

1 Laplaceova transformace

Hojně v elektrotechnice užívanou integrální transformací je transformace Laplaceova, která reálné funkci přiřazuje funkci komplexní.

Definice 1.1. Jestliže pro $t \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{C}$ konverguje nevlastní integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad (1.1)$$

nazýváme jím definovanou funkci $F(p)$ **Laplaceovým obrazem** funkce $f(t)$. Naopak funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** funkce $F(p)$. Zobrazení přiřazující funkci $f(t)$ funkci $F(p)$ nazýváme **Laplaceovou transformací** a zapisujeme $F(p) = \mathcal{L}f(t)$ nebo $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Ze vzorce (1.1) je patrné, že pro některé funkce (např. $f(t) = \exp(t^2)$) nelze definovat Laplaceův

obraz, protože integrál je divergentní. Vymezíme si nejdříve třídu funkcí, pro kterou je tato transformace definována a je jednoznačná.

Definice 1.2. Funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **předmětem** neboli **originálem** Laplaceovy transformace $\mathcal{L}$, jestliže splňuje následující podmínky

- (i) $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojité pro všechna $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
- (iii) existují kladné konstanty M , t_0 a konstanta $s \in \mathbb{R}$ tak, že platí $|f(t)| \leq M \exp(st)$ pro všechna $t \geq t_0$.
Říkáme, že $f(t)$ je funkcí **ohraničeného růstu s indexem** s .

Předpoklad (ii) Definice 1.2 je zaveden z důvodu jednoznačnosti zobrazení definovaného Laplaceovou transformací. Elementární funkce, které nesplňují uvedený předpoklad, násobíme Hevisideovou funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$. V literatuře je zvykem, že tuto skutečnost často mlčky předpokládáme a nezapisujeme. Tak budeme postupovat i v tomto textu, tj. funkci $\eta(t)$ nebudeme zapisovat.

Příklad 1.3. Nalezněte Laplaceův obraz funkce $t^n \eta(t)$, kde n je celé nezáporné číslo.

Řešení. U této funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice např. volbou konstant $M = 1$, $t_0 = \exp(n)$ a $s = 1$. Nejdříve odvodíme rekurentní vztah ($n > 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n \eta(t)) &= \int_0^\infty t^n \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{t^n \exp(-pt)}{p} \right]_0^u + \\ &\quad \frac{n}{p} \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-pt) dt = -\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^n \exp(-pu)}{p} + \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)) = \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)).\end{aligned}$$

Pro $n = 0$ dostáváme:

$$\mathcal{L}\eta(t) = \int_0^\infty \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-pt)}{p} \right]_0^u = \frac{1}{p} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} = \frac{1}{p}$$

a užitím rekurentního vztahu celkově dostaneme:

$$\mathcal{L}(t^n \eta(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

□

Příklad 1.4. Nalezněte Laplaceův obraz funkce $\exp(\omega t)\eta(t)$, kde $\omega \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Řešení. Pro ověření předpokladu (iii) Definice 1.2 stačí volit $M = 1$, $t_0 = 1$ a $s = \omega + 1$.

$$\mathcal{L}(\exp(\omega t)\eta(t)) = \int_0^{\infty} \exp(\omega t) \exp(-pt) dt =$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-(p-\omega)t)}{p-\omega} \right]_0^u = \frac{1}{p-\omega} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(p-\omega)u)}{p-\omega} = \frac{1}{p-\omega}.$$

□

Poznamenejme, že v posledním příkladu lze za ω volit libovolnou komplexní konstantu.

Věta 1.5. Předpokládejme, že platí $F(p) = \mathcal{L}f(t)$, $G(p) = \mathcal{L}g(t)$. Nechť $r > 0$, $\omega \in \mathbb{C}$ jsou konstanty. Dále nechť $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ a $f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t)$. Potom platí následující tvrzení.

<i>Tvrzení o</i>	<i>Předmět</i>	<i>Obraz</i>
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{p}{r}\right)$
<i>posunutí obrazu</i>	$e^{\omega t}f(t)$	$F(p - \omega)$

<i>Tvrzení o</i>	<i>Předmět</i>	<i>Obráz</i>
<i>posunutí předmětu vpravo</i>	$f(t-r)\eta(t-r)$	$e^{-rp}F(p)$
<i>posunutí předmětu vlevo</i>	$f(t+r)\eta(t)$	$e^{rp}F(p) - \int_0^r e^{-pt}f(t) dt$
<i>derivaci předmětu</i>	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
<i>n-té derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+)p^{n-1-i}$
<i>derivaci obrazu</i>	$tf(t)$	$-F'(p)$
<i>derivaci podle parametru α</i>	$f'_\alpha(t, \alpha)$	$F'_\alpha(p, \alpha)$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
<i>integraci obrazu</i>	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z) dz$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(p)G(p)$
<i>Duhamelův vzorec</i>	$f(0^+)g(t) + f'(t) * g(t)$	$pF(p)G(p)$

Poznamenejme, že pro funkce $f(t)$, $g(t)$, které jsou nulové pro záporný argument (jsou originálem Laplaceovy transformace), je dříve uvedený integrál definující konvoluci modifikován na vztah:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Protože některá tvrzení předcházející věty plynou bezprostředně z vlastností integrálu, zaměříme se v dalším na jejich užití.

Příklad 1.6. Výsledky Příkladu 1.3 a Příkladu 1.4 odvoďte pomocí tabulky uvedené v předcházející větě.

Řešení. V obou odvozeních budeme postupovat podle různých tvrzení z tabulky.

1. Funkci $f(t) = t^n$ je možné určit pomocí funkčních hodnot derivací této funkce:

$$f^{(n)}(t) = n!, \quad f^{(i)}(0) = 0 \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1.$$

Užitím tvrzení o n -té derivaci funkce dostáváme:

$$\frac{n!}{p} = \mathcal{L}((t^n)^{(n)}) = p^n \mathcal{L}t^n - \sum_{i=0}^{n-1} (t^n)^{(i)} \Big|_{t=0^+} p^{n-1-i} = p^n \mathcal{L}t^n - 0 \Rightarrow \mathcal{L}t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. Analogicky lze užitím tvrzení o posunutí obrazu Laplaceovy transformace funkce jednotkového skoku $\eta(t)$ odvodit obraz funkce $e^{\omega t}$:

$$\mathcal{L}e^{\omega t} = \mathcal{L}(e^{\omega t}\eta(t)) = \mathcal{L}\eta(p - \omega) = \frac{1}{p - \omega}.$$

□

Příklad 1.7. Pomocí tvrzení uvedených v předcházející tabulce odvoďte Laplaceovy obrazy funkcí $\sin at$, $\cos at$, $t \cos at$.

Řešení. Obraz funkce $\sin at$ můžeme získat užitím Eulerova vzorce a linearity Laplaceovy transformace z předchozího výsledku:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sin at &= \mathcal{L} \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j} = \frac{\mathcal{L}e^{jat} - \mathcal{L}e^{-jat}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - ja} - \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p + ja - (p - ja)}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz funkce $\cos at$ bychom mohli získat obdobně. Druhou možností je využití předchozího výsledku a tvrzení o derivaci předmětu dostáváme:

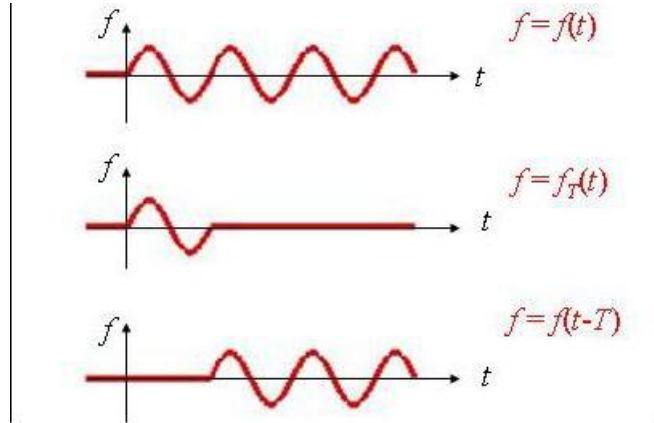
$$a\mathcal{L} \cos at = \mathcal{L}(\sin at)' = p\mathcal{L} \sin at - \sin 0 = p \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} - \sin 0 \Rightarrow \mathcal{L} \cos at = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Derivací podle parametru a odvodíme Laplaceův obraz funkce $t \cos at$ z obrazu funkce $\cos at$:

$$\mathcal{L}(t \cos at) = \mathcal{L} \frac{\partial \sin at}{\partial a} = \frac{\partial \frac{a}{p^2 + a^2}}{\partial a} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Uvedený výsledek lze také získat jako $-\frac{\partial \frac{p}{p^2 + a^2}}{\partial p}$ užitím tvrzení o derivaci obrazu. □

V dalším textu se zabývejme podrobněji obrazy periodických předmětů tj. platí $f(t + T) = f(t)$ pro $t > 0$. Označme $f_T(t) = f(t) - f(t)\eta(t - T)$ funkci tvořenou jednou periodou v intervalu $\langle 0, T \rangle$ a mimo tento interval nulovou. Dále označme $\mathcal{L}f(t) = F(p)$, $\mathcal{L}f_T(t) = F_T(p)$ Situaci ilustruje následující obrázek.



Věta 1.8 (větu o obrazu periodické funkce). *Nechť funkce $f(t)$ je originálem a navíc je periodická s periodou T . Potom platí*

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-Tp)}. \quad (1.2)$$

Příklad 1.9. Nalezněte Laplaceovy obrazy dvou technicky významných funkcí a sice jednocestného usměrnění $f_1(t) = \max(\sin t, 0)$ a dvoucestného usměrnění $f_2(t) = |\sin t|$.

Řešení. V obou případech je nutné určit Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t,$$

která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\pi \sin t \exp(-pt) dt = \left[-\frac{\exp(-pt)(\cos t + p \sin t)}{p^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}.$$

1. Funkce f_1 má periodu 2π a užitím předchozí věty dostáváme

$$\mathcal{L}f_1 = \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-2\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

2. Funkce f_2 má periodu π a stejný obraz základní periody. Užitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f_2 &= \frac{\frac{1+\exp(-\pi p)}{(p^2+1)}}{1-\exp(-\pi p)} = \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{1+\exp(-\pi p)}{1-\exp(-\pi p)} = \\ &= \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2+1)} \coth\left(\frac{\pi p}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Dalším typem hledaných Laplaceových obrazů jsou obrazy předmětů, které nejsou originálem Laplaceovy transformace, jako je např. Diracova distribuce. Při hledání těchto obrazů postupujeme podobně jako u Fourierovy transformace. Využijeme toho, že takovýto předmět je limitou předmětů, jež jsou originály Laplaceovy transformace. Laplaceovou transformací těchto předmětů dostaneme posloupnost, jejíž limita je obrazem hledaného předmětu. Podobně jako u Fourierovy transformace lze u hledání obrazu Diracova impulsu a jeho derivací využít tzv. filtrační vlastnost tj.

$$\mathcal{L}\delta(t-t_0) = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-pt} dt = e^{-t_0p}, \quad (1.3)$$

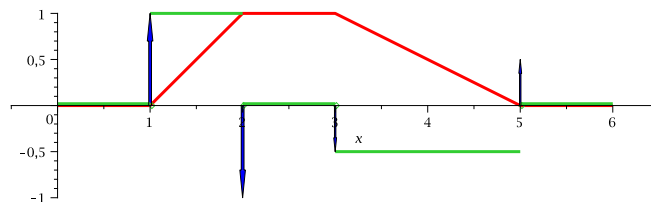
$$\mathcal{L}\delta^{(n)}(t-t_0) = \int_0^\infty \delta^{(n)}(t-t_0)e^{-pt} dt = (-1)^n \left(e^{-pt}\right)^{(n)} \Big|_{t=t_0} = p^n e^{-t_0p}. \quad (1.4)$$

Uveďme jednu možnost využití obrazu Diracova impulsu při hledání obrazů některých funkcí. Příkladem může být funkce definovaná pro různé intervaly různým předpisem tak, že zobecněná derivace dostatečně

velkého řádu této funkce je ve tvaru lineární kombinace Diracova impulsu a jeho derivací. V těchto případech můžeme Laplaceův obraz určit i bez analytického zápisu této funkce pouze s využitím tvrzení o integraci předmětu a znalosti obrazu zobecněné derivace této funkce.

Příklad 1.10. Nalezněte obraz funkce popisující lichoběžníkový impuls definovaný pomocí funkce f ,

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle; \\ 1, & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle; \\ -t/2 + 5/2, & \text{pro } t \in \langle 3, 5 \rangle; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Řešení. Na obrázku je zobrazen graf funkce f spolu s její první a druhou derivací. Druhá derivace je zobecněnou derivací a je všude nulová kromě lineární kombinací Diracových impulsů:

$$f''(t) = \delta(t - 1) - \delta(t - 2) - \frac{1}{2}\delta(t - 3) + \frac{1}{2}\delta(t - 5).$$

Aplikací Laplaceovy transformace dostáváme rovnici

$$p^2 F(p) = \mathcal{L} f_o''(t) = e^{-p} - e^{-2p} - \frac{1}{2}e^{-3p} + \frac{1}{2}e^{-5p},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme obraz $F(p)$ funkce $f(t)$,

$$F(p) = \frac{2e^{4p} - 2e^{3p} - e^{2p} + 1}{2p^2 e^{5p}}.$$

□

Před „technicky náročnější“ pasáží textu, kterou je inverzní Laplaceova transformace, vyřešíme v následujícím příkladě Laplaceovou transformací systém integro-diferenciálních rovnic.

Příklad 1.11. Nalezněte neznámou funkci $i_1(t)$, která spolu s funkcí $i_2(t)$ a počátečními podmínkami $i_1(0) = i_2(0) = 0$ je řešením systému integro-diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Li_1'(t) + Mi_2'(t) &= \eta(t), \\ Mi_1'(t) + Li_2'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(s) ds &= 0. \end{aligned}$$

Tato úloha může být interpretována jako nalezení proudu $i_1(t)$ v primárním obvodu dvou induktivně vázaných obvodů, přičemž jsou indukčně svázány dvě cívky o stejné indukci L a induktivní vazba mezi

cívkami je M ($M < L$). Druhý obvod je tvořen kromě indukčně svázaných cívek ještě kondenzátorem o kapacitě C . V čase $t = 0$ připojíme k primárnímu obvodu napětí mající průběh jednotkového skoku $\eta(t)$. Počáteční podmínky jsou nulové, což znamená, že v čase $t = 0$ je energie magnetického pole cívek nulová stejně jako energie elektrického pole kondenzátoru. Poznamenejme, že se jedná pouze o modelovou situaci, neboť nejsou vzaty v úvahu ohmické odpory v systému. Z Laplaceovova obrazu této soustavy,

$$\begin{aligned} LpI_1(p) + MpI_2(p) &= \frac{1}{p}, \\ MpI_1(p) + \left(Lp + \frac{1}{Cp}\right)I_2(p) &= 0, \end{aligned}$$

můžeme snadno určit funkci $I_1(p)$ (například užitím Cramerova pravidla):

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & Mp \\ 0 & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Lp & Mp \\ Mp & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p} \left(Lp + \frac{1}{Cp}\right)}{Lp \left(Lp + \frac{1}{Cp}\right) - M^2p^2} = \frac{CLp^2 + 1}{C(L^2 - M^2)p^2 \left(p^2 + \frac{L}{C(L^2 - M^2)}\right)}.$$

Při hledání proudu $i_1(t)$ si zjednodušíme situaci tím, že rozložíme funkci $I_1(p)$ na součet parciálních zlomků, tj.

$$I_1(p) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \text{kde } a = \sqrt{\frac{L}{C(L^2 - M^2)}}.$$

Nyní ke každému zlomku najdeme vzor. S funkcemi, které mají obraz roven jednotlivým parciálním zlomkům (bez konstant), jsme se seznámili v Příkladu 1.3 a v Příkladu 1.7. Odtud dostáváme

$$i_1(t) = \frac{t}{L} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \sin at.$$

Jednoznačnost takto nalezeného řešení je dále v textu řešena ve Větě 1.13. Protože v obvodu nebyly vzaty v potaz ohmické odpory není systém stabilní a proud s časem vzrůstá.

Tento příklad dokládá důležitost postupu najít předmět k danému obrazu, tj. důležitost inverzní Laplaceovy transformace. Poznamenejme, že často provedení inverzní transformace je nejobtížnější částí řešení příkladů tohoto typu. Uvedeme proto několik vět, které vymezí nutné podmínky pro funkce komplexní proměnné, jež jsou obrazem originálu Laplaceovy transformace.

Věta 1.12. *Nechť funkce $F(p)$ je obrazem originálu Laplaceovy transformace, potom platí (tzv. nutné podmínky):*

1. *Existuje číslo ξ_1 tak, že $F(p)$ je regulární funkcí komplexní proměnné v polorovině $\Re p > \xi_1$.*
2. *V polorovině $\Re p \geq \xi_2$, kde $\xi_2 > \xi_1$, platí: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.*
3. *V oblasti $|p| < k \Re p$, kde $k > 1$, existuje konečná limita $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$.*

1.1 Zpětná Laplaceova transformace

Východiskem úvah o zpětné Laplaceově transformaci je Lerchova věta.

Věta 1.13. *Nechť vzory $f_1(t)$, $f_2(t)$ mají stejný Laplaceův obraz, tj. $\mathcal{L}f_1(t) = \mathcal{L}f_2(t)$. Potom platí*

$$\int_0^{\infty} |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

Pro dva originály (Definice 1.2) se stejným obrazem se tyto předměty mohou lišit pouze hodnotami v izolovaných bodech, ve kterých alespoň jeden z nich není spojitý. Odstraněním této nejednoznačnosti tím, že se dále omezíme na originály, která mají v bodě nespojitosti funkční hodnotu rovnu aritmetickému průměru limit zleva a zprava, můžeme definovat inverzní Laplaceovu transformaci.

Definice 1.14. Nechť F je funkce komplexní proměnné, ke které existuje originál Laplaceovy transformace. Přiřadíme-li k funkci F originál f splňující pro každý svůj bod nespojitosti t_0

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right),$$

potom toto přiřazení nazýváme **inverzní Laplaceovu transformací**. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{L}^{-1}F(p) = f(t)$.

Obdobně postupujeme i u inverzní Laplaceovy transformace Diracovy distribuce a její derivace.

Zpětná transformace racionální lomené funkce

Základní myšlenka je velmi jednoduchá. Vychází z možnosti rozkladu racionální lomené funkce (musí být ryze lomená) na součet parciálních zlomků. To je postup, který by měl každý čtenář znát z integrálního počtu funkcí jedné proměnné. Tato myšlenka je někdy zastřena složitě vypadajícími vzorci, které postup zjednodušují jen ve speciálních případech. Jelikož F je funkce komplexní proměnné, můžeme využít i rozklad na parciální zlomky v komplexním oboru.

V případě kdy se jedná o zlomek se jmenovatelem ve tvaru kvadratického trojčlenu v první mocnině je vhodné tento zlomek upravit na součet obrazů funkcí $\sin$ a $\cos$:

$$\frac{Ap + B}{(p + a)^2 + b^2} = \frac{A(p + a)}{(p + a)^2 + b^2} + \frac{B - Aa}{(p + a)^2 + b^2} = A\mathcal{L}e^{-at} \cos bt - \frac{B - Aa}{b} \mathcal{L}e^{-at} \sin bt,$$

přičemž bylo použito tvrzení o posunutí obrazu na výsledky Příkladu 1.7.

Místo uvádění vzorců, které mohou za určitých předpokladů urychlit výpočet (např. polynom ve jmenovateli má jednoduché kořeny), je vhodné uvést, že v literatuře je možné dohledat rozsáhlé slovníky transformace.

Nutná a postačující podmínka, aby racionální lomená funkce $F(p)$ byla obrazem originálu (viz Definice 1.2), je předpoklad, že funkce $F(p)$ je ryze lomená, tj. stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli.

Celý postup zahrnující rozklad na parciální zlomky budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1.15. Vypočtěte $\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že kvadratický dvojčlen ve jmenovateli je v první mocnině nebude obtížné provést rozklad na součet parciálních zlomků v reálném oboru.

Předpokládaný tvar rozkladu bude

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{(p + 1)} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{Cp + D}{(p^2 + 1)}.$$

Po formálním součtu na pravé straně porovnáváme čitatele obou zlomků, tj.

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A(p + 1)(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Cp + D)(p + 1)^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}.$$

Rovnice, ze kterých určíme hledané konstanty A , B , C , D , můžeme získat buď porovnáním funkčních hodnot nebo porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné p . První dvě rovnice získáme porovnáním funkčních hodnot pro $p = -1$, $p = 0$, další dvě rovnice porovnáním koeficientů u mocnin p^3 , p , tj.

$$\begin{aligned} 2 &= 2B, \\ 2 &= A + B + D, \\ 0 &= A + C, \end{aligned}$$

$$0 = A + C + 2D.$$

Tento systém má řešení $A = 1 = B$, $C = -1$, $D = 0$. Jestliže máme k dispozici rozklad je další výpočet jednoduchý. Obvykle využijeme vzorců pro nalezení předmětů. V tomto případě můžeme využít i výsledků z Příkladu 1.4 a z Příkladu 1.7:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p + 1)} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p + 1)^2} - \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{(p^2 + 1)} = \eta(t)(e^{-t} + te^{-t} - \cos t).$$

□

Integrální tvar inverzní transformace

Při hledání integrálního tvaru Laplaceovy transformace využijeme vlastností Fourierova integrálu. Nechť funkce $f(t)$ je originálem Laplaceovy transformace s indexem růstu s_0 .

Potom pro $s > s_0$ lze odvodit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} F(p) e^{pt} dp.$$

Uvedený nevlastní integrál po přímce $p = s + j\omega$, kde $-\infty < \omega < \infty$ se obvykle vzhledem k technické náročností nepočítá přímo, ale pomocí reziduí. V následující větě jsou uvedené úvahy konkretizovány.

Věta 1.16. *Nechť funkce $F(p)$ je holomorfní všude s výjimkou izolovaných singularit $p_1, \dots, p_n$ ležících v polorovině $\Re p < s$. Nechť funkce $F(p)$ konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic $|p| = R_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Potom pro konvergentní integrál $\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} |F(p)e^{pt}| dp$ platí*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}_{p=p_k} (F(p) \exp pt) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Užití této věty je v následujícím příkladu. Pro srovnání určíme pomocí reziduí předmět k funkci z příkladu 1.15.

Příklad 1.17. Určete vzor k funkci $F(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$.

Řešení. Tato funkce splňuje předpoklady věty. Má tři singulární body, jeden pól $p_1 = -1$ druhého řádu a dvojici komplexně sdružených pólů $p_{2,3} = \pm j$. Vypočteme jednotlivá rezidua funkce $F(p)e^{pt}$

$$\operatorname{rez}_{p=-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{2e^{pt}}{(p^2 + 1)} \right)' = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2te^{pt}}{(p^2 + 1)} - \frac{4pe^{pt}}{(p^2 + 1)^2} = e^{-t}(1 + t),$$

$$\operatorname{rez}_{p=\pm j} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p=\pm j} \frac{2e^{pt}}{(p \pm j)(p + 1)^2} = \frac{2e^{\pm jt}}{(\pm 2j)(\pm 2j)} = -\frac{e^{\pm jt}}{2},$$

a dostáváme funkci $f(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = e^{-t}(1 + t) - \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = e^{-t}(1 + t) - \cos t.$$

□

Poznámka 1. Uvedenou větu lze formulovat i v podstatně silnějším znění [9]. Například může být reziduí nekonečně mnoho a jejich suma je nahrazena nekonečnou řadou, kde rezidua sčítáme podle velikosti jejich modulu. Tamtéž je použití této věty při hledání předmětu, který je T periodický; to jest funkce $F(p)$ je součinem a jeden činitel je zlomek $(1 - e^{-pT})^{-1}$. Předpoklady této věty nejsou splněny ani funkce $R(p)e^{at}$ ($R(p)$ je racionální lomená funkce). Y Zde použijeme větu o translaci. Další možností je využít vyjádření předmětu ve tvaru konvoluce.

Dalším „speciálním“ případem je obraz, který je nulový a holomorfní v nekonečnu.

Věta 1.18. *1. Heavivideova věta o rozkladu. Nechť lze funkci $F(p)$ pro $|p| > R > 0$ vyjádřit ve tvaru konvergentní řady:*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Potom platí:

$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Užitečnost této budeme demonstrovat na následujícím příkladu

Příklad 1.19. Pomocí předchozí věty ukažte, že platí $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$.

Řešení. Uvedenou rovnost získáme porovnáním rozvoju obou funkcí. Funkce $\sin t$ má Taylorovu řadu se středem v $t_0 = 0$ ve tvaru $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ odtud plyne rozvoj funkce

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$

Taylorovu řadu funkce $\operatorname{arctg} t$ lze získat integrací geometrické řady $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$. Platí tedy

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

V obou řadách máme $a_n = \begin{cases} 0, & \text{pro sudé } n = 2k; \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{pro liché } n = 2k+1. \end{cases}$ Funkce arctg je funkcí komplexní a v odvozené rovnosti je brána pouze hlavní větev. □

Poznamenejme, že uvedený příklad může být vhodnou ukázkou použití Heavisideovy věty v obou směrech, neboť funkce $\frac{\sin t}{t}$ má transcendentní integrál a naopak funkce $\arctg \frac{1}{p}$ má v počátku podstatnou singularitu.

1.2 Souvislost Fourierovy a Laplacevy transformace

Fourierovy obrazy lze někdy počítat pomocí Laplaceových obrazů, které se snáze počítají, neboť to jsou holomorfní funkce. Rozlišme dva případy:

1. Funkce $f(t)$ je nulová pro $t < 0$ a obraz Fourierovy transformace existuje (je originálem Laplaceovy transformace), potom Fourierův obraz dostaneme tak, že v Laplaceovu obrazu za p dosadíme $p = j\omega$:

$$\mathcal{F}f(t) = F(\omega) = \mathcal{L}f(t)|_{p=j\omega}$$

2. Funkce $f(t)$ má obraz Fourierovy transformace a pro $t < 0$ je nenulová. Označme $f^+(t)$ zúžení funkce $f(t)$ na $\langle 0, \infty$ a $f^-(t) = f(-t)$ pro $t \in \langle 0, \infty$. Předpokládejme, že jejich Laplaceovy obrazy $F_1(p) = \mathcal{L}f^+(t)$, $F_2(p) = \mathcal{L}f^-(t)$ existují. Potom platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(-t)e^{j\omega t} dt = F_1(j\omega) + F_2(-j\omega), \quad (1.6)$$

Užití této identity umožní v návaznosti na výsledek Příkladu 1.19 určit Fourierův obraz funkce $\frac{\sin t}{t}$.

Uvážíme, že funkce $\frac{\sin t}{t}$ je sudá a dostáváme:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{jw} + \operatorname{arctg} \frac{-1}{jw}.$$

Dle definice hlavní větve funkce $\operatorname{arccotg}$ dostáváme rovnost

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{1}{jw}}{1 - j\frac{1}{jw}} - \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{-1}{jw}}{1 - j\frac{-1}{jw}} = -\frac{j}{2} \left(\operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} + \operatorname{Ln} \frac{w-1}{w+1} \right).$$

Pro reálnou proměnnou ω nastávají dvě možné varianty

1. $|\omega| > 1$, z čehož plyne $\frac{w-1}{w+1} > 0$ a dané logaritmy jsou reálnými funkcemi, které se vzájemně sečtou na 0, neboť jejich argumenty jsou převrácenými hodnotami.
2. $|\omega| < 1$ z čehož plyne $\frac{w-1}{w+1} < 0$ a pro dané logaritmy platí:

$$\operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} + \operatorname{Ln} \frac{w-1}{w+1} = \ln \left| \frac{w+1}{w-1} \right| + j\pi + \ln \left| \frac{w-1}{w+1} \right| + j\pi = 2j\pi,$$

neboť se reálné logaritmy odečtou ze stejného důvodu jako v prvním případě.

Celkově dostáváme funkci, které je nulová pro $t \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$ a v intervalu $(-1, 1)$ rovna $-\frac{j}{2}2j\pi = \pi$:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \pi(\eta(\omega + 1) - \eta(\omega - 1)).$$

1.3 Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic

Jak jsme již uvedli v úvodu, je Laplaceova transformace s výhodou používána k řešení diferenciálních, integro-diferenciálních rovnic a jejich soustav. Předností tohoto postupu je, že při jeho užití u rovnic s konstantními koeficienty jsou transformované rovnice algebraickými. Další výhodou je, že při řešení Cauchyho počáteční úlohy není třeba hledat obecné řešení a posléze určovat partikulární řešení na základě počátečních podmínek. Je-li cílem nalezení obecného řešení integro-diferenciální rovnice, dosadíme za počáteční podmínky obecné konstanty a popsáním postupem získáme obecné řešení.

V následujících ukázkách budeme postupovat od jednodušších příkladů ke složitějším, navíc budeme při hledání předmětu užívat různé možnosti jeho nalezení.

Příklad 1.20. Nalezněte řešení diferenciální rovnice $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$, určené počátečními podmínkami $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.

Řešení. Nejdříve nalezneme obraz rovnice:

$$\mathcal{L}x'' - 2\mathcal{L}x' = \mathcal{L}e^t t^2 + \mathcal{L}e^t t - 3\mathcal{L}e^t,$$

$$\begin{aligned}
 p^2 X(p) - 2p - 2 - 2pX(p) + 4 &= \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{3}{p-1}, \\
 X(p)(p^2 - 2p) &= \frac{-3p^2 + 7p - 2}{(p-1)^3} + 2p - 2.
 \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k $X(p)$ a získanou racionální lomenou funkci rozložíme na součet parciálních zlomků :

$$X(p) = \frac{2p^3 - 8p^2 + 9p - 1}{(p-1)^3(p-2)} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Předmět nalezneme pomocí vzorce pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o posunutí obrazu:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3} \right\} = e^{2t} + e^t(1 - t - t^2).$$

□

Příklad 1.21. Nalezněte řešení systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
 3y_1' - y_2'' + y_2' - y_1 &= 2t^2 + f(t) \\
 y_2' - 3y_1 &= 0,
 \end{aligned}$$

určené počátečními podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2'(0) = y_2(0) = 0$, kde $f(t)$ je libovolná spojitá funkce.

Řešení. Budeme postupovat analogicky s předcházející ukázkou. Nejdříve určíme obraz systému rovnic ($f(t) \leftrightarrow F(p)$):

$$\begin{aligned} 3pY_1 - p^2Y_2 + pY_2 - Y_1 &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ pY_2 - 3Y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k proměnným Y_1, Y_2 jsme získali systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (3p - 1)Y_1 + Y_2(p - p^2) &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ -3Y_1 + pY_2 &= 0, \end{aligned}$$

jehož řešení můžeme získat pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{p^3} + F(p) & p(1-p) \\ 0 & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p-1 & p(1-p) \\ -3 & p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{p^2} + pF(p)}{\underbrace{3p^2 - p + 3p - 3p^2}_{2p}} = \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2}, \\ Y_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 3p-1 & \frac{4}{p^3} + F(p) \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{2p} = \frac{6}{p^4} + \frac{3}{2} \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Dále použijeme vzorec pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o integrálu předmětu dostáváme:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2} \right\} = t^2 + \frac{1}{2} f(t),$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{p^4} + \frac{3}{2} \frac{F(p)}{p} \right\} = t^3 + \frac{3}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

□

Předmět k obrazu $F(p)/p$, v němž je blíže neurčená funkce, jsme získali podle tvrzení o integraci předmětu. Stejný výsledek bychom získali podle tvrzení o konvoluci předmětů. Funkce $1/p$ má předmět Heavisideovu funkci jednotkového skoku a $F(p)$ funkci $f(t)$. Vyjádření předmětu ve tvaru konvolučního integrálu je postup mnohem využitelnější. V dalším příkladu tohoto obratu využijeme při řešení diferenciální rovnice s periodickou pravou stranou.

Příklad 1.22. Řešte diferenciální rovnici $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$ spolu s nulovými počátečními podmínkami $y(0) = 0$.

Řešení. S využitím Příkladu 1.9 získáme snadno Laplaceův obraz rovnice

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))},$$

ze které snadno nalezneme obraz řešení,

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)(1-\exp(-\pi p))}.$$

Funkci $Y(p)$ je možné chápat jako součin dvou funkcí

$$\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{(p^2+1)(1-\exp(-\pi p))}$$

se známými předměty. Využitím tvrzení o konvoluci předmětů můžeme řešení formálně vyjádřit ve tvaru konvolučního integrálu:

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \max(\sin \tau, 0) d\tau.$$

Velice často, např. při studiu asymptotického chování řešení rovnice, je vhodnější jiný zápis tohoto řešení ve tvaru součtu periodické a neperiodické složky. Předpokládejme, že takovýto postup je možný a obraz řešení má tvar:

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)(1-\exp(-\pi p))} = \frac{A}{p+1} + \frac{G_{2\pi}(p)}{1-\exp(-2\pi p)},$$

kde druhý sčítanec je obrazem periodické složky. Vzhledem k periodicitě pravé strany $f(t) = \max(\sin t, 0)$ rovnice očekáváme periodu 2π pro tuto periodickou složku řešení. Proto, s využitím tvrzení o obrazu

periodické funkce, je obrazem této složky řešení zlomek, který ve jmenovateli obsahuje rozdíl $1 - \exp(-2\pi p)$ a čítel je obrazem jediného impulsu $G_{2\pi}(p)$. Po vynásobení rovnice výrazem $1 - \exp(-2\pi p)$ dostáváme

$$\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1 + \exp(-p\pi)}{(p^2 + 1)} = \frac{A(1 - \exp(-2\pi p))}{(p+1)} + G_{2\pi}(p).$$

Nyní použijeme inverzní transformaci s tím, že druhý činitel součinu vlevo je předmětem jednoho impulsu $f_{2\pi}(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t$ a při stanovení předmětu levé strany rovnice využijeme tvrzení o konvoluci předmětů

$$e^{-t} * (\eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_{2\pi}(\tau) d\tau = A (e^{-t} \eta(t) - e^{-(t-2\pi)} \eta(t - 2\pi)) + g_{2\pi}(t).$$

Protože předměty $f_{2\pi}$, $g_{2\pi}$ jsou pro $t > 2\pi$ nulové dostaneme vztah z něhož určíme A :

$$e^{-t} \frac{e^\pi + 1}{2} = e^{-t} \int_0^\pi e^\tau \sin \tau d\tau = A e^{-t} (1 - e^{2\pi}) \Rightarrow A = \frac{-1}{2(\exp(\pi) - 1)}.$$

Po dosazení za A do rovnice získáme vztah, ze kterého určíme na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ periodickou složku řešení $g_{2\pi}(t)$. V intervalu $0 < t < \pi$ platí:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t) +$$

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} \left(\sin t - \cos t + e^{-t} \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \right).$$

Analogicky dostáváme pro $\pi < t < 2\pi$:

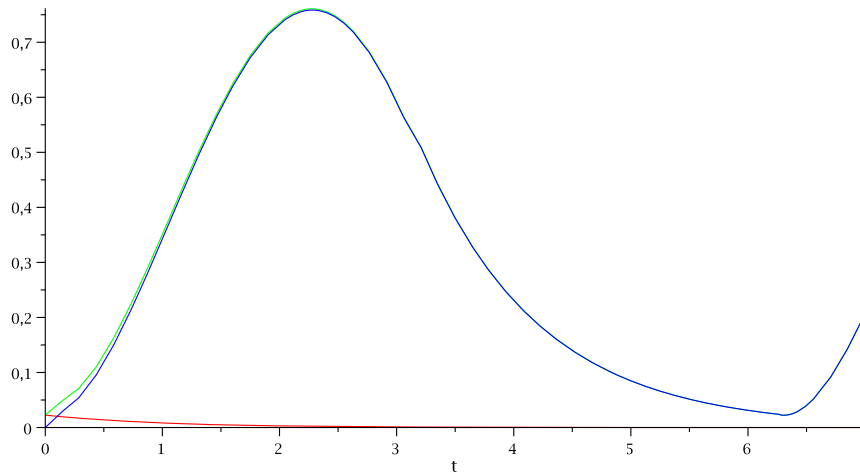
$$g_{2\pi}(t) = \int_0^{\pi} e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} =$$

$$\frac{e^{-t}}{2} (e^{\pi} + 1) + \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{2\pi} + e^{\pi} - 1}{e^{\pi} - 1}.$$

Řešení $y(t)$ nalezneme ve tvaru součtu

$$y(t) = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t} + g_{per}(t),$$

kde $g_{per}(t)$ je periodická složka řešení dostatečně popsaná průběhem v základním intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ ($g_{per}(t) = g_{2\pi}(t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$). Vzhledem k tomu, že neperiodická složka $A = \frac{1}{2(\exp(-\pi)-1)} e^{-t}$ nabývá velmi malých hodnot, lze pro dostatečně velká t řešení ztotožnit s periodickou složkou. Toto má i praktický význam. Daná rovnice popisuje tok elektrického proudu v obvodu tvořeném cívkou o indukci $L = 1$ a ohmickým odporem $R = 1$, který byl v čase $t = 0$ připojen k jednocestnému usměrněnému napětí. Nalezená periodická složka řešení popisuje potom ustálený stav. $\square$



Poznámka 2. V předcházejícím příkladu byl realizován postup nalezení periodické složky řešení. Podrobněji je tento postup popsán v [9].

V praktických případech často opakovaně řešíme podobné rovnice, kde levá strana je stejná a mění se pouze pravá strana. Budeme-li rovnici interpretovat tak, že její řešení je reakcí nějakého systému na vstup popsáný pravou stranou, je vhodné získat výsledek ve tvaru, kdy je možné pouze dosazovat různé pravé strany. Např. je-li řešením proud v elektrickém obvodu popsáným nějakou lineární integro-diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty $\mathcal{L}(i(t))$ a pravou stranou je nějaké napětí $u(t)$, ke kterému je obvod

připojen, znamená to opakovaně řešit rovnici $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$. Z toho plyne, že Laplaceův obraz této rovnice $Y(p)L(p) = U(p)$ má řešení za stejných počátečních podmínek vždy ve tvaru součinu funkcí

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot U(p).$$

S využitím vlastností konvoluce dvou funkcí $l(t) \leftrightarrow \frac{1}{L(p)}$, $u(t) \leftrightarrow U(p)$ dostáváme řešení

$$i(t) = \int_0^t l(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Výše uvedená funkce $l(t)$ se v teorii lineárních systémů nazývá **impulsní charakteristika**, protože je tato funkce chápána jako odezva systému na Diracův impuls. Funkce $l(t)$ je totiž Laplaceovým vzorem funkce $\frac{1}{L(p)}$ a čítec tohoto zlomku je obrazem Diracova impulsu $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Stanovit tuto charakteristiku experimentálně je obtížné, neboť se Diracova funkce i přibližně nesnadno aproximuje. Je mnohem jednodušší stanovit charakteristiku $h(t)$ jako reakci systému na Heavisideovu funkci jednotkového skoku:

$$\mathcal{L}(h(t)) = \eta(t) \Leftrightarrow H(p)L(p) = \frac{1}{p}.$$

Tato charakteristika se nazývá **přechodová charakteristika** a umožní s využitím Duhamelova vzorce jiné vyjádření reakce systému $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$ na libovolnou pravou stranu $u(t)$. Platí

$$I(p) = \frac{1}{L(p)}U(p) = p\frac{1}{pL(p)}U(p) = pH(p)U(p)$$

a aplikací zmíněného Duhamelova vzorce dostáváme

$$i(t) = h(t)u(0^+) + h(t) * u'(t) \quad \text{nebo} \quad i(t) = h(0^+)u(t) + h'(t) * u(t).$$

V případě, že se jedné o lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty tj.,

$$\mathcal{L}i(t) = a_n i^{(n)}(t) + a_{n-1} i^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 i'(t) + a_0 i(t),$$

je funkce $L(p)$ charakteristickým polynomem. V tomto případě máme možnost určit předmět $l(t)$ i jinak než jako odezvu na Diracův impuls. Budeme-li uvažovat homogenní systém, tj. systém s nulovou pravou stranou, a dále konkrétní počáteční úlohu určenou počátečními podmínkami

$$i(0) = 0, \quad i'(0) = 0, \quad \dots, \quad i^{(n-2)}(0) = 0, \quad i^{(n-1)}(0) = 1,$$

dostaneme pro obraz řešení rovnici ve tvaru

$$I(p) = \frac{a_n}{L(p)}.$$

Poslední rovnice je až na násobek a_0 obrazem impulsní charakteristiky lineárního systému. Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice můžeme vyjádřit pomocí konvolučního integrálu, již dříve zavedené váhové funkce. Ta je řešením nehomogenní rovnice (dělená koeficientem a_n) splňující výše uvedené počáteční podmínky.

1.4 Slovník Laplaceovy transformace

Všechny předměty v tabulce jsou násobeny funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$ a tuto skutečnost je třeba při práci s tabulkou zohlednit.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
A	$\frac{A}{p}$	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$\sin bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$\cosh bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\sinh bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
$t \cos bt, \ b \neq 0$	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$	$e^{-at} t \cos bt$	$\frac{(p + a)^2 - b^2}{((p + a)^2 + b^2)^2}$
$t \sin bt, \ b \neq 0$	$\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$	$e^{-at} t \sin bt$	$\frac{2b(p + a)}{((p + a)^2 + b^2)^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}, \ b \neq a$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{e^{at} - \cos bt - \frac{a}{b} \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{1}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}, \ b \neq a$	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{ae^{at} - a \cos bt + b \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{p}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{a^2 e^{at} + b^2 \cos bt + ab \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{p^2}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$\left(t + \frac{at^2}{2}\right)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$	$\frac{\sin bt - bt \cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(p^2 + b^2)^2}$

1.5 Příklady na procvičení

Cvičení

1. Určete Laplaceův obraz funkce $f(t)\eta(t)$

a) $f(t) = 1 - 2 \cos 3t$

c) $f(t) = \sqrt{t}e^{-t}$

b) $f(t) = te^{-2t}$

d) $f(t) = te^t \cos 2t$

2. Načrtněte graf signálu $f(t)$ a určete jeho Laplaceův obraz:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ t^2 & \text{pro } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pro } 1 < t \end{cases}$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } t < 0, 2 < t \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \sin t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } \frac{\pi}{2} < t \end{cases}$$

$$\text{d) } f(t) = \begin{cases} 2t - 4 & \text{pro } 2 < t < 4 \\ 8 - t & \text{pro } 2 \leq t < 8 \\ 0 & \text{pro } t < 2, 8 < t \end{cases}$$

3. Načrtněte graf periodického signálu $f(t)$ s periodou T a určete jeho Laplaceův obraz:

$$a) T = 6$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 1 \\ 4t - 4 & \text{pro } 1 \leq t < 2 \\ 6 - t & \text{pro } 2 \leq t < 6 \end{cases}$$

$$b) T = 4$$

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } 2 < t < 4 \end{cases}$$

4. Určete předmět k Laplaceovu obrazu $F(p)$

$$a) F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)}$$

$$b) F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2}$$

$$c) F(p) = \frac{(p-3)^2}{p(p^2+9)}$$

$$d) F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+4p^2+13p}$$

5. Nalezněte řešení diferenciálních rovnic určených počátečními podmínkami:

$$a) y'' + 5y' + 6y = 12e^t, \quad y(0^+) = y'(0^+) = 1$$

$$b) y'' + 4y = \cos t, \quad y(0^+) = 0, \quad y'(0^+) = 0$$

$$c) y''' + y' = e^{2t}, \quad y(0^+) = 1, \quad y'(0^+) = -1, \quad y''(0^+) = 2$$

$$d) y'' + 3y' + 2y = t + e^{-t}, \quad y(0^+) = y'(0^+) = 0$$

6. Nalezněte řešení integrálních a integro-diferenciálních rovnic případně určených počátečními podmínkami:

$$a) y' + 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 0, \quad y(0^+) = 1$$

$$b) y' - y - 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin t, \quad y(0^+) = 0$$

$$c) y(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau$$

$$\text{d) } y'' + y' + y + \int_0^t y(\tau) d\tau = 2, y(0^+) = 2, y'(0^+) = -2$$

7. Nalezněte řešení systému diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic určených počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} \text{a) } y_1' &= y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2 \end{aligned}, \quad y_1(0^+) = 1, y_2(0^+) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y_1' &= 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-t} \\ y_2' &= 3y_1 + 5y_2 + 5e^{-t} \end{aligned}, \quad y_1(0^+) = 2, y_2(0^+) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y_1'' + 7y_2' + 8y_1 &= 0 \\ y_2'' - y_1' + 2y_2 &= 0 \end{aligned}, \quad y_1(0^+) = 1, y_1'(0^+) = 0, y_2(0^+) = 0, y_2'(0^+) = 0,$$

$$y_1' = -2y_1 + y_2'$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y_2' &= 2y_1 - 3y_2' + y_3, \quad y_1(0^+) = 1, y_1'(0^+) = 0, y_2(0^+) = 1, y_3(0^+) = 0, \\ y_3' &= 2y_2' - 3y_3 \end{aligned}$$

Výsledky

$$1a) F(p) = \frac{p^2 - 6p + 9}{p^3 + p}$$

$$1c) F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(p+1)^{2/3}}$$

$$2a) F(p) = \frac{e^{-p}}{p} \left[1 - \frac{1}{2}e^{-p}(3 - e^{-2p}) \right]$$

$$2b) F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-2p}) - \frac{2}{p^3}(1 + e^{-2p})$$

$$2c) F(p) = \frac{p + e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p(p^2 + 1)}$$

$$3a) F(p) = \frac{2e^{-p} - 3e^{-2p} + e^{-4p}}{p^2(1 + e^{-6p})}$$

$$4a) f(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

$$4c) f(t) = 1 - 2\sin 3t$$

$$4d) f(t) = \frac{1}{13} \left[1 + e^{-2t} \left(12 \cos 3t - \frac{28}{3} \sin 3t \right) \right]$$

$$5a) f(t) = e^t$$

$$1b) F(p) = \frac{1}{(p+2)^3}$$

$$1d) F(p) = \frac{p^2 - 2p - 3}{(p^2 - 2p + 5)^2}$$

$$2d) F(p) = \frac{1}{p^2}(2e^{2p} - 3e^{-3p} + e^{-8p})$$

$$3b) F(p) = \frac{2 - 4pe^{-2p}}{p(1 + e^{-4p})^3}$$

$$4b) f(t) = t - 2 = e^{-t}(t + 2)$$

$$5b) f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

$$5c) f(t) = \frac{36 \cos t - 12 \sin t - e^t - 15}{10}$$

$$5d) f(t) = \frac{3}{4}(e^{-2t} - 1) = te^{-t} + \frac{t}{2}$$

$$6a) f(t) = e^{-3t}(1 - 3t)$$

$$6c) f(t) = \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t$$

$$7a) y_1(t) = e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t)$$

$$7b) y_1(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-t} + 3e^t$$

$$7c) y_1(t) = \frac{7}{15} \cos 4t - \frac{8}{15} \cos t$$

$$7d) y_1 = \frac{1}{5}(1 - e^{-5t})$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(2 + 3e^{-5t})$$

$$6b) f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - te^{-t})$$

$$6d) f(t) = 2e^{-t}$$

$$y_2(t) = e^{2t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)$$

$$y_2(t) = -2e^{-2t} + 2e^t + e^t$$

$$y_2(t) = \frac{2}{15} \sin 4t - \frac{8}{15} \sin t$$

$$y_3 = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Laplaceova transformace - hledání obrazu reálné funkce či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenciální rovnice \(až třetího řádu\) s konstantními koeficienty pomocí Laplaceovy transformace.](#)

Literatura

- [1] Došlý, O.–Došlá, Z. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Brno: MU Brno, 1999. Skriptum.
- [2] Došlý, O.–Došlá, Z. *Metrické prostory*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2000. Skriptum.
- [3] Elaydi S.N. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Verlag 1999.
- [4] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [5] Eliáš, J.–Horváth, J. – Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*. Bratislava: Alfa Bratislava, 1972.
- [6] Kalas, J.–Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vydání. Brno: MU Brno, 2001. Skriptum.
- [7] Kuben, J. *Diferenciální rovnice*. 1. vydání. Brno: VA Brno, 1991. Skriptum.

-
- [8] Melkes, F.–Řezáč, M. *Matematika 2*. 1. vydání. Brno: VUT v Brně, 2003. Skriptum.
- [9] Pírko, Z.–Veit, J. *Laplaceova transformace. Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: Alfa Bratislava. 1970.
- [10] Sikorski, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Druhé, změněné a doplněné vydání. Vydání překladu 1. Praha: Academia, 1973. 496 s.
- [11] Šulista, M. *Základy analýzy v komplexním oboru*. Praha: SNTL 1981.
- [12] Veselý, J. *Komplexní analýza*. Praha: UKP Brno, 2000. Skriptum.