

0.1 Komplexní čísla

0.1.1 Základní pojmy

Problematika řešení rovnic např. $z^2 + 1 = 0$, která nemá řešení v oboru reálných čísel vedla k rozšíření číselného oboru na **čísla komplexní** $z = x + jy$, kde $x = \Re z$, $y = \Im z$ jsou reálná čísla, j nazýváme **imaginární jednotkou**¹, pro kterou platí $j^2 = -1$. Pro komplexní číslo z nazýváme číslo $x = \Re z$ **reálnou částí** a $y = \Im z$ **imaginární částí** komplexního čísla z . Sčítání a násobení komplexních čísel je ve shodě s obvyklými pravidly, proto je budeme ilustrovat pouze na příkladě:

$$(3 + j) + 4(1 - 2j) = 7 - 7j \quad (3 + j)(1 - 2j) = 3 + j - 6j - 2j^2 = 3 - 5j + 2 = 5 - 5j.$$

Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Ke komplexnímu číslu $z = x + jy$ nazýváme číslo $\bar{z} = x - jy$ **číslem komplexně sdruženým** a s výhodou je užíváme při dělení komplexních čísel, kdy zlomek rozšíříme jedničkou ve tvaru podílu komplexně sdruženého jmenovatele se sebou samým:

$$\frac{20 - 5j}{2 + j} = \frac{20 - 5j}{2 + j} \frac{2 - j}{2 - j} = \frac{40 - 10j - 20j + 5j^2}{2^2 - j^2} = \frac{25 - 30j}{5} = 5 - 6j$$

¹V matematice bývá zvykem označovat komplexní jednotku písmenem i ; v technické praxi se často používá označování písmenem j .

Lze snadno ověřit, že pro všechna komplexní čísla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí rovnosti

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

Poznamenejme, že $z\overline{z}$ je kladné reálné číslo a ke každému $z = x + jy \in \mathbb{C}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** (nebo také **modul**) $|z|$ vztahem

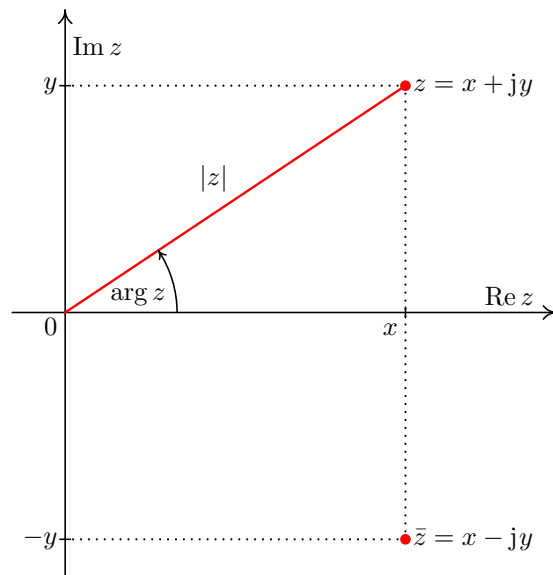
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Interpretujeme-li komplexní čísla jako body v rovině, pak $|z|$ je vzdálenost bodu $z = [x, y]$ od počátku a φ úhel, který svírá průvodič bodu $z = [x, y]$ s kladným směrem reálné osy x . Další možností jak vyjádřit komplexní číslo $z = x + jy \neq 0$ je **goniometrický tvar**

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z),$$

kde úhel $\varphi = \arg z$ nazýváme **argumentem** komplexního čísla z . Tento tvar je vhodný pro geometrickou interpretaci násobení nebo dělení dvou komplexních čísel z_1, z_2 , platí totiž:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| & \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}$$



Této vlastnosti lze s výhodou použít při výpočtu n -té mocniny komplexního čísla:

$$(|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (1)$$

Nevýhodou je nejednoznačnost funkce argument, proto tu hodnotu φ argumentu $\arg z$, pro kterou platí $-\pi < \varphi \leq \pi$ nazveme **hlavní hodnotou argumentu** komplexního čísla z a zapisujeme ji $\text{Arg } z$. Uvedená

nejednoznačnost funkce $\arg z$ se projeví při určení n -té odmocniny čísla z . Ze vztahu 1 a z rovnosti $(\sqrt[n]{z})^n = z$ plyne $n \arg \sqrt[n]{z} = \arg z$, což má za důsledek existenci n různých $\text{Arg}_i \sqrt[n]{z}$, které výše uvedený vztah splňují.

Dále zavádíme také **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z) = |z|e^{j \arg z}.$$

Tento zápis „přirozeně“ reflektuje výše uvedenou skutečnost a vlastnosti exponenciální funkce

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{j \arg z_1} |z_2|e^{j \arg z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Využití uvedených pojmů ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 0.1. Nalezněte řešení kvadratické rovnice

$$(1 + j)z^2 - (3 + j)z + 6 - 2j = 0.$$

Postup řešení kvadratické rovnice je stejný i v oboru komplexních čísel jako pro reálná čísla, proto nejdříve vypočteme diskriminant rovnice:

$$D = (-(3 + j))^2 - 4(1 + j)(6 - 2j) = 9 + 6j + j^2 - 4(6 + 4j - 2j^2) = -24 - 10j$$

Platí $|D| = \sqrt{(-24)^2 + (-10)^2} = \sqrt{676} = 26$ a diskriminant můžeme zapsat ve tvaru:

$$D = 26 \left(\frac{-24}{26} + j \frac{-10}{26} \right) \text{ odtud } \cos \arg D = \frac{-24}{26} \wedge \sin \arg D = \frac{-10}{26}.$$

Pro „přesný“ výpočet algebraického tvaru $\cos((\arg D)/2)$ a $\sin((\arg D)/2)$ využijeme známých vzorců

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \quad \text{a} \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Ze znamének $\cos \arg D$, $\sin \arg D$ určíme, že pro hlavní hodnotu argumentu $\arg D$ platí $-\pi/2 < \arg D < 0$ a pro $\arg D/2$ dostáváme dvě rovnocenné možnosti

$$\arg D/2 \in (-\pi/2 + 2k\pi, 2k\pi) \quad \text{a} \quad \arg D/2 \in (\pi/2 + 2k\pi, (2k+1)\pi), \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo,}$$

druhá odmocnina diskriminantu má dvě hodnoty, pro které ve výše uvedených vzorcích odstraníme absolutní hodnotu (v návaznosti na $\arg D/2$) a určíme $\cos((\arg D)/2)$ a $\sin((\arg D)/2)$:

$$\cos((\arg D)/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - 24/26}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \sin((\arg D)/2) = \mp \sqrt{\frac{1 + 24/26}{2}} = \mp \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Odtud dostáváme $\sqrt{D} = \sqrt{26} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{26}} \mp j \frac{5}{\sqrt{26}} \right) = \pm(1 - j5)$ a po dosazení do vzorce pro řešení kvadratické rovnice získáme její kořeny:

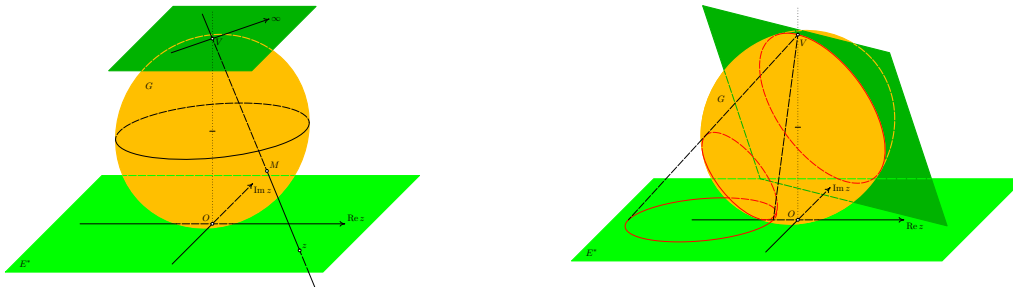
$$z_{12} = \frac{3 + j \pm (1 - 5j)}{2(1 + j)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4-j4}{2(1+j)} = \frac{4(1-j)^2}{2 \cdot 2} = -2j \\ \frac{2+j6}{2(1+j)} = \frac{2(1+j3)(1-j)}{4} = 2 + j \end{array} \right.$$

Poznámka 0.2. Hlavní hodnotu argumentu $\text{Arg } z$ je možné vyjádřit takto:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \pi, & \text{pro } z = x + jy, \text{ kde } x < 0 \text{ a } y = 0, \\ 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{pro } z = x + jy \neq 0, \text{ jinak .} \end{cases} \quad (2)$$

0.1.2 Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod

Množinu komplexních čísel rozšíříme na množinu $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$. Zdůvodnění tohoto postupu můžeme opřít o stereografickou projekci, která zobrazuje body komplexní roviny na body koule jednoznačně pomocí přímků procházejících daným bodem roviny a nejvyšším bodem koule (vrcholem, severním pólem). Při tomto zobrazení zůstane na kouli neobsazený právě tento bod, který ztotožníme s ∞ . Důležitou vlastností tohoto zobrazení je, že kružnice na kouli neprocházející vrcholem koule se zobrazí na kružnici v rovině. To znamená, že se kruhová okolí na kouli zobrazují na kruhová okolí v rovině. Proto okolím bodu ∞ rozumíme vnějšek kružnice se středem v počátku.



Doplnění množiny $\mathbb{C}$ „pouze“ jedním ∞ přináší na rozdíl od množiny reálných čísel možnost zavést i některé početní operace s ∞ (např. $\frac{z}{0} = \infty$ pro $z \neq 0$). Tyto jsou uvedeny v následující definici.

Definice 0.3. Pro počítání s nekonečnem definujeme operace takto:

Pro $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$ ($\infty \pm \infty$ není definováno);

Pro $z \in \mathbb{C}$ $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ ($0 \cdot \infty$ není definováno);

Pro $z \in \mathbb{C}$ $z/\infty = 0$ (tedy $0/\infty = 0$);

Pro $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ $\infty/z = \infty$ (tedy $\infty/0 = \infty$);

Pro přirozené číslo $\infty^n = \infty, \infty^{-n} = 0, 0^{-n} = \infty$;

0.1.3 Množiny komplexních čísel

Nyní zavedeme označení a analytické vyjádření důležitých množin v komplexní rovině:

Otevřeným kruhem $U_\varepsilon(z_0)$ rozumíme množinu všech komplexních čísel z , které mají od bodu z_0 vzdálenost menší než ε tedy: $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, To jest množina množina $z = x + jy$ pro něž platí:

$$|z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Hranicí této množiny je kružnice $K_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$, kterou můžeme ztotožnit s množinou řešení rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$. Pro dvojici reálných čísel $0 \leq \epsilon < \varepsilon$ množinu $P_{\epsilon\varepsilon}(z_0) = \{w \in \mathbb{C}; \epsilon < |z - z_0| < \varepsilon\}$, nazýváme **prstencem**. V případě volby $\epsilon = 0$ budeme prstenec $P_{0,\varepsilon}(z_0)$ zapisovat pouze symbolem $P_\varepsilon(z_0)$.

Obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + \varepsilon = 0,$$

kde $z_0 = \frac{k}{2}(a + jb)$, $\varepsilon = kc$, kde $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo. Nahradíme-li rovnost nerovností dostáváme rovnici vymezující polorovinu.

Množiny $U_\varepsilon(z_0)$ a $P_\varepsilon(z_0)$ jsou ε -ovým **okolím** a **ryzím okolím bodu z_0** . Budeme-li hovořit obecně o okolí budeme používat i označení $U(z_0)$ a $P(z_0)$. Poznamenejme, že zavedeme-li vzdálenost dvou komplexních čísel jako modul jejich rozdílu můžeme používat dříve zavedené pojmy jako otevřená, uzavřená množina dále uzávěr množiny ($\bar{A}$), hranice množiny (∂A). Množiny A, B nazveme **oddělené**, jestliže platí $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$. Množina se nazývá **souvislá**, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených

množin. Otevřenou souvislou množinu nazýváme **oblastí**. Komponentou množiny je každá její maximální část. Oblast nazveme **n -násobně souvislou**, jestliže je její komplement tvořen právě n komponentami. Pro $n = 1$ nazýváme oblast **jednoduše souvislou**.

0.2 Posloupnosti, řady, mocninné řady

Jednou z pasáží, kdy je poměrně snadné přenést známé výsledky z reálné analýzy na komplexní čísla $z \in \mathbb{C}$ jsou posloupnosti, řady, mocninné řady. Jedná se definice posloupnosti, vět o existenci nejvýše jedné limity posloupnosti, vět o součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou posloupností, kdy je možné ve formulacích pouze nahradit reálné číslo pouze číslem komplexním. Podobně obdržíme i analogické výsledky pro řady komplexních čísel s výjimkou kritérii konvergence řad s kladnými členy (relace srovnání se pro komplexní čísla nezavádí). Výsledky s absolutní konvergencí modifikujeme nahrazením absolutní hodnoty jeho „rozšířením na $\mathbb{C}$ “ – velikostí komplexního čísla.

Příklad 0.4. Rozhodněte o absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Tato řada je geometrickou řadou s kvocientem $q = z$ a pro $|z| < 1$ konverguje absolutně platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Využijeme-li skutečnosti, že reálná resp. imaginární část součtu je součtem reálných resp. imaginárních částí členů řady spolu s goniometrickým tvarem $z = r(\cos \alpha + j \sin \alpha)$, odvodíme pro $|r| < 1$ součty dvou reálných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha + j \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \Im \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)} \frac{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha}{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \Re \frac{(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)}{(1 - r \cos \alpha - jr \sin \alpha)(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)} = \frac{1 - r \cos \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

0.2.1 Mocninné řady

Situace je analogická i pro mocninné řady. Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ nastane jedna ze tří následujících možností:

1. řada konverguje pouze ve svém středu z_0 ,
2. řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
3. existuje reálné číslo $0 < r$ (poloměr mocninné řady) takové, že řada konverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| < r$ a diverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| < r$.

Výše uvedené číslo r nazýváme poloměr a platí

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (3)$$

Poznamenejme, že z existence $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ plyne také existence $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ a jejich rovnost a navíc existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ je tato rovna $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

0.3 Funkce reálné proměnné

Definice 0.5. **Funkcí reálné proměnné** rozumíme každé zobrazení $z(t) = x(t) + jy(t)$ podmnožiny reálných čísel do $\mathbb{C}$. Řekneme, že funkce $z(t)$ je **spojitá** je-li dvojice reálných funkcí spojitá. Řekneme, že funkce $z(t)$ má **derivaci**, jestliže funkce $x(t)$, $y(t)$ mají derivaci a definujeme $z'(t) = x'(t) + jy'(t)$.

Ukážeme si některé interpretace funkce reálné proměnné.

- Impedance sériového RL obvodu je funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ podle vztahu

$$Z(\omega) = R + j\omega L.$$

Podobně pro sériový RC obvod je impedance funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ definovaná vztahem

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

- Další ukázkou využití funkce reálné proměnné je zavedení komplexní charakteristiky harmonických kmitů, které popisují funkce

$$F(t) = F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{resp.} \quad F(t) = F \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{resp.} \quad F(t) = F e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{F} e^{j\omega t},$$

kde $\hat{F} = F e^{j\varphi}$ nazýváme komplexní amplitudou, reálné číslo F je amplitudou kmitů a $\varphi = \arg \hat{F}$ se nazývá fázový posun. S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla snadno pro nenulový součet dvou komplexních kmitů

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \hat{F}_1 e^{j\omega t} + \hat{F}_2 e^{j\omega t} = (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) e^{j\omega t},$$

odvodíme, že má komplexní amplitudu ve tvaru součtu komplexních amplitud tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

- Funkce reálné proměnné bývá často interpretována jako pohyb v Gaussově rovině, neboť proměnnou t interpretujeme jako čas a dvojici $[x(t), y(t)]$ jako souřadnice bodu v čase t . Tato interpretace tvoří základ pro zavedení pojmu křivka.

0.4 Funkce komplexní proměnné

Definice funkce komplexní proměnné musí zohlednit fakt, že některé elementární funkce nejsou prosté a k nim inverzní funkce obecně neexistují viz Příklad 0.1.

$$\sqrt{-24 - 10j} = \pm(1 - 5j) \Leftrightarrow (\pm(1 - 5j))^2 = -24 - j10.$$

Proto v komplexním oboru připouštíme obecnější definici.

Definice 0.6. Je-li ke každému komplexnímu číslu $z = x + jy \in G \subseteq \mathbb{S}$ přiřazeno nějakým předpisem f alespoň jedno komplexní číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, řekneme, že na množině G je definována **komplexní funkce komplexní proměnné z** a tuto skutečnost zapisujeme vztahem $w = f(z)$. Množinu $D(f) = G$ nazýváme **definiční obor** funkce $f(z)$. Množinu $Hf = \{w = f(z) \mid z \in Df\}$ nazýváme **oborem hodnot** funkce $f(z)$. Je-li $Hf \subseteq \mathbb{C}$ nazýváme funkci $f(z)$ **konečnou**.

Jestliže je funkce zobrazení tj. přiřazuje každému číslu $z \in Df$ právě jedno číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, říkáme, že funkce $f(z)$ je **jednoznačná** a můžeme ji vyjádřit pomocí dvojice reálných funkcí:

$$w = f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Funkci $u(x, y)$ nazýváme **reálná část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Re w$ nebo $\Re f(z)$, funkci $v(x, y)$ nazýváme **imaginární část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Im w$ nebo $\Im f(z)$.

Jestliže funkce $f(z)$ není jednoznačná, říkáme, že je **mnohoznačná**. Je-li $f(z)$ funkce mnohoznačná budeme jednoznačnou funkci $\widehat{f}(z)$ nazývat **jednoznačnou větví funkce** $f(z)$, jestliže platí $D\widehat{f} \subseteq Df$ a $\widehat{f}(z) \in f(z)$ pro všechna $z \in D\widehat{f}$.¹

Příkladem dvouznačné funkce je druhá odmocnina $\sqrt{z}$, kdy každému $z \neq 0$ jsou přiřazeny 2 hodnoty. Funkci $\sqrt{z}$ můžeme chápat jako sjednocení dvou jednoznačných větví

$$\widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z/2\} \quad \widehat{\widehat{\sqrt{z}}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z/2 \pm \pi\},$$

kde znaménko před π volíme tak, že je opačné než u $\Im w$. Obecně je pro přirozené n funkce $\sqrt[n]{z}$ n -značnou funkcí.

V dalším textu budou tvrzení o komplexních funkcích $f(z)$ formulována pomocí vlastností dvojice reálných funkcí dvou proměnných $\Re f = u(x, y)$ a $\Im f = v(x, y)$. Z toho vyplývá nutnost umět najít reálnou a imaginární složku dané funkce. Z důvodu stručnosti budeme v dalším místo označování $u(x, y)$ a $v(x, y)$ často používat zkrácené označování u a v .

Příklad 0.7. *Určení reálné a imaginární části funkce $f(z)$*

Je dána komplexní funkce $w = z^2 + jz$. Najděte její reálnou a imaginární část.

¹Jestliže je $Df \subseteq \mathbb{R}$, řekneme, že na množině Df je definována **komplexní funkce reálné proměnné z** . Podobně můžeme definovat **reálnou funkci komplexní proměnné**.

Řešení. Komplexní číslo $z = x + jy$ je v algebraickém tvaru viz 0.6. Proto

$$\begin{aligned} w = z^2 + jz &= (x + jy)^2 + j(x + jy) = x^2 + 2jxy + j^2y^2 + jx + j^2y = \\ &= x^2 + 2jxy - y^2 + jx - y^2 = x^2 - y^2 - y + j(2xy + x) \end{aligned}$$

Reálná část hledané funkce je proto $u = \Re w = x^2 - y^2 - y$ a imaginární část je $v = \Im w = 2xy + x$. Definičním oborem zadané funkce může být celá množina $\mathbb{C}$, resp. libovolná její podmnožina. $\square$

0.4.1 Grafické znázornění funkce komplexní proměnné

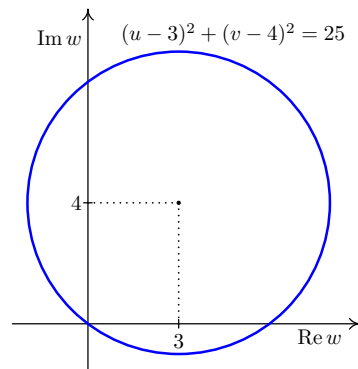
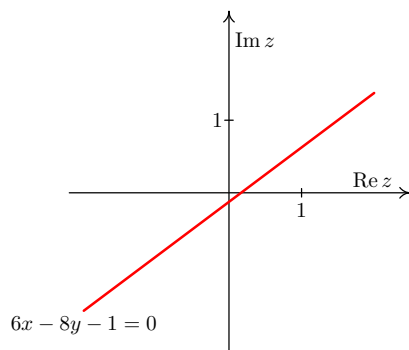
Vzhledem k tomu, že kartézský součin $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ má čtyřrozměrný geometrický model vzniká problém s grafickým znázorněním komplexních funkcí. Zpravidla volíme model dvou Gaussových rovin, první obsahujících Df , označujeme z , druhou na zobrazování funkčních hodnot, označujeme w . Charakter funkce pak demonstrujeme tak, že ke zvolené množině A (bod, křivka, oblast...) ukážeme odpovídající množinu $f(A)$ v rovině w . V případě více množin je můžeme ztotožnit popisky nebo odpovídající množiny spojit šipkami. Některé funkce realizují známá zobrazení rovin. Například funkce $f(z) = z + a$ realizuje translaci (posunutí) o vektor $(\Re a, \Im a)$, otočení roviny se středem v počátku o úhel α realizuje funkce $f(z) = az$, kde $|a| = 1$ a $\arg a = \alpha$. Funkce $f(z) = \bar{z}$ realizuje osovou symetrii okolo reálné osy, dále funkce $f(z) = 1/z$ realizuje složení dvou zobrazení a sice kruhovou inverzi v rozšířené rovině $\mathbb{S}$ (vnitřek kruhu se středem v počátku se zobrazí na jeho vnějšek a naopak) s výše zmíněnou osovou symetrií kolem osy $\Re z$. Využití funkce $f(z) = 1/z$ souvisí v elektrotechnice s pojmem admitance [8, str.58].

Příklad 0.8. Graficky znázorněte přímku $6x - 8y - 1 = 0$ a její obraz funkcí $f(z) = \frac{1}{z}$.

Řešení. Vyjádříme $x = \frac{u}{u^2 + v^2} \wedge y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$ a dosazením do rovnice přímky dostaneme

$$\frac{6u}{u^2 + v^2} - \frac{-8v}{u^2 + v^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6u + 8v - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow (u - 3)^2 + (v - 4)^2 = 25,$$

rovnici kružnice se středem $3 + j4$ o poloměru 5. Tomu odpovídá obrázek:



Složením výše uvedených funkcí můžeme vytvořit lineárně lomenou funkci

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Protože tato funkce má značný význam v elektrotechnice, při popisu globálních charakteristik elektrostatických polí viz [8, str.58], uvedeme některé důležité vlastnosti této funkce.

- $f(z)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbb{S}$ na sebe ($f(-d/c) = \infty$, $f(\infty) = a/c$).
- Tato funkce zobrazuje množinu všech kružnic a přímek na sebe.
- pro libovolné body z_1, z_2, z_3, z platí

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} : \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Pomocí těchto vlastností lze odvodit koeficienty lineárně lomené funkce na základě předem zvolených geometrických atributů dané funkce.

Příklad 0.9. Graficky znázorněte funkci $w = u + jv = \frac{z - 1 - j}{z + 1 - j}$, tak, že zobrazíte systém přímek procházejících bodem $z_0 = 1 + j$ a systém soustředných kružnic se středem v tomto bodě.

Řešení. Budeme postupovat analogicky s předchozím případem. Proměnné z a w nahradíme proměnnými x , y a u , v :

$$u + jv = \frac{x + jy - 1 - j}{x + jy + 1 - j} \Leftrightarrow x = \frac{1 - u^2 - v^2}{(u - 1)^2 + v^2} \quad y = \frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2},$$

Jejich dosazením do rovnic křivek v rovině z získáme rovnice jejich obrazů těchto křivek v rovině w .

Pro přímky $k(x - 1) = y - 1$ dostáváme rovnice kružnic $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k^2}$.

Poznamenejme, že pro všechna k kružnice procházejí dvěma body 0 a 1.

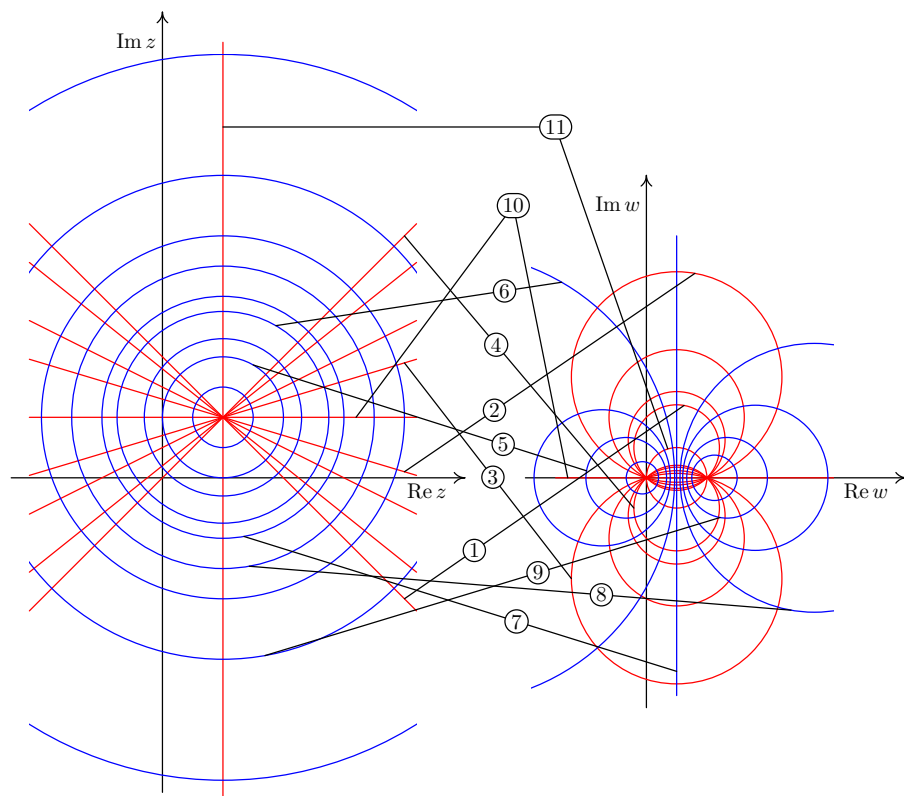
Pro kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = k^2$ dostáváme 2 možnosti:

$$\left(\frac{1 - v^2 - u^2}{(u - 1)^2 + v^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2} - 1\right)^2 = k^2$$

1. pro $k = 2$ jde rovnici přímky $u = 1/2$,

2. pro $k \neq 2$ to jsou rovnice kružnic: $\left(u - \frac{k^2}{k^2 - 4}\right)^2 + v^2 = \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2}$.

Následující obrázek ukazuje několik zobrazovaných křivek. Zároveň je obrázek vpravo ve shodě s interpretací elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken, v němž modré čáry vyznačují ekvipotenciály a červené silokřivky podobně jako obrázek vlevo lze interpretovat jako pole jednoho nabitého vlákna.



- | | | | |
|---------------|---------------|--------------|------------------|
| 1. $k = -1$ | 4. $k = 1$ | 7. $k = 2$ | 10. $k = 0$ |
| 2. $k = -0,3$ | 5. $k = 1$ | 8. $k = 2,5$ | 11. $k = \infty$ |
| 3. $k = 0,3$ | 6. $k = 1,75$ | 9. $k = 4$ | |

□

Příklad 0.10. V polovině $\Im m z \geq 0$ proveďte grafické znázornění funkce $f(z)$, která je jednoznačnou větví funkce $\sqrt{z}$ určené podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$, pro polopřímky $x = k \wedge y > 0$ a přímky $y = l$, kde $k \geq 0$ a l jsou reálné konstanty. (Opět ortogonální křivky.)

Řešení. V tomto příkladě můžeme postupovat tak, že určíme reálnou $u = \Re f(z)$ a imaginární $v = \Im f(z)$ část funkce a dosazením $x = k$ resp. $y = l$ dostaneme zobrazení daných přímk.

Nejdříve určíme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $\cos \text{Arg } z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ z goniometrického tvaru čísla $z = x + jy$:

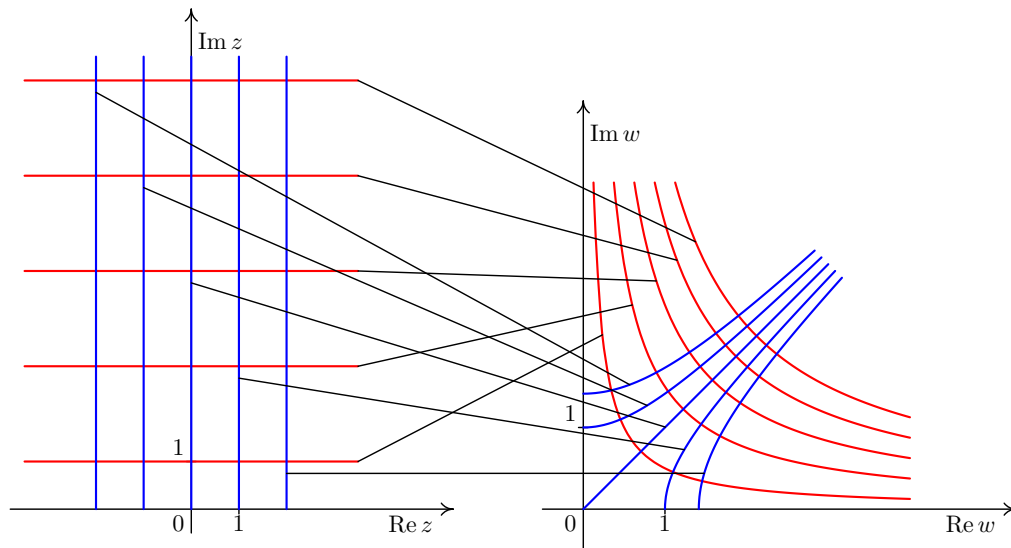
$z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ a z nich $|f(z)|$ a $\cos \text{Arg } f(z)$, $\sin \text{Arg } f(z)$. Platí totiž $|f(z)| = \sqrt{|z|} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ a $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } f(z)$. Pro $y \neq 0$ dostáváme

$$\cos \text{Arg } f(z) = \sqrt{\frac{1 + \cos \text{Arg } z}{2}} = \frac{\sqrt{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} + x \right)}}{2 \sqrt[4]{x^2 + y^2}}, \sin \text{Arg } f(z) = \text{sgn}(y) \frac{\sqrt{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right)}}{2 \sqrt[4]{x^2 + y^2}},$$

Dosazením do goniometrického tvaru dostaneme $f(z)$:

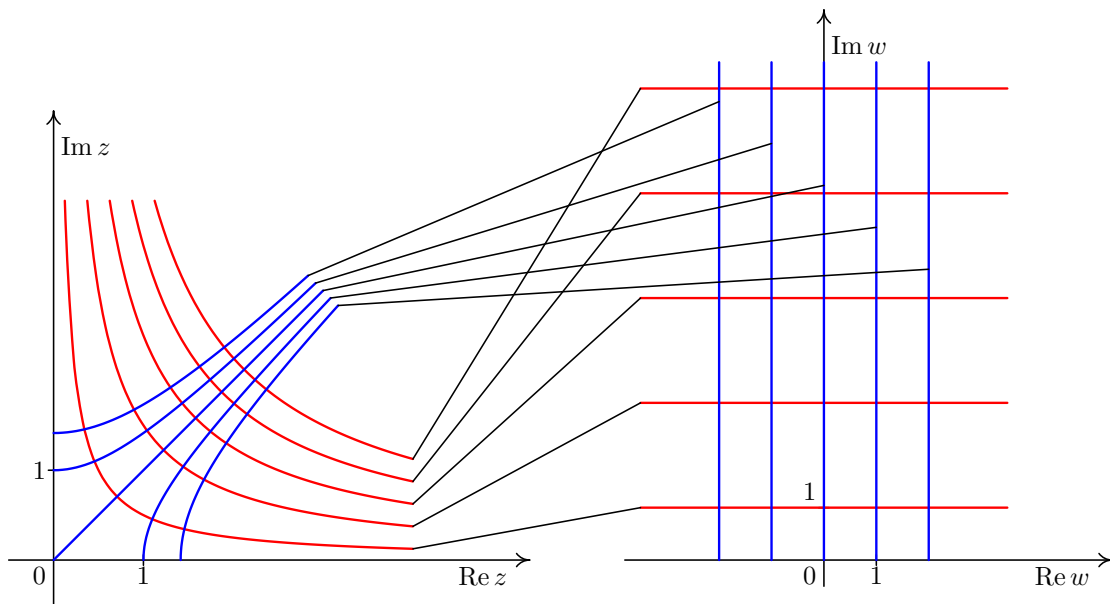
$$f(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + j \text{sgn}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}.$$

Pro $y = 0$ dostáváme $f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{pro } x > 0; \\ j\sqrt{-x}, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$ Pro $y > 0$ obrazy polopřímek $x = \text{const.}$ a přímek $y = \text{const.} > 0$ budou v prvním kvadrantu jako části grafů hyperbol:



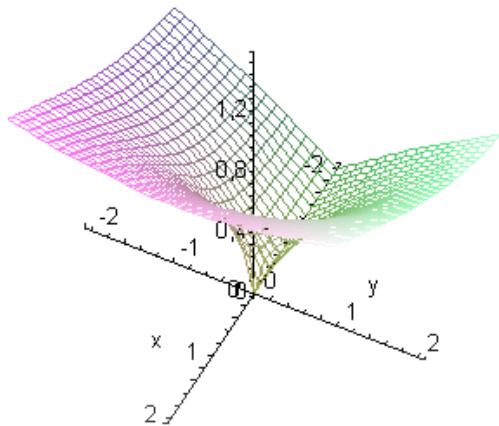
I v tomto příkladě je obrázek vpravo interpretovat jako ekvipotenciály (modré hyperboly) a silokřivky (červené hyperboly) elektrostatického pole dvou na sebe kolmých stěn. $\square$

Druhou možností jak zobrazovat funkci komplexní proměnné $f(z) = f(x + jy)$ je dvojice funkcí dvou proměnných $\Re f(x + jy) = u(x, y)$ a $\Im f(x + jy) = v(x, y)$. Výhodou tohoto způsobu zobrazení je možnost snadného určení některých vlastností jako je např. spojitost, diferencovatelnost ... Situaci můžeme předvést na jednoznačné větvi funkce $\sqrt{z}$ určené podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$.

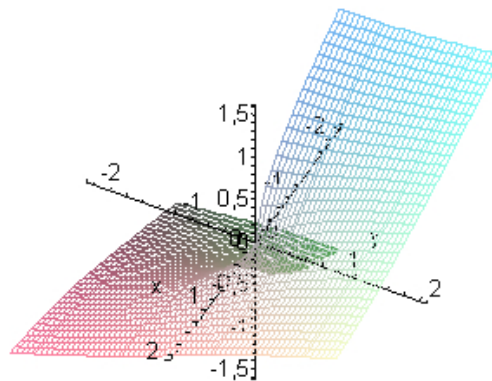


Z grafu je patrné, že jednoznačná větev funkce $\sqrt{z}$ určená podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ má imaginární část nespojitou na záporné části reálné osy a reálná část není tamtéž diferencovatelná.

$u(x,y)$ reálná část odmocniny



$v(x,y)$ imaginární část odmocniny



0.5 Limita, spojitost

V dalším textu bude platit úmluva, že budeme o konečných funkcích obecně předpokládat jejich jednoznačnost, nebude-li zdůrazněn opak, neboť budeme převážně pracovat s konečnými a jednoznačnými funkcemi (zobrazeními) a také proto, abychom dosáhli co největší analogie s učebním textem Matematika 1 pro první semestr.

Definice 0.11. Nechť z_0 je hromadným bodem množiny $Df \subseteq \mathbb{S}$. Dále nechť $U(z_0)$ je okolí bodu z_0 . Řekneme, že **funkce $f(z)$ má v bodě z_0 limitu w_0 vzhledem k množině M** , jestliže ke každému kruhovému okolí $U(w_0)$ existuje alespoň jedno prstencové okolí $P(z_0)$ takové, že pro všechna $z \in P(z_0) \cap M$ platí:

$$f(z) \in U(w_0).$$

Tuto skutečnost zapíšeme $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0$.

Vynecháme-li v definici množinu M a nahradíme-li předpoklad $z \in P(z_0) \cap M$ pouze $z \in P(z_0)$ (totéž jako volba $M = \mathbb{C}$) získáme tak definici **limity funkce $f(z)$ v bodě z_0** a tuto zapisujeme jako $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Věta 0.12. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ limitu $u_0 + jv_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě $[x_0, y_0]$ limitu a pro reálnou část je tato rovna u_0 a pro imaginární část je rovna v_0 .*

Tato věta umožňuje přenést známé věty o limitách funkcí dvou reálných proměnných pro funkce komplexní proměnné, jedná se především o věty jako jsou věty o existenci nejvýše jedné limity součtu, rozdílu, součinu, podílu.

Definice 0.13. Nechť $w = f(z)$ je komplexní funkce a dále buď $z_0 \in Df$. Jestliže existuje limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a platí, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

řekneme, že funkce $w = f(z)$ je **spojitá v bodě** z_0 .

O spojitosti funkce $f(z)$ v bodě lze ve shodě s Větou 0.12 rozhodnout podle chování její reálné a imaginární části.

Věta 0.14. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je spojitá v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojitě v bodě $[x_0, y_0]$.*

0.6 Derivace funkce komplexní proměnné

Pojem *derivace funkce komplexní proměnné* se opět zavádí podobně jako v reálném oboru pro funkci jedné reálné proměnné.

Definice 0.15. Nechť je funkce $f(z)$ definována na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0 . **Derivací funkce $f(z)$ v bodě z_0** definujeme jako limitu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (4)$$

Derivaci funkce $f(z)$ v bodě z_0 značíme $f'(z_0)$. Existuje-li derivace $f'(z)$ v nějakém okolí $U(z_0)$, pak se funkce nazývá **holomorfní¹ v bodě $f(z_0)$** . Existuje-li derivace $f'(z)$ v každém bodě oblasti G , pak řekneme, že funkce $f(z)$ je **holomorfní** na G .

Formální definice derivace je prakticky totožná s definicí v reálném oboru, proto v mnohých příkladech můžeme postupovat analogicky, např. při nalezení derivace funkce $w = z^n$.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h-z) \sum_{i=1}^n (z+h)^{i-1} z^{n-i}}{h} = nz^{n-1}$$

I když je formální definice derivace prakticky totožná s definicí v reálném oboru, musíme mít na paměti, že celá řada komplexních funkcí – např. funkce $w = \bar{z}$ – nemá derivaci nebo má jiné vlastnosti v návaznosti na jiné vlastnosti funkcí viz např. již zmiňovaná mnohoznačnost funkcí. Pro praktické ověřování, zda funkce má nebo nemá derivaci, slouží následující věta:

¹Často se také používá označení *analytická* nebo *regulární*.

Věta 0.16. *Nechť je dán bod $z_0 = x_0 + jy_0$. Označme $P = [x_0, y_0]$. Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě z_0 derivaci právě tehdy, když*

1. *funkce $\Re f(z) = u(x, y)$, $\Im f(z) = v(x, y)$ mají v bodě P totální diferenciál,*
2. *platí tzv. Cauchy-Riemannovi podmínky¹*

$$u'_x(P) = v'_y(P) \quad u'_y(P) = -v'_x(P). \quad (5)$$

Funkce $f(z)$ má derivaci v bodě z_0 ve tvaru

$$f'(z_0) = u'_x(P) + jv'_x(P) = v'_y(P) - ju'_y(P). \quad (6)$$

Je možné odvodit i další tvary Cauchy-Riemannových podmínek v závislosti na použitém tvaru (goniometrický, exponenciální) závislé a nezávislé proměnné viz [8, str 53.]

Příklad 0.17. Pro níže uvedené funkce nalezněte body, ve kterých existuje derivace a určete ji.

1. Najděte derivaci funkce $w = \bar{z} = x - jy$.

¹někdy jsou také nazývány d'Alambert-Eulerovy podmínky

Řešení. Nejprve nalezneme reálnou a imaginární část zadané funkce. Zřejmě je $w = \bar{z} = x - jy$, tj. $u = \Re w = x$ a $v = \Im w = -y$.

Určíme příslušné parciální derivace požadované ve Větě 0.16. Dostáváme: $u'_x = 1$, $u'_y = 0$, $v'_x = 0$, $v'_y = -1$. Vidíme, že podmínky (5) nejsou splněny pro žádný bod $z_0 = x_0 + jy_0$, resp. $P_0 = [x_0, y_0]$. Derivace funkce $w = \bar{z}$ tedy neexistuje v žádném bodě definičního oboru. $\square$

2. Najděte derivaci funkce $w = |z|^2$.

Řešení. Protože $w = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$, máme $u = \Re w = x^2 + y^2$ a $v = \Im w = 0$.

Určíme parciální derivace požadované ve Větě 0.16: $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $v'_x = v'_y = 0$. Vidíme, že podmínky (5) jsou splněny pouze pro bod $z_0 = 0$, resp. $P_0 = [0, 0]$. Pro derivaci funkce $w = |z|^2$ platí, že existuje pouze v jediném bodě $f'(0) = 0$. V reálném oboru má daná funkce $|x|^2 = x^2$ derivaci pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Podobně jako ve výše uvedeném odvození derivace funkce z^n z definice můžeme postupovat a odvodit i stejná pravidla jako v reálném oboru pro derivaci **lineární kombinace funkcí**, **součinu** a **podílu** dvou funkcí. Totéž platí také pro **derivování složené funkce** a **funkce inverzní**.

0.6.1 Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné

Uvažujme křivky jejichž grafy, prochází bodem $z_0 = x_0 + jy_0$ a vyhovují rovnicím:

$$u(x, y) = u_0 \quad v(x, y) = v_0.$$

Z diferenciálů těchto rovnic dostáváme rovnice tečných přímk k daným křivkám:

$$u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

S využitím Cauchy-Riemannových podmínek dostáváme, že normálové vektory těchto přímk $(u'_x(x_0, y_0), u'_y(x_0, y_0))$, $(v'_x(x_0, y_0), v'_y(x_0, y_0))$ jsou na sebe kolmé, neboť mají nulový skalární součin

$$u'_x(x_0, y_0)v'_x(x_0, y_0) + u'_y(x_0, y_0)v'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Porovnáním geometrických charakteristik křivek a jejich obrazů odvodíme geometrickou interpretaci derivace funkce.

Protože argument součinu je roven součtu argumentů dostáváme

$$\arg \Phi'(t_0) = \arg f'(\varphi(t_0)) + \arg \varphi'(t_0),$$

což znamená, že tečný vektor obrazu křivky je proti tečnému vektoru křivky otočený o úhel $\arg f'(z_0)$ a tato vlastnost nezávisí na volbě křivky. Analogicky porovnáním modulů

$$|\Phi'(t_0)| = |f'(\varphi(t_0))||\varphi'(t_0)|,$$

dostáváme, že poměr délek je dán tzv. koeficientem dilatace $f'(z_0)$. Otočení o konstantní úhel $\arg f'(z_0)$ má důsledek, že zobrazení realizované holomorfní funkcí $w = f(z)$ zachovává úhly, pod kterými se křivky vzájemně protínají viz Příklady 0.9 0.10, kdy se ortogonální systémy křivek transformují opět na ortogonální systémy (ekvipotenciály a silokřivky).

0.6.2 Holomorfní a harmonické funkce

Nechť reálná část $\Re f(x + jy) = u(x, y)$ resp. imaginární část $\Im f(x + jy) = v(x, y)$ funkce $f(z)$ mají parciální derivace druhého řádu a sama má derivaci, snadno s použitím Cauchy-Riemannových podmínek a Schwarzovy věty o záměně derivování odvodíme, že vyhovují tzv. **Laplaceově rovnici**

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0. \quad (7)$$

Definice 0.18. Řekneme, že funkce $u(x, y)$ je **harmonická**, jestliže má spojitě parciální derivace druhého řádu a vyhovuje rovnici (7). O dvojici harmonických funkcí řekneme, že jsou **sdužené harmonické funkce**, jestliže pro ně platí Cauchy-Riemannovy podmínky (5).

Jsou-li funkce $u(x, y), v(x, y)$ sdužené harmonické funkce potom funkce $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je holomorfní. K dané harmonické funkci u ní harmonicky sdužená je určená jednoznačně až na aditivní konstantu.

Tuto funkci můžeme nalézt s využitím Cauchy-Riemannových podmínek, neboť tyto určí první parciální derivace sdužené funkce. Při určování této funkce můžeme postupovat tak, že jednu rovnici integrujeme

podle podle té proměnné podle níž je neznámá funkce derivována (při integrování považujeme druhou proměnnou za konstantu). V získané rovnici je neznámá funkce určena až na neznámou funkci druhé proměnné (při zpětném derivování by měla nulovou derivaci). Tuto funkci určíme z rovnice, kterou získáme z obdržené rovnice derivováním podle druhé proměnné než podle které jsme integrovali a porovnáním s parciální derivací, jež je určena z Cauchy-Riemannových podmínek. Uvedený postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 0.19. Ověřte, že funkce $v(x, y) = e^{-y} \sin x + 2xy + 3$ je imaginární složkou holomorfní funkce $f(x + jy)$ a tuto funkci najděte, jestliže $f(0) = 2 + 3j$.

Řešení. Ověříme, že funkce $v(x, y)$ je harmonická:

$$\begin{aligned} v'_x &= e^{-y} \cos x + 2y & v'_{xx} &= -e^{-y} \sin x \\ v'_y &= -e^{-y} \sin x + 2x & v'_{yy} &= e^{-y} \sin x. \end{aligned}$$

Tedy $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, navíc harmonicky sdružená funkce je určena rovnicemi

$$u'_x = v'_y = -e^{-y} \sin x + 2x \quad u'_y = -v'_x = -(e^{-y} \cos x + 2y) = -e^{-y} \cos x - 2y.$$

Integrací první rovnice podle x dostáváme:

$$u = \int (-e^{-y} \sin x + 2x) \, dx = e^{-y} \cos x + x^2 + h(y).$$

K určení neznámé funkce $h(y)$ porovnáme derivaci získané rovnice podle y s druhou podmínkou:

$$-e^{-y} \cos x + h'(y) = u'_y = -e^{-y} \cos x - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + c.$$

Dosazením funkce $h(y)$ do u a následně do f dostaneme:

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + c + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3).$$

K určení integrační konstanty c využijeme podmínku $f(0) = 2 + j3$:

$$2 + 3j = f(0) = 1 + c + 3j \Rightarrow c = 1.$$

S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla můžeme funkci

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3)$$

vyjádřit pomocí proměnné $z = x + jy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3) = \\ &= e^{-y}(\cos x + j \sin x) + x^2 - y^2 + j2xy + 1 + j3 = \\ &= e^{-y+jx} + (x + jy)^2 + 1 + j3 = e^{j(x+jy)} + z^2 + 1 + 3j = e^{jz} + z^2 + 1 + 3j. \end{aligned}$$

□

Poznámka 0.20. Při hledání harmonicky sdružené funkce je možné postupovat i jinak. Např. integrací obou rovnic získáme dva tvary hledané funkce, které obsahují neznámé funkce jedné proměnné. Tyto funkce určíme vzájemným porovnáním. Postup ukážeme na předchozím příkladu:

$$e^{-y} \cos x + \underbrace{x^2}_{g(x)} + h(y) + c = u = \int -e^{-y} \cos x - 2y \, dy = e^{-y} \cos x \underbrace{-y^2}_{h(y)} + g(x) + c$$

Další možností je využití tvrzení, že všechny holomorfní funkce s reálnou částí $u(x, y)$ resp. imaginární částí $v(x, y)$ mají tvar

$$f(z) = 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - u(x_0, y_0) + jC$$

resp.

$$f(z) = 2jv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - jv(x_0, y_0) + C,$$

kde $z_0 = x_0 + jy_0$ je vhodně zvolený bod a C je reálná konstanta.

Pro holomorfní funkci $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je možné získat zápis pomocí proměnné z také tak, že do funkcí $u(x, y)$, $v(x, y)$ „dosadíme $x = z$, $y = 0$ resp. $x = 0$, $y = -jz$ “, je-li to možné.

Později ukážeme pro komplexní obor novou důležitou vlastnost holomorfních funkcí na oblasti a sice, že na této oblasti mají derivace všech řádů a jejich hodnota uvnitř oblasti je jednoznačně určena hodnotami na hranici této oblasti.

0.7 Elementární funkce komplexní proměnné

V této pasáži se budeme zabývat rozšířením definic známých reálných funkcí pro komplexní čísla. Stejně jako v reálném oboru definujeme polynom a racionálně lomenou funkci.

Definice 0.21. **Komplexním polynomem** P komplexní proměnné z nazýváme funkci tvaru

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n, \quad (8)$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n$. Číslo n nazveme **stupeň komplexního polynomu** $P(z)$; píšeme *st* $P(z)$. **Komplexní racionální funkcí** R nazýváme podíl dvou komplexních polynomů $P(z), Q(z)$, takže

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (9)$$

Podobně jako reálném oboru je komplexní polynom $P(z)$ spojitou funkcí, která má derivace všech řádů, které se počítají podle stejných pravidel jako v oboru reálném. Aby byly tyto skutečnosti zachovány, je jednou ze základních možností jak definovat tzv. transcendentní funkce jejich definování jako součet mocninné řady, známé z reálné analýzy.

Definice 0.22. Následující vyjádření uvažujeme pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.

Komplexní exponenciální funkcí e^z nazýváme funkci

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (10)$$

Komplexní funkce kosinus nazýváme funkci

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (11)$$

Komplexní funkce sinus nazýváme funkci

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (12)$$

Tyto funkce je možné vyjádřit pomocí známých reálných funkcí:

$$e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (13)$$

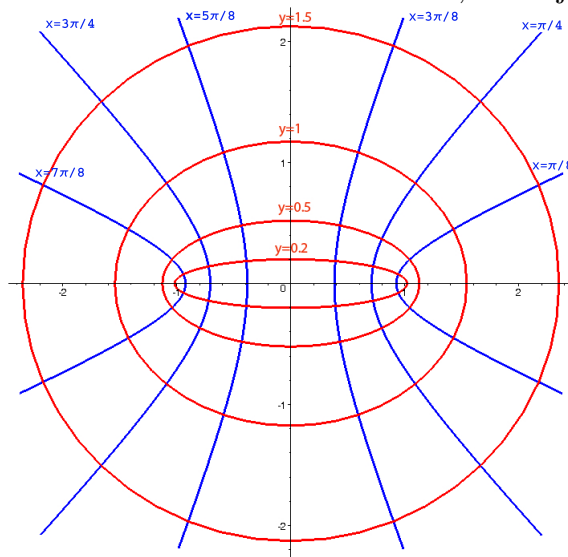
$$\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \quad (14)$$

$$\sin(x + jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y. \quad (15)$$

Poznamenejme, že první vzorec, který souvisí s tzv. Eulerovou identitou je základem pro zavedení exponenciálního tvaru komplexního čísla. Navíc pro výše uvedené funkce platí kromě známých vzorců z reálné analýzy následující důležité vztahy:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) \quad \sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}). \quad (16)$$

Takto definované funkce mají „jiné“ vlastnosti než v reálném oboru. Např. funkce e^z je periodická s periodou $2\pi j$. Pro hodnoty funkcí $\sin z$ a $\cos z$ samozřejmě neplatí, že nabývají hodnot pouze z intervalu $[-1, 1]$ (jako v reálném oboru) – zejména proto, že v oboru komplexních čísel nemá vůbec smysl mluvit o intervalech. Situaci budeme ilustrovat na obrazu obdélníkové sítě, která je zobrazena funkcí $\cos z$:



Poznamenejme, že pro funkci $\sin z$ dostáváme jiné křivky, ale množina grafů těchto křivek je stejná jako u funkce $\cos z$. Pomocí funkcí definovaných v Definici 0.22 můžeme definovat další funkce, které jsou známé

již z reálného oboru.

Definice 0.23. **Komplexní funkcií tangens** nazýváme funkci

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \text{ kde } \cos z \neq 0. \quad (17)$$

Komplexní funkcií kotangens nazýváme funkci

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ kde } \sin z \neq 0. \quad (18)$$

Komplexní funkcií hyperbolický sinus nazýváme funkci

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (19)$$

Komplexní funkcií hyperbolický kosinus nazýváme funkci

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (20)$$

Poznamenejme, že všechny výše uvedené funkce jsou na svých definičních oborech v $\mathbb{C}$ holomorfní a derivací jsou stejné funkce jako v reálném oboru. Tato skutečnost spolu s platností pravidel pro derivování algebraických operací s funkcemi vede k obdobnému postupu při výpočtu derivace funkce komplexní

proměnné, hovoříme o tzv. **zákonu permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné**. Pro mnohoznačné funkce je třeba se omezit pouze na jednoznačné větve.

Z periodičnosti funkce e^z vyplývá další důležitý poznatek. V reálném oboru je inverzní funkcí k funkci $y = e^x$ funkce $y = \ln x$. Inverzní funkce k periodické funkci však nemůže být jednoznačná funkce. Definování logaritmu v komplexním oboru je proto poněkud složitější.

Definice 0.24. Inverzní funkce k exponenciální funkci e^z se nazývá **logaritmická funkce** $\ln z$. To jest

$$\ln z = \{w | w \in \mathbb{C}, e^w = z\}.$$

Tato funkce je nekonečně mnohoznačná a ze vztahu (13) je možné odvodit

$$e^w = e^{\Re w} (\cos \Im w + i \sin \Im w) = z \Leftrightarrow e^{\Re w} = |z| \wedge \Im w = \arg z$$

hodnotu $\ln z$

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z. \quad (21)$$

Nahradíme-li v tomto vztahu funkci $\arg z$ funkcí $\text{Arg } z$ dostáváme jednoznačnou funkci $\text{Ln } z$, kterou nazýváme **hlavní větev logaritmické funkce**, resp. **hlavní větev logaritmu**.

Poznamenejme, že funkce Ln i $\ln$ jsou v komplexním oboru definovány pro všechna nenulová čísla $0 \neq z \in \mathbb{C}$ a ve shodě s aritmetikou nevlastního bodu $\ln \infty = \infty$.

Místo odvození jednotlivých vztahů pro další inverzní funkce ukážeme postup na nalezení všech řešení analogické rovnice.

Příklad 0.25. Řešte rovnici $\cosh z = -2$, která nemá řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Funkci $\cosh z$ nahradíme lineární kombinací funkce e^z a nalezneme ekvivalentní rovnici pro tuto funkci e^z , kterou vyřešíme vzhledem k e^z . Potom z získáme pomocí funkce $\ln z$:

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z = -2 \Leftrightarrow (e^z)^2 + 4e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = \begin{cases} -2 - \sqrt{3} \\ -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Oba kořeny kvadratické rovnice jsou záporná reálná čísla, tedy jejich argument je $(2k+1)\pi$, kde k je celé číslo. Velikosti těchto kořenů jsou $2 \pm \sqrt{3}$. Množina řešení zadané rovnice je sjednocení dvou množin:

$$M_1 = \{\ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad M_2 = \{\ln(2 - \sqrt{3}) + j(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$M_1 \cup M_2 = \{\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

což plyne ze skutečnosti $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$ a $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. □

Podobná situace nastává i u dalších inverzních funkcí k funkcím uvedeným výše, neboť s využitím vzorců 16, 20, 19 je možné jejich vyjádření pomocí funkce $\text{Ln } z$:

$$\arcsin z = -j \text{Ln} \left(jz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \arccos z = -j \text{Ln} \left(jz + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (22)$$

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+jz}{1-jz} \qquad \operatorname{arccotg} z = \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-j}{z+j} \quad (23)$$

$$\operatorname{arsinh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \qquad \operatorname{arccosh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (24)$$

Pro definování tzv. obecné mocniny z^α kde $\alpha \in \mathbb{C}$ využijeme identitu pro logaritmy známou z reálné analýzy využívající funkci $\ln$.

Definice 0.26. **Obecnou mocninou** z^α , kde $\alpha \in \mathbb{C}$, nazýváme funkci definovanou vztahem

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \quad (25)$$

Funkce z^α je podobně jako funkce $\operatorname{Ln} z$ nekonečně mnohoznačná. Její hlavní větev získáme, pokud nahradíme $\operatorname{Ln} z$ hlavní hodnotou $\operatorname{Ln} z$.

Příklad 0.27. Určete funkční hodnoty (uvažujte pouze hlavní větve logaritmu).

1. Vypočtete j^j .

Řešení. Podle (25) je $j^j = e^{j \operatorname{Ln} j}$. Protože $\arg j = \frac{\pi}{2}$ a $|j| = 1$, je $\operatorname{Ln} j = \ln 1 + j \frac{\pi}{2}$, tedy po dosazení

$$j^j = e^{j^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

□

2. Vypočtete $\operatorname{arctg}(2j)$.

Řešení. Podle (23) je $\operatorname{arctg}(2j) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+j2j}{1-j2j} = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{3}\right)$, protože $\arg\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi$ a $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$, je $\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3} + j\pi$, tedy po dosazení

$$\operatorname{arctg}(2j) = -\frac{j(-\ln 3 + j\pi)}{2} = \frac{\pi}{2} + j\frac{\ln 3}{2}.$$

□

3. Vypočtete $\operatorname{arctg}(j)$.

Řešení. Uvedená funkční hodnota $\operatorname{arctg}(j)$ není definována, neboť podle (23) $\operatorname{arctg}(j) = -\frac{j}{2} \ln \frac{1+j^2}{1-j^2} = -\frac{j}{2} \ln 0$, což není definováno.

□

0.8 Integrál funkce komplexní proměnné

Definovat analogii určitého integrálu reálné funkce jedné reálné proměnné je pro funkci komplexní v komplexní rovině možné nahrazením úsečky (intervalu) jejím spojitým obrazem v komplexní rovině, tj. křivkou. V dalším se omezíme pouze na tzv. rektifikovatelné křivky konečné délky.

Křivky v $\mathbb{C}$

Definice 0.28. **Křivkou** rozumíme každé spojitě zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Bod $\varphi(a)$ nazýváme **počátečním bodem** křivky a bod $\varphi(b)$ nazýváme **koncovým bodem** křivky φ . Množinu všech bodů křivky $[\varphi] = \{\varphi(t) | t \in [a, b]\}$ nazýváme **grafem** křivky φ .

Definice 0.29. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka. Řekneme, že křivka φ má v bodě $t \in [a, b)$ **polotečnu zprava** právě když existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{|\varphi(t+h) - \varphi(t)|} = T^+_{\varphi}(t).$$

Analogicky definujeme **polotečnu zleva** pro bod $t \in (a, b]$. Řekneme, že křivka φ má v bodě $t \in (a, b)$ **tečnu**, jestliže má polotečnu zleva i zprava a $T^-_{\varphi}(t) = T^+_{\varphi}(t)$.

Poznamenejme, že nulovost derivace $\varphi'(t)$ neznamená neexistenci tečny viz například $\varphi(t) = t^3$ pro $t = 0$. V geometrii se obvykle pod pojmem křivka rozumí její graf tj. $[\varphi]$. Potom proces nalezení zobrazení $\varphi : D_{\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$ se zadanou množinou $[\varphi]$ nazýváme parametrizací křivky. Tento proces nemá jednoznačný výsledek viz následující příklad.

Příklad 0.30. Nalezněte různé parametrizace úsečky AB , pro A, B různá komplexní čísla.

Řešení. Ukážeme 4 různé parametrizace z nich poslední je odlišná.

1. $\varphi(t) = A + (B - A)t, t \in [0, 1]$
2. $\varphi(t) = A + (B - A) \sin t, t \in [0, \pi/2]$

$$3. \varphi(t) = B + (B - A) \cos t, \quad t \in [\pi, 3\pi/2]$$

$$4. \varphi(t) = A + (B - A) \sin^2 t, \quad t \in [0, 3\pi/2]$$

□

Nechť pro dvě křivky $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, platí že koncový bod první křivky splývá s počátečním bodem druhé křivky, tj. $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Potom definujeme jako jejich **součet** křivku $\varphi_1 + \varphi_2$ takovou, že pohyb po křivce φ_1 , který skončí v bodě $\varphi_1(b)$ pokračuje po křivce φ_2 v bodě $\varphi_2(c)$.

Jestliže splývá koncový a počáteční bod křivky $\varphi(a) = \varphi(b)$, nazýváme křivku **uzavřenou**. Křivku nazveme **prostou**, jestliže $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ pro všechny body $t_1, t_2 \in [a, b]$ splňující $0 < |t_1 - t_2| < b - a$. každou uzavřenou prostou křivku nazýváme **Jordanovou** křivkou.

Pro Jordanovy křivky platí věta.

Věta 0.31. *Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Potom platí*

$$\mathbb{S} - [\varphi] = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou neprázdné disjunktní oblasti, jejichž společnou hranicí je graf křivky $[\varphi]$.

Otázku **orientace** křivky, která znamená směr pohybu, řešíme při geometrickém pojetí křivky, která je ztotožňována pouze s grafem křivky. Je zřejmé, že různé křivky (pohyby) mohou mít stejný graf a často o

křivce hovoříme jako o parametrizaci množin $[\varphi]$. Z pohledu praktických aplikací často nezáleží na volbě konkrétní křivky (pohybu), ale na jejím grafu $[\varphi]$ např. velikost práce. Orientaci křivky, která není uzavřená popíšeme stanovením počátečního a koncového bodu grafu $[\varphi]$. U Jordanovy křivky (je uzavřená a rovinu rozděluje na vnějšek a vnitřek) je směr pohybu dán tím, že při pohledu ve směru pohybu máme vnitřek křivky po levé straně (křivku procházíme po směru chodu hodinových ručiček) nebo po pravé straně (křivku procházíme proti směru chodu hodinových ručiček). V prvním případě hovoříme o **kladné orientaci** a ve druhém o **záporné orientaci** křivky.

Nechť je dána křivka $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$ kde $t \in [a, b]$ tedy $(\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C})$. Každému dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ s normou dělení $\nu(D) = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ odpovídá lomená čára s vrcholy $z_k = \Gamma(t_k)$, jejíž délka je $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$. Existuje-li konečné reálné číslo K takové, že pro každé dělení intervalu $[a, b]$ je

$$\sum_{k=1}^n |\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| < K,$$

existuje konečné supréum $d(\Gamma)$ množiny délek všech lomených čar, které nazýváme **délka křivky** Γ a křivku φ nazýváme rektifikovatelnou. Speciálním případem rektifikovatelných křivek jsou **hladké křivky** $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, které mají na celém intervalu $[a, b]$ spojitou nenulovou derivaci Γ' a platí

$$d(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Jejich dalším možným zobecněním jsou **po částech hladké orientované křivky**, které jsou konečným součtem hladkých křivek.

Pro konečnou komplexní funkci $f(z)$ a křivku $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, pro dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a množinu bodů $\{\tau_k\}$, splňujících $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ pro $k = 1 \dots n$ definujeme integrální součet

$$\sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})).$$

Definice 0.32. Nechť existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow \infty} \sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \lim_{\nu(D) \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})),$$

uvažovaná pro všechna dělení D a množiny $\{\tau_k\}$. Pak tuto limitu nazveme **integrálem funkce f po křivce Γ** a zapisujeme ji $\int_{\Gamma} f(z)dz$. Křivku Γ nazýváme **integrační cesta**.

Následující věta stanoví podmínky existence integrálu.

Věta 0.33. *Nechť $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in [a, b]$ je rektifikovatelná křivka a funkce $f(z)$ je definovaná, konečná a spojitá na množině $[\Gamma]$. Potom existuje $\int_{\Gamma} f(z)dz$ pro jehož hodnotu platí navíc odhad*

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|dz \leq \sup_{z \in [\Gamma]} |f(z)|d(\Gamma). \quad (26)$$

Jestliže je navíc Γ po částech hladká křivka, platí

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = \int_a^b f(x(t) + jy(t))(\dot{x}(t) + j\dot{y}(t))dt. \quad (27)$$

Tato věta dává do souvislosti geometrickou povahu definice integrálu s parametrizací po částech hladké křivky. V Příkladu 0.30 bylo uvedeno několik parametrizací jedné úsečky. Možný problém různých hodnot integrálu pro různé parametrizace, „řeší“ zavedení následujícího pojmu.

Jsou-li dány 2 křivky $\Gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\Gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ a existuje-li spojitá rostoucí funkce ω definovaná na intervalu $[a_1, b_1]$ taková, že platí

1. $\omega([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$
2. $\Gamma_2(\omega(t)) = \Gamma_1(t)$ pro $t \in [a_1, b_1]$,

potom se křivky Γ_1, Γ_2 liší jen nepodstatně a platí

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Další vlastnosti křivkového integrálu z komplexní funkce jsou uvedeny níže.

Věta 0.34. *Nechť jsou funkce komplexní proměnné $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ spojité na $[\Gamma]$, $[\Gamma_1]$, $[\Gamma_2]$, kde $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ jsou rektifikovatelné křivky a $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Pak platí:*

$$\int_{\Gamma} (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)) dz = k_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + k_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz \quad (28)$$

Jestliže $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, pak

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad (29)$$

Jestliže Γ_2 je opačně orientovaná křivka Γ_1 , pak

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad (30)$$

V dalším textu se omezíme na křivky, které budou po částech hladké, a tuto skutečnost nebudeme dále zdůrazňovat.

Příklad 0.35. *Výpočet integrálu komplexní funkce po křivce*

Vypočtěte následující integrály $\int_{\Gamma} f(z) dz$, je-li dáno:

1. $f(z) = z^n$, kde n je celé číslo a Γ je kružnice se středem 0 o poloměru r kladně orientovaná, např.
 $z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Ověříme, že křivka $\Gamma : z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$ je hladká, výpočtem její derivace $\dot{z}(t) = r(-\sin t + j \cos t) = jre^{jt}$ a můžeme tedy požit vzorec (27) Celkem tedy získáváme, že

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{njt} jre^{jt} dt = \int_0^{2\pi} jr^{n+1} e^{(n+1)jt} dt = \\ &= r^{n+1} \int_0^{2\pi} -\sin(n+1)t + j \cos(n+1)t dt = \\ &\quad \left\{ \begin{array}{ll} j[t]_0^{2\pi} = 2j\pi & \text{pro } n = -1 \\ \frac{r^{n+1}}{n+1} [\cos(n+1)t + j \sin(n+1)t]_0^{2\pi} = 0 & \text{pro } n \neq -1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

□

2. $f(z) = e^z$, Γ je lomená čára spojující body $z_1 = 2$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + j\pi$.

Řešení. Lomená čára zcela jistě splňuje předpoklady pro použití vztahu (29). Za Γ_1 budeme považovat úsečku spojující body $z_1 = 2$ a $z_2 = 1$ a za Γ_2 úsečku spojující body $z_2 = 1$ a $z_3 = 1 + j\pi$. Pro výpočet integrálu potřebujeme následující údaje:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 : z(t) = 2 - t & \Gamma_2 : z(t) = 1 + j\pi t \\ \alpha_1, \beta_1 : \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 & \alpha_2, \beta_2 : \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1 \\ z'(t)dt : dz = -dt & z'(t)dt : dz = j\pi dt \end{array}$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^z dz &= \int_0^1 e^{2-t}(-1)dt + \int_0^1 e^{1+jt}j\pi dt = e^2 \int_0^1 -e^{-t}dt + j\pi e \int_0^1 (\cos(\pi t) + j \sin(\pi t))dt = \\ &= e^2 [e^{-t}]_0^1 + j\pi e [\sin(\pi t)/\pi - j \cos(\pi t)/\pi]_0^1 = e - e^2 + e(-1 - 1) = -e^2 - e. \end{aligned}$$

□

Ve speciálních případech je možné výpočet integrálu uskutečnit i jiným postupem než poskytuje Věta 0.33. Motivací nám buď symbolický výpočet naznačující nezávislost na $\Gamma(t)$, ale jen na hodnotách v koncových bodech.

$$\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = [F(\Gamma(t))]_a^b = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

To je ale díky větě 0.34 ekvivalentní vlastnosti, že integrál po uzavřené křivce je nulový, což obecně neplatí viz předchozí příklad.

Připomeňme, že v odstavci 0.1.3 byl zaveden pojem jednoduše souvislé oblasti. Příkladem jednoduše souvislé oblasti je otevřený kruh $U_\varepsilon(z_0)$, prstenec $P_\varepsilon(z_0)$ je příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá. Tento pojem je podstatný pro formulaci tzv. Cauchyho fundamentální věty.

Věta 0.36 (Cauchy). *Nechť je dána funkce $f(z)$, která je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω . Pak pro její integrál po každé uzavřené křivce Γ , která leží v Ω platí*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \quad (31)$$

Důkaz této věty, která má mnoho významných důsledků, je z důvodu jeho rozsáhlosti vynechán a zájemce jej nalezne např. [11, str.126-128].

Poznamenejme, že „opačné“ tvrzení je předmětem tzv. Morerovy věty:

Věta 0.37. *Nechť $f(z)$ je konečná a spojitá funkce na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$. Pak funkce $f(z)$ je holomorfní na množině M právě když, platí*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0, \quad (32)$$

pro každou Joradanovu křivku Γ , pro niž je $\overline{\text{int } \Gamma} \subset M$.

Uvedme jako první důsledek Cauchyho fundamentální věty větu o nezávislosti na integrační cestě.

Věta 0.38. *Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť $f(z)$ je holomorfní na oblasti D . Nechť z_1, z_2 jsou libovolné dva body D a Γ_1, Γ_2 křivky se stejným počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 . Potom platí*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz. \quad (33)$$

Tato skutečnost umožňuje definovat k holomorfní funkci $f(z)$ v jednoduše souvislé oblasti Ω funkci $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$, která je funkcí horní meze integrálu a podobně jako v reálné analýze lze odvodit následující tvrzení.

Věta 0.39. *Bud' Ω jednoduše souvislá rovinná oblast a $f(z)$ holomorfní funkce. Potom pro každý pevně zvolený bod $z_0 \in \Omega$ funkce definovaná tak, že*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

má derivaci $F'(z) = f(z)$.

Říkáme, že funkce $F(z)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(z)$, neboť platí $F'(z) = f(z)$. Primitivní funkce není určena k funkci $f(z)$ jednoznačně a vzájemně se liší až na aditivní konstantu. Obdobně jako pro funkce reálné proměnné lze dokázat analogii Newton-Leibnizovy formule.

Věta 0.40. *Nechť funkce $f(z)$ je spojitá a má primitivní funkci $F(z)$ v jednoduše souvislé oblasti Ω . Nechť dále Γ je libovolná po částech hladká orientovaná křivka s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 ležící Ω . Pak hodnota integrálu $\int_{\Gamma} f(z) dz$ nezávisí na tvaru křivky Γ ale pouze na jejích krajních bodech a platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (34)$$

Poznamenejme, že pomocí této věty je možné zjednodušit výpočet integrálů z holomorfních funkcí, viz

Příklad 0.35, 2), kde je počítán integrál z funkce e^z :

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_2^{1+j\pi} e^z dz = [e^z]_2^{1+j\pi} = e(\cos \pi + j \sin \pi) - e^2 = -e^2 - e.$$

Na Příklad 0.35, 1) uvedenou větu pro $n \leq -1$ nelze použít, protože křivka Γ je uzavřená a Cauchyho fundamentální větu nelze použít neboť funkce je v bodě 0 není regulární a navíc tento bod leží uvnitř kružnice Γ . Situaci budeme dále ilustrovat na příkladech.

Příklad 0.41. *Výpočet integrálu komplexní funkce*

Vypočtěte následující integrály $\int_{\Gamma} f(z) dz$, je-li dáno:

1. $f_1(z) = \sin z$, $\Gamma(t) = \pi(2 \sin t - 1 + j2 \sin 2t)$ pro $t = [0, 3\pi/2]$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že funkce $f_1(z) = \sin z$ je na celém oboru $\mathbb{C}$ spojitá a holomorfní a Γ_1 je rektifikovatelná křivka, existuje integrál a můžeme použít Větu 0.40. S využitím zákona permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné dostáváme:

$$\int_{\Gamma_1} \sin z dz = \int_{\Gamma_1(0)}^{\Gamma_1(3\pi/2)} \sin z dz = -\left[\cos z\right]_{-\pi}^{-3\pi} = 2.$$

□

2. $f_2(z) = 1/z$, Γ_2 je úsečka z bodu $z_1 = -1 + j$ do bodu $z_2 = 1 + j$ tj. např. $\Gamma(t) = 2t - 1 + j$, kde $t \in [0, 1]$.

Řešení. Přestože funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ není holomorfní v bodě 0 můžeme použít Větu 0.40. Zvolíme-li za oblast Ω okolí bodu $2j$ o poloměru $\sqrt{3}$, platí, že daná křivka patří do Ω a jediný bod 0, kde funkce $1/z$ není holomorfní, do Ω nepatří. Můžeme tedy Větu 0.40 v oblasti Ω použít. Musíme však vhodně zvolit primitivní funkci, kterou je logaritmus. Můžeme zvolit hlavní hodnotu $\text{Ln } z$, neboť ta není holomorfní na záporné části reálné osy a tedy v oblasti Ω je holomorfní.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-1+j}^{1+j} \frac{1}{z} dz = [\text{Ln } z]_{-1+j}^{1+j} = \ln \sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} - \left(\ln \sqrt{2} + j\frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{j\pi}{2}$$

□

Věta 0.42. *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní uvnitř uvnitř n -násobně souvislé oblasti Ω a spojitá na jejím uzávěru. Nechť je hranice oblasti Ω tvořena stejně orientovanými Jordanovými křivkami $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, takovými že křivky $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ leží uvnitř křivky Γ . Potom platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} f(z) dz \quad (35)$$

Pomocí této věty můžeme výpočet integrálu z Poznámky ?? tj. $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ nahradit integrálem po kružnici se středem v počátku s dostatečně malým poloměrem r , aby celá kružnice ležela ve vnitřku křivky Γ . Tento integrál je spočítán v Příkladu 0.35 1). pro $n = -1$. Protože křivka Γ je záporně orientována a kružnice v uvedeném příkladě je kladně orientována celkově dostáváme $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = -2j\pi$. Integrály tohoto typu se zabývají následující věty.

Věta 0.43 (Cauchyho vzorec). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z , který leží uvnitř křivky Γ platí:*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0). \quad (36)$$

Věta 0.44 (Cauchyho vzorec pro n -tou derivaci). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z , který leží uvnitř křivky Γ má tato funkce derivace všech řádů a platí:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (37)$$

Tato věta spolu s Větou 0.42 umožňuje výpočet integrálů po uzavřených křivkách z funkcí typu $\frac{f(z)}{P(z)}$, kde funkce $f(z)$ je holomorfní a $P(z)$ je polynom, neboť v komplexním oboru lze každý polynom rozložit na součin lineárních polynomů. Potom lze integrál po uzavřené křivce nahradit součtem integrálů po křivkách, které budou obsahovat pouze jeden kořen polynomu ve jmenovateli uvažované funkce a který je vnitřním bodem křivky. Tyto integrály lze spočítat pomocí Věty 0.43.

Příklad 0.45. Pomocí Cauchyho vzorce vypočítejte $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}$, je-li Γ kladně orientovaná kružnice se středem $2j$ o poloměru 3.

Řešení. Polynom lze rozložit $z(z^2 + 4)^2 = z(z + 2j)^2(z - 2j)^2$. V křivce Γ leží dva kořeny jmenovatele $z = 0$ a $z = 2j$. Můžeme volit dvě křivky Γ_1 jako kružnici se středem v bodě 0 o poloměru $1/2$ a křivku Γ_2 jako kružnici se středem v bodě $2j$ o poloměru 1. Podle Věty 0.42 platí:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}.$$

V prvním integrálu je funkcí $f(z)$ použitou ve Větě 0.43 funkce $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2}$ $z_0 = 0$ a tedy $f(0) = \frac{1}{16}$.

V druhém integrálu užijeme Větu 0.44 kde $f(z) = \frac{e^z}{(z + 2j)^2}$, $n = 1$, $z_0 = 2j$, tedy $f'(z) =$

$$= \frac{e^z(z^2 + z(-3 + 2j) - 2j)}{z^2(z + 2j)^3} \text{ a } f'(2j) = \frac{e^{2j}(-1 + j)}{32}. \text{ Celkově tedy dostáváme}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left(\frac{1}{16} + e^{2j} \frac{-1 + j}{32} \right).$$

□

Význam této Věty 0.44 spočívá v důkazu, že funkce holomorfní v nějaké oblasti má derivace všech řádů a je možno očekávat její rozvoj v Taylorovu řadu.

0.9 Řady v komplexním oboru a singulární body

Věta 0.46. *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v bodě z_0 . Pak existuje otevřený kruh $U(z_0, R)$ ($R > 0$) takový, že pro každý bod $z \in K(z_0, R)$ platí:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ kde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (38)$$

a $\Gamma_r = z_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice se středem z_0 o poloměru r , pro který platí $0 < r < R$.

Příklad 0.47. Rozviňte racionálně lomenou funkci $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ v Taylorovu řadu se středem $z_0 = 0$.

Řešení. Danou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků, které interpretujeme jako součet geometrické řady konvergující pro $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

□

Povšimněme si, že uvedenou funkci je možné vyjádřit jako součet řady i v dalších oblastech komplexní roviny.

$1 < |z| < 2$: první zlomek upravíme $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ a celkově dostáváme

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Poznamenejme, že první geometrická řada konverguje pro $1 < |z|$ a druhá pro $|z| < 2$.

$$2 < |z|: \frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (1+2^{-n}) z^n.$$

Definice 0.48. Nechť $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, kde n je celé číslo. Potom výraz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (39)$$

nazýváme **Laurentovou řadou se středem v bodě** z_0 a říkáme, že **řada konverguje** v bodě z , jestliže konvergují současně obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$. První resp. druhá řada se nazývá **regulární část** resp. **hlavní část** Laurentovy řady a její **součtem** je součet obou jejích částí.

Věta 0.49. Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na prstenci $P_{rR}(z_0)$. Pak pro každé z ležící v tomto prstenci, lze funkci $f(z)$ vyjádřit jako součet Laurentovy řady

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (40)$$

pro jejíž koeficienty platí $n \in \mathbb{Z}$ a

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (41)$$

kde Γ je libovolná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $\bar{r}$ takovým, že $r < \bar{r} < R$.

Věta 0.50. *Nechť je dána funkce $f(z)$. Je-li možné ji v mezikruží $0 < r_1 < |z - z_0| < r_2$ rozvést do řady (40), pak pro její koeficienty platí (41).*

0.9.1 Singulární body a jejich klasifikace

Definice 0.51. Buď $f(z)$ holomorfní funkce v prstencovém okolí $P_r(z_0)$ bodu z_0 a současně není holomorfní v bodě z_0 . Potom říkáme, že bod z_0 je **izolovaným singulárním bodem** funkce $f(z)$.

Bod 0 není izolovaným bodem jakékoli jednoznačné větve funkce $\sqrt{z}$.

Věta 0.52 (L'Hospitalovo-pravidlo). *Nechť funkce $f(z)$, $g(z)$ jsou holomorfní na prstencovém okolí $P_r(z_0)$ ($r > 0$) a platí $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, potom existují obě následující limity a platí:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (42)$$

Klasifikace singulárních bodů

Pro izolovaný singulární bod a jeho Laurentův rozvoj na nějakém ryzím okolí tohoto bodu může nastat jedna ze tří následujících možností

1. Hlavní část Laurentova rozvoje je identicky rovna 0, potom existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a po dodefinování funkční hodnoty $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ je funkce v tomto bodě holomorfní. V tomto případě hovoříme o **odstranitelné singularitě**.
2. Hlavní část Laurentova rozvoje má pouze konečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Singulární bod potom nazýváme **pólem** a absolutní hodnotu nejmenšího indexu nenulového koeficientu hlavní části Laurentova rozvoje se nazývá **řád pólu**.
3. Hlavní část Laurentova rozvoje má pouze konečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a potom k libovolně zvolenému číslu $L \in \mathbb{S}$ lze nalézt posloupnost $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ takovou, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ a současně $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = L$. V tomto případě hovoříme o **podstatné singularitě**.

Příklad 0.53. Pro uvedené funkce určete izolované singulární body a pomocí Laurentova rozvoje proveďte jejich klasifikaci

$$1) f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

Řešení. Funkce $\sin z$ je definována jako řada $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}$ celkově je Laurentův rozvoj ve

tvary $\frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ a bod $z = 0$ je odstranitelnou singularitou. $\square$

$$2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$$

Řešení. Funkce $\cos z$ je definována jako řada $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ celkově je Laurentův rozvoj ve tvaru

$$\frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} + \dots$$

Nejmenší nenulový koeficient (pro $n = 1$) je $a_{-2} = \frac{1}{2}$ bod $z = 0$ je pólem řádu 2. $\square$

$$3) f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Řešení. Substitucí $t = \frac{1}{z^2}$ do rozvoje $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ dostaneme Laurentův rozvoj:

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \cdots \quad (43)$$

a bod $z = 0$ je podstatnou singularitou. □

Nalézt Laurentův rozvoj je v některých případech technicky náročné např. pro převrácenou hodnotu funkce z 0.53 1), proto klasifikování singulárních bodů na základě detailní znalosti Laurentova rozvoje nahradíme jiným postupem. K jeho uskutečnění je nutné zavedení pojmu nulového bodu holomorfní funkce a jeho násobnosti .

Definice 0.54. Buď $f(z)$ holomorfní funkce v okolí $U(z_0)$ bodu z_0 a současně $f(z_0) = 0$, potom říkáme, že bod z_0 je **nulovým bodem** funkce $f(z)$. Řekneme, že nulový bod z_0 je **n-násobným** nulovým bodem, jestliže platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0. \quad (44)$$

Pro bod z_0 , který není nulový zavedeme násobnost 0.

Z existence Taylorovy řady holomorfní funkce $f(z)$ plyne následující tvrzení.

Věta 0.55. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je n -násobným nulovým bodem holomorfní funkce $f(z)$ právě když, v nějakém okolí $U(z_0)$ lze funkci $f(z)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = (z - z_0)^n F(z), \quad (45)$$

kde funkce $F(z)$ je holomorfní v bodě z_0 a nenulová.

Důsledek 0.56. Je-li nějaké oblasti funkce $f(z)$ podílem holomorfních funkcí tj. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, potom v této oblasti má funkce $f(z)$ singulární body (nejsou podstatnými singularitami) pouze v nulových bodech z_0 funkce $\psi(z)$ a řád pólu stanovíme jako rozdíl násobnosti nulového bodu z_0 funkce $\psi(z)$ minus násobnost nulového bodu z_0 $\varphi(z)$. Je-li tento rozdíl nekladný, je ve zkoumaném bodě odstranitelná singularita.

Uvažme funkci $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Obě funkce mají bod $z = 0$ nulovým bodem násobnosti 1, tedy uvažovaný rozdíl je 0 a v bodě $z = 0$ je odstranitelná singularita.

Pro funkci $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ dostáváme v bodě $z = 0$: $\varphi''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, $\psi(z) = z^4$ má bod $z = 0$ tedy bod $z = 0$ je pólem násobnosti $4 - 2 = 2$.

0.10 Rezidua a jejich užití

Ze vzorců 41 vyplývá $a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$ proto zavádíme pojem:

Definice 0.57. Nechť je dána funkce $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ jako součet Laurentovy řady. Koeficient a_{-1} v tomto rozvoji nazýváme **reziduum** funkce $f(z)$ v bodě z_0 a píšeme $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z)$.

Věta 0.58 (reziduová, Cauchy). *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast neobsahující ∞ a Γ uzavřená kladně orientovaná křivka ležící v této oblasti a vnitřek této množiny označíme $\dot{\Gamma}$. Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř oblasti Ω , s případnou s výjimkou konečného počtu bodů $z_1, z_2, \dots, z_n$ z nichž žádný neleží na křivce Γ . Pak platí:*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{z_k \in \dot{\Gamma}} \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z). \quad (46)$$

Pro singulární bod, který je pólem platí:

Věta 0.59. *Nechť je dána funkce $f(z)$, která má v bodě z_0 pól řádu m , platí:*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (47)$$

Jedná-li se o pól prvního řádu, pak se daný vzorec zjednoduší:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad (48)$$

V případě prostých pólů můžeme výpočet reziduí u funkce, která je podílem dvou holomorfních funkcí realizovat pomocí následující věty.

Věta 0.60. *Nechť $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0 a platí $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) \neq 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Pak má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a reziduum lze určit ze vzorce*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (49)$$

Příklad 0.61. Vypočtete rezidua funkce $f(z)$

$$1) f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejími singulárními body jsou nulové body funkce ve jmenovateli:

$z = 0$ je pól prvního řádu a $z = \pm 2j$ jsou póly druhého řádu a můžeme použít vzorec 47. Pro reziduum $z = 0$ je $m = 0$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{ze^z}{(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{z(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{16},$$

Pro rezidua $z = \pm 2j$ je $m = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=\pm 2j} \frac{ze^z}{(z^2+4)^2} &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left(\frac{(z \mp 2j)^2 e^z}{z(z^2+4)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left(\frac{e^z}{z(z \pm 2j)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \frac{e^z(z^2 + (3 \pm 2j)z \mp 2j)}{z^2(z \pm 2j)^3} = \frac{-1 \pm j}{32} e^{\pm 2j}, \end{aligned}$$

□

$$2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejím singulárním bodem je nulový bod funkce ve jmenovateli $z = 0$, který je pól druhého řádu, neboť $z = 0$ je nulový bod funkce $1 - \cos z$ druhého řádu a nulový bod řádu 4 funkce z^4 a můžeme použít vzorec 47, kde $z_0 = 0$ je $m = 2$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3}$$

Při výpočtu této limity uijeme opakovaně L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z}{6z} = 0.$$

Poznamenejme, že výsledek je ve shodě s definicí rezidua a Laurentovým rozvojem této funkce viz příklad 0.53 2).

□

$$3) f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Řešení. Funkce $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ má póly prvního řádu v nulových bodech funkce $\cos z$, které určíme ze vztahu $\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$ využijeme přitom $\cosh y > 0$, $\sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

$$0 = \Re e \cos(x + jy) = \cos x \cosh y \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$0 = \Im m \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + jy\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sinh y = (-1)^k \sinh y \Rightarrow \sinh y = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = 0,$$

Tedy nulové body komplexní funkce $\cos z$ jsou stejné jako nulové body reálné funkce $\cos x$, tj. $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a funkce $\operatorname{tg} z$ má spočetně mnoho singulárních pólů prvního řádu. K výpočtu reziduí v těchto pólech je vhodné použít vzorec (49):

$$\operatorname{rez}_{z=\pi/2+k\pi} \operatorname{tg} z = \left. \frac{\sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=\pi/2+k\pi} = \frac{\sin(\pi/2 + k\pi)}{-\sin(\pi/2 + k\pi)} = -1.$$

□

Reziduí je možné využít při výpočtu integrálu z funkce komplexní proměnné s izolovanými singulárními body po uzavřené křivce. K tomuto výpočtu použijeme Cauchyho reziduovou větu 0.58. Postup předvedeme na příkladě.

Příklad 0.62. Vypočtete následující integrály pomocí reziduí podle věty 0.58.

1) $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}$, je-li Γ kladně orientovaná kružnice se středem $2j$ o poloměru 3.

Tento integrál je v textu již spočítaný viz příklad ??.

Řešení. Podobně jako v citovaném příkladě je třeba určit singulární body funkce $\frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$ $z = 0$, $z = \pm 2j$. Uvnitř křivky Γ jsou body vyhovující rovnici $|z - 2j| < 3$. Body $z = 0$ a $z = 2j$ jsou uvnitř, neboť $|0 - 2j| = 2 < 3$ a $|2j - 2j| = 0 < 3$, naopak bod $z = -2j$ leží vně kružnice, protože $|-2j - 2j| = 4 > 3$. Proto užitím věty 0.58 dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left(\operatorname{rez}_{z=0} \frac{ze^z}{(z^2 + 4)^2} + \operatorname{rez}_{z=2j} \frac{ze^z}{(z^2 + 4)^2} \right) = 2\pi j \left(\frac{1}{16} + \frac{-1+j}{32} e^{2j} \right).$$

Poznamenejme, že výše uvedená rezidua byla vypočtena v příkladu 0.61

□

2) $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$, kde je kružnice záporně orientována.

Řešení. I v případě, že křivka je záporně orientována je možné použít větu 0.58 a opačnou orientaci křivky kompenzovat změnou znaménka integrálu. V daném případě má funkce $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$ jediný sin-

gulární bod $z = 0$, který je vnitřním bodem křivky. Reziduum v tomto bodě určíme z Laurentova rozvoje (43) v příkladě 0.53 $\operatorname{rez}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$ a tedy $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$ $\square$

Literatura

- [1] Došlý, O.–Došlá, Z. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Brno: MU Brno, 1999. Skriptum.
- [2] Došlý, O.–Došlá, Z. *Metrické prostory*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2000. Skriptum.
- [3] Elaydi S.N. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Verlag 1999.
- [4] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [5] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [6] Kalas, J.–Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2001. Skriptum.
- [7] Kuben, J. *Diferenciální rovnice*. 1. vydání. Brno: VA Brno, 1991. Skriptum.
- [8] Melkes, F.–Řezáč, M. *Matematika 2*. 1. vydání. Brno: VUT v Brně, 2003. Skriptum.

-
- [9] Pírko, Z.–Veit, J. *Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: Alfa Bratislava. 1970.
- [10] Sikorski, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Druhé, změněné a doplněné vydání. Vydání překladu 1. Praha: Academia, 1973. 496 s.
- [11] Šulista, M. *Základy analýzy v komplexním oboru*. Praha: SNTL 1981.
- [12] Veselý, J. *Komplexní analýza*. Praha: UKP Brno, 2000. Skriptum.