem trojrozměrná, proto se používá zobrazení pomocí dvou rovinných zobrazení, kdy se na jednu osu vynášejí frekvence $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ a na druhou koeficient a_n resp. b_n , které znázorníme úsečkou začínající na ose frekvencí a končící v bodě jehož druhá souřadnice je a_n resp. b_n . Druhou možností je vynášet místo dvojice a_n , b_n dvojici F_n , φ_n , hovoříme tak o **spektru modulů** a **spektru argumentů**.

Další možností je vyjádření spektra pro Fourierův rozvoj v komplexním tvaru. Analogicky s reálným oborem můžeme vytvořit dvojici zobrazující zvlášť reálnou a imaginární část koeficientu c_n nebo obvykle postupujeme tak, že zobrazujeme komplexní koeficient c_n dvojicí jeho amplitudy a argumentu.

Analogicky s harmonickými funkcemi platí pro spektra funkcí:

1. spektrum součtu je rovno součtu spekter
2. spektrum α násobku funkce je rovno α násobku tohoto spektra
3. posunutá funkce $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ má spektrum modulů stejné jako funkce $f(t)$ a spektrum argumentů je o $n\omega\tau$ menší tj.

$$\varphi_{\varphi n} = \varphi_n - n\omega\tau$$

4. spektrum funkce se změněným měřítkem $f(mt)$ má periodu T/m a frekvence harmonických složek jsou násobkem $m\omega$, ale koeficienty a_n , b_n a tedy moduly F_n a argumenty φ_n jsou stejné.

0.1 Fourierova transformace a Fourierův integrál

V tomto odstavci se budeme zabývat přenesením aparátu komplexního tvaru Fourierova rozvoje periodických funkcí na funkce, které nejsou periodické. Tímto postupem je motivováno zavedení pojmu Fourierovy transformace spolu s „ověřením“ základního vztahu této transformace.

Uvažujme na intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ funkci $f(t)$, která zde splňuje Dirichletovy podmínky, viz Definice 0.7. S využitím Věty 0.8 na tomto intervalu dostáváme ve všech bodech spojitosti funkce $f(t)$ rovnost:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega x} dx e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega(x-t)} dx, \text{ kde } t \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).$$

Proto, abychom mohli výše uvedenou sumu interpretovat jako integrální součet, zavedeme dělení množiny reálných čísel jako posloupnost bodů $z_n = n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ pro $n = -\infty, \dots, \infty$, přičemž norma dělení $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \frac{2\pi}{T}$, se zmenšuje pro zvětšující se T tj. $\Delta z_n \rightarrow 0$ pro $T \rightarrow \infty$. Potom je možné při tomto označení vyjádřit funkční hodnotu $f(t)$ pomocí nekonečné řady

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn z_n(x-t)} dx,$$

a interpretovat ji jako integrální součet funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jz(x-t)} dx$$

proměnné z na intervalu $(-\infty, \infty)$. Formálním provedením limitního přechodu pro periodu $T \rightarrow \infty$ obdržíme **Fourierův integrální vzorec**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jz(x-t)} dx \right) dz. \quad (10)$$

Před stanovením podmínek, které „zabezpečí“ platnost uvedeného vztahu, uved’me následující definici.

Definice 0.13. Řekneme, že funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná, jestliže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Věta 0.14. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná a $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojitě viz Definice 0.7, potom pravá strana vztahu (10) se rovná*

1. $f(t)$ v každém bodě spojitosti t funkce $f(t)$
2. $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě nespojitosti t funkce $f(t)$.

Různými aspekty Fourierova integrálního vzorce se budeme zabývat v následujícím textu, neboť právě Fourierův integrální vzorec lze chápat jako složení Fourierovy transformace přímé a zpětné.

0.1.1 Zavedení Fourierovy transformace

Definice 0.15. Nechť $f(t)$ je funkce reálné proměnné t (reálná nebo komplexní), která je spolu se svojí derivací $f'(t)$ po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná. Potom je pro všechna reálná ω definována funkce

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (11)$$

kterou nazýváme **Fourierovým obrazem** (spektrém) funkce $f(t)$. Toto přiřazení se nazývá **Fourierovou transformací**, funkce $f(t)$ jejím předmětem, funkce $F(\omega)$ obrazem Fourierovy transformace.

Druhý vztah, který můžeme vysvětlovat tak, že ze známé funkce $F(\omega)$ určíme funkci $f(t)$, tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (12)$$

nazýváme **zpětnou Fourierovou transformací**. Vztah mezi funkcemi $f(t)$ a $F(\omega)$ stručně zapisujeme

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t).$$

Poznámka 1. V literatuře nalezneme i zápis $F(j\omega)$, který je třeba interpretovat jako složenou funkci, kdy vnější složkou je integrál obsahující komplexní proměnnou $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$, za kterou dosadíme vnitřní složku $j\omega$.

Obecně platí, že v případě sudé nebo liché funkce se výše uvedené integrály zjednoduší. Pro funkci $f(t)$, která je spolu se svojí derivací $f'(t)$ po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ je možné jejím definováním na intervalu $(-\infty, 0)$ do **sudé funkce** $f(-t) = f(t)$ zavést tzv. **Fourierovu kosinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

a jejím definováním do **liché funkce** $f(-t) = -f(t)$ zavést tzv. **Fourierovu sinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega.$$

Fourierovu transformaci není možné „použít na libovolné funkce“, neboť užívané integrály nemusí obecně konvergovat. Situaci se zabývá následující věta, která stanoví dostatečnou podmínku existence obrazu Fourierovy transformace, navíc udává podmínku pro funkci komplexní proměnné, kterou musí splňovat obraz Fourierovy transformace reálné funkce.

Věta 0.16. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná, potom obraz Fourierovy transformace $F(\omega)$ existuje a je spojitá funkce, pro kterou platí $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$.*

Poznamejme, že se budeme zabývat i funkcemi komplexní proměnné nesplňujícími uvedenou podmínku, které budou obrazem zobecněných funkcí např. Diracův impuls viz níže. Další věta je analogií tvrzení, které jsme pro periodické funkce spojili s tzv. Parsevalovou rovností.

Věta 0.17. *Nechť $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Potom platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Další vlastnosti uspořádáme pro větší přehlednost do tabulky. Před uvedením věty, která shrne základní vlastnosti Fourierovy transformace připomeňme pojem konvoluce dvou absolutně integrovatelných funkcí.

Definice 0.18. *Nechť jsou funkce $f(t)$, $g(t)$ absolutně integrovatelné. Potom funkci definovanou vztahem*

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau. \quad (13)$$

nazýváme konvolucí funkcí $f(t)$, $g(t)$ a zapisujeme ji $f(t) * g(t)$.

Věta 0.19. *O předmětech Fourierovy transformace (funkce v tabulce vlevo) předpokládáme, že jsou absolutně integrovatelné. Navíc označme $\mathcal{F}f(t) = F(\omega)$, případně $\mathcal{F}g(t) = G(\omega)$. Potom platí*

<i>Věta o</i>	<i>předmět</i>	<i>obraz</i>
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{t}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-jr\omega)F(\omega)$
<i>posunutí obrazu</i>	$\exp(jrt)f(t)$	$F(\omega - r)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
<i>derivaci obrazu</i>	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d \omega^n}$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$

Při zavádění Fourierovy transformace pro funkce nesplňující výše uvedené podmínky nebo pro zo-

becněné funkce postupujeme tak, že uvedenou funkci případně zobecněnou funkci chápeme jako „limitu“ posloupnosti funkcí, které uvedené předpoklady splňují. Fourierův obraz potom chápeme jako limitu obrazů funkcí dané posloupnosti. Takto můžeme nalézt obraz Fourierovy transformace Diracovy distribuce a jejích derivací, ale v těchto konkrétních případech můžeme formálně postupovat i tak, že u Diracovy distribuce využijeme tzv. filtrační vlastnost (2):

$$\mathcal{F}\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (14)$$

Pro derivaci Diracovy delta funkce lze odvodit:

$$\mathcal{F}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^n e^{-j\omega t_0}. \quad (15)$$

Pro funkci jednotkového skoku můžeme přímým výpočtem získat:

$$\mathcal{F}\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{-j}{\omega} \quad (16)$$

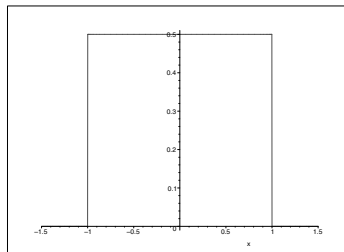
Při výpočtu tohoto integrálu je vhodné si uvědomit, že konverguje pouze pro ω s kladnou reálnou částí.

0.1.2 Užití Fourierovy transformace při určování obrazů některých funkcí

V tomto odstavci využijeme uvedené vlastnosti Fourierovy transformace při výpočtu Fourierových obrazů některých speciálních funkcí (signálů).

Příklad 0.20.

Nalezněte obraz obdélníkového signálu, který má šířku 2ε , výšku h , který je navíc umístěn tak, aby funkce $f(t)$, která jej popisuje byla sudá, tj. signál bude umístěn v intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ viz obrázek vpravo.



Řešení.

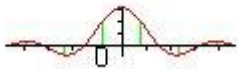
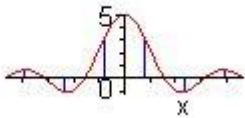
$$\mathcal{F}f(t) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h e^{-j\omega t} dt =$$

$$\frac{h}{-jn\omega} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 2h \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 2h\varepsilon \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon),$$

kde funkce sinc je definována vztahem 9 uvedeným v příkladu při stanovení Fourierova rozvoje sudého obdélníkového signálu, tj. Příkladu 0.10. $\square$

Poznámka 2. Na daném příkladu a Příkladu 0.10 je možné demonstrovat limitní přechod spektra Fourierova rozvoje periodického obdélníkového signálu (s periodou T) (viz příklad 0.10) v obraz Fourierovy

transformace jednoho obdélníkového signálu. Uvažme, že koeficienty c_n Fourierova rozvoje jsou integrály (7) násobené převrácenou hodnotou periody T , která se v limitním přechodu „použije“ k vytvoření dělení vnějšího integrálu ve Fourierově integrálním vzorci. Proto si také zobrazíme modifikované spektrum kdy koeficienty c_n vynásobíme periodou T . V následující tabulce jsou zobrazena pouze spektra modulů, protože argumenty koeficientů c_n jsou nulové. Úhlový kmitočet základní harmonické složky je $\omega = 2\pi/T$.

T	modifikované spektrum	spektrum
4		
16		
64		

Z uvedených spekter je patrné, že pro zvětšující se T roste hustota spekter a pro hodnotu $T = 64$

při zvoleném grafickém znázornění (tloušťka čar) modifikovaného je obraz spektra stejný jako integrál vyjadřující Fourierovu transformaci.

Poznámka 3. Další možností užití obrazu sudého obdélníkového impulsu je ověřit již dříve uvedený Fourierův obraz Diracova impulsu $\delta(t)$. Tuto Diracovu funkci chápeme jako limitní chování jehlové funkce viz Definice 0.1, za kterou volíme obdélníky

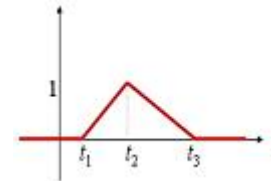
$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (\eta(t - \varepsilon) - \eta(t + \varepsilon)).$$

Využijeme-li výsledek předchozího příkladu dostaneme obraz $\delta(t)$ jako limitu obrazů jednotlivých obdélníkových impulsů, tj.

$$\mathcal{F}\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}\delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\varepsilon} \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 1.$$

Příklad 0.21.

Nalezněte Fourierův obraz tzv. obecného trojúhelníkového impulsu $f(t)$ zadaného grafem, který je mimo interval $[t_1, t_3]$ nulový a vrchol trojúhelníka má pro $t = t_2$ ($t_1 < t_2 < t_3$) hodnotu v .



Řešení. K jeho určení využijeme znalosti druhé zobecněné derivace této funkce z Příkladu 0.3 e) a užijeme také větu o derivaci předmětu a pro obraz $F(j\omega)$ dostáváme rovnici

$$-\omega^2 F(\omega) = \mathcal{F} f_o''(t) = \frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Co po úpravě dává:

$$F(\omega) = -\frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{\omega^2(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Poznamenejme, že pro sudý trojúhelníkový impuls tj, $t_1 = -T$, $t_2 = 0$, $t_3 = T$ lze obraz zapsat jednoduše:

$$F(\omega) = v \frac{T e^{j\omega T} - 2T + T e^{-j\omega T}}{T^2 \omega^2} = v \frac{2(\cos(\omega T) - 1)}{T \omega^2} = v T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 = v T \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} \right)^2$$

□

Příklad 0.22. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a^2 t^2}$. Nejdříve poznamenejme, že funkce má obraz Fourierovy transformace, neboť existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Výpočet tohoto integrálu lze nalézt v literatuře viz [8]. Pro funkci $f(t)$ platí diferenciální rovnice

$$f'(t) = -a^2 2te^{-a^2 t^2} = 2a^2 t f(t)$$

Pro Fourierův obraz této rovnice dostáváme

$$j\omega F(\omega) = \mathcal{F} f'(t) = -2a^2 \mathcal{F} t f(t) = -2a^2 j \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jak vidíme v následující úpravě, jež řeší danou rovnici:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{2a^2} d\omega &= \frac{dF(\omega)}{F(\omega)} \Leftrightarrow \int -\frac{\omega}{2a^2} d\omega = \int \frac{dF}{F} \\ -\frac{\omega^2}{4a^2} + \ln|C| &= \ln|F| \Leftrightarrow F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}, \text{ kde } C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Integrační konstantu C určíme dosazením $\omega = 0$ $C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ a ze vztahu známého z literatury [8]. Celkově tak dostáváme $\mathcal{F} e^{-a^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$.

V daném příkladě jsme využili větu o derivaci předmětu, která umožní převést diferenciální rovnice pro předmět řešení na rovnici bez derivací, kterou je možno obvykle řešit jednodušeji, pro obraz řešení. Uvedený postup je základem příštího odstavce.

0.1.3 Užití Fourierovy transformace při řešení Diferenciálních rovnic

Pro diferenciální případně integro-diferenciální rovnice, jejichž řešení je v technické praxi určeno počáteční podmínkou, to jest řešení existuje na intervalu $\langle t_0, \infty \rangle$, se obvykle používá později probíraná Laplaceova transformace. Proto budeme pomocí Fourierovy transformace řešit rovnici, kde bude řešení definováno pro všechna reálná čísla. V následujícím příkladě se budeme zabývat parciální diferenciální rovnicí aniž bychom se touto problematikou v tomto textu systematicky zabývali. To je umožněno tím, že níže uvedený postup hlubším způsobem teorii parciálních diferenciálních rovnic nevyužívá.

V literatuře známým užitím Fourierovy transformace je řešení diferenciální rovnice vedení tepla v nekonečně dlouhé a tenké tyči, kterou ztotožníme s osou x a popisujeme ji pomocí funkce $u(x, t)$, jejíž hodnota udává teplotu v bodě o souřadnici x a v čase t . Tato funkce vyhovuje tzv. počáteční diferenciální úloze:

$$au''_{xx} = u'_t, \quad u(x, 0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Použitím Fourierovy transformace vzhledem k proměnné x pro každou konstantu t dostaneme obraz $\mathcal{F}u(x, t) = U(\omega, t)$ řešení, což je funkce dvou proměnných ω, t . Použitím této transformace na zadanou rovnici vznikne diferenciální rovnice vzhledem k proměnné t , kterou formálně řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými (předpokládá to tvar funkce $U(\omega, t)$ ve tvaru součinu funkcí obou proměnných):

$$a(j\omega)^2 U = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -a\omega^2 dt \Rightarrow U(\omega, t) = G(\omega) \exp(-a\omega^2 t),$$

kde $G(\omega) = \mathcal{F}g(x)$ je obraz počátečního rozložení $u(x, 0) = g(x)$ teplot v tyči v čase $t = 0$. Při hledání

předmětu využijeme, že obraz konvoluce je součinem obrazů. Nejdříve stanovíme předmět k obrazu $\exp(-a\omega^2 t)$ s využitím Příkladu 0.22 (proměnná obrazu je ω a x je proměnná vzoru, t je parametr), tj.

$$\mathcal{F}^{-1} \exp(-at\omega^2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Rovnice vedení tepla má řešení (tzv. elementární) ve tvaru konvolučního integrálu:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4ta}\right)}{2\sqrt{\pi at}} g(\xi) d\xi.$$

Poznámka 4. Při použití Fourierovy transformace k řešení rovnic se může stát, že uvedeným postupem není možné nalézt všechna řešení (aniž bychom se dopustili chyby), neboť použití Fourierovy transformace omezuje prostor funkcí viz Definice 0.13, které je možno takto získat. Konkrétní příklad je možné nalézt v [8] (Ukázka 7.2).

0.1.4 Slovník Fourierovy transformace

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$	$te^{-at^2}, a > 0$	$-j\frac{\sqrt{\pi}\omega}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} \exp(-a \omega) a > 0$	$\frac{\sin(at)}{\sqrt{ t }}$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{\cos(at)}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$ t e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$	$\sin(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\eta(t)t^n e^{-at}, a > 0, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\pi(\eta(\omega + 1) - \eta(\omega - 1))$

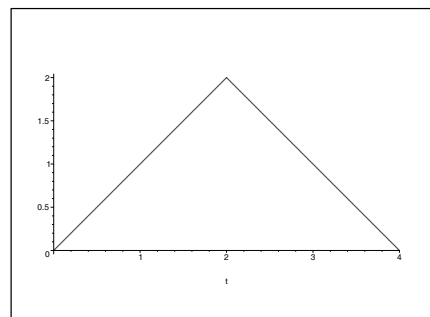
0.2 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Pro uvedené funkce určete jejich Fourierovu trigonometrickou řadu. Uveďte také její komplexní a fázový tvar.

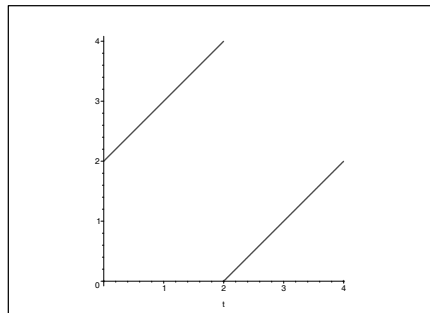
a) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{kde } 0 \leq t \leq 2; \\ 4 - t, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



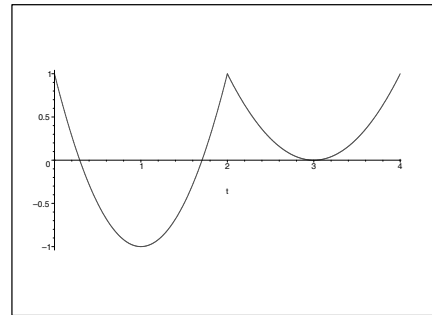
b) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2, & \text{kde } 0 \leq t < 2; \\ t - 2, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



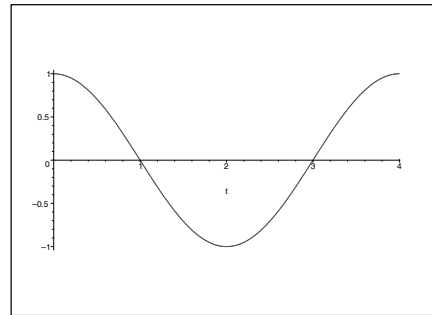
c) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro $t = 10$:

$$f(t) = \begin{cases} 2(t-1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq 2; \\ (t-3)^2, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

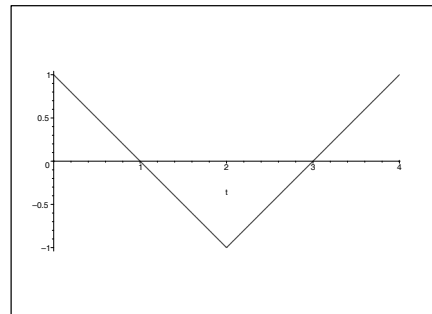


2. Pro uvedené funkce napište jejich rozvoj do sinů a cosinů:

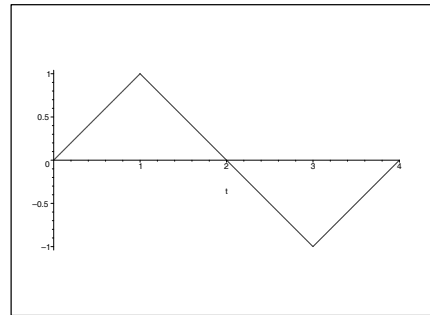
a) $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$



$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 2; \\ t + 3, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



$$c) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 2 - t, & 2 \leq t \leq 3; \\ t - 4, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



Výsledky

1. a) $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2} = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{(2k+1)^2}$, fázový tvar je stejný jako s trigonometrickými funkcemi ($\varphi_n = 0$), $f(10) = f(2) = 2$.
- b) $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2}$, komplexní tvar $2 + \frac{4j}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{2k+1}$, fázový tvar $2 + \frac{2j}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$

$$= f(2) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 2} f(t) \right) = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi t) - \frac{32}{(2k-1)^3 \pi^3} \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2}, \text{ komplexní tvar } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3 \exp(k\pi t)}{k^2 \pi^2} - \frac{16j \exp\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)}{(2k-1)^3}, \text{ fázový} \\ \text{tvar } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{32}{(2k-1)^3 \pi^3} \sin \left(\frac{(2k-1)\pi t}{2} + \pi \right), f(10) = f(2) = 2. \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{a) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n}{\pi(4n^2-1)} \sin(n\pi t), \quad f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi t}{4}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2}$$

$$\text{c) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 \left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{4} - 1 \right)}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{4}$$

Literatura

- [1] Došlý, O.–Došlá, Z. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Brno: MU Brno, 1999. Skriptum.
- [2] Došlý, O.–Došlá, Z. *Metrické prostory*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2000. Skriptum.
- [3] Elaydi S.N. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Verlag 1999.
- [4] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [5] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [6] Kalas, J.–Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2001. Skriptum.
- [7] Kuben, J. *Diferenciální rovnice*. 1. vydání. Brno: VA Brno, 1991. Skriptum.

-
- [8] Melkes, F.–Řezáč, M. *Matematika 2*. 1. vydání. Brno: VUT v Brně, 2003. Skriptum.
- [9] Pírko, Z.–Veit, J. *Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: Alfa Bratislava. 1970.
- [10] Sikorski, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Druhé, změněné a doplněné vydání. Vydání překladu 1. Praha: Academia, 1973. 496 s.
- [11] Šulista, M. *Základy analýzy v komplexním oboru*. Praha: SNTL 1981.
- [12] Veselý, J. *Komplexní analýza*. Praha: UKP Brno, 2000. Skriptum.