Závěrečná písemná práce z BMA2 – 2019 – D

jméno studenta	příjmení studenta	ID (osobní) číslo	jméno cvičícího	body ze cvičení

Řešení všech příkladů zpracujte tak, aby byl nezávislý pozorovatel schopen pouze na základě Vašeho řešení zrekonstruovat Vaše úvahy, tj. zejména aby bylo v každou chvíli zřejmé, jaký je význam uváděných čísel a hodnot, a aby bylo vidět, co kam dosazujete, co s čím sčítáte, odečítáte, násobíte, dělíte apod. Posuzováno bude pouze to, co uvedete na odevzdané listy. Jakékoliv logické skoky musejí být zdůvodněny.

Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5	Př. 6	Př. 7	**body celkem**

1. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy' = -2y + 3x^{-3}$.

   Výsledek je $y\,(x) = \left(-\dfrac{3}{x} + C\right) x^{-2}$

2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + 2y = e^x(25x + 10)$.

   Výsledek je $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (5x - 2)e^x$

3. Najděte hodnotu parametru a, pro který je funkce $u(x, y) = ax^2 - 2y^2 + 3x - 2y$ reálnou složkou nějaké holomorfní funkce $f(z)$. Poté funkci $f(z)$ najděte, jestliže $f(0) = 0$.

   Výsledek je $a = 2,\ f(x + jy) = 2(x + jy)^2 + (3 + 2j)(x + jy)$

4. Vypočtěte $\int\limits_\Gamma \frac{e^z(z+1)}{z^2}\mathrm{d}z$, kde Γ je hranice kladně orientované oblasti určené nerovností $|z| < 3$. Výsledek vyjádřete jako komplexní číslo v algebraickém tvaru.

   Výsledek je $2\pi j \operatorname*{rez}\limits_{z=0} \frac{e^z(z+1)}{z^2} = 4\pi j$

5. Najděte rozvoj funkce $f(t) = \pi + |t|$, kde $t \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$, do Fourierovy řady.

   Výsledek $f(t) = 2\pi - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}t\right) = 2\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{(2k-1)^2\pi} \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$

6. Užitím Laplaceovy transformace najděte řešení počáteční úlohy $x' - 4x + 3\int\limits_0^t x(s)\mathrm{d}s = 6t$, kde počáteční podmínka je $x(0) = 0$.

   Výsledek $pX - 4X + 3\dfrac{X}{p} = \dfrac{6}{p^2} \Longrightarrow X = \dfrac{6}{p(p^2 - 4p + 3)} \Longrightarrow x(t) = -3e^t + 2 + e^{3t}$

7. Užitím $\mathcal{Z}$–transformace najděte řešení rovnice $y(n + 2) - 5y(n + 1) + 6y(n) = 0$, $y(0) = 2, y(1) = 5$.

   Výsledek $y(n) = 2^n + 3^n$

Závěrečná písemná práce z BMA2 – 2019 – E

jméno studenta	příjmení studenta	ID (osobní) číslo	jméno cvičícího	body ze cvičení

Řešení všech příkladů zpracujte tak, aby byl nezávislý pozorovatel schopen pouze na základě Vašeho řešení zrekonstruovat Vaše úvahy, tj. zejména aby bylo v každou chvíli zřejmé, jaký je význam uváděných čísel a hodnot, a aby bylo vidět, co kam dosazujete, co s čím sčítáte, odečítáte, násobíte, dělíte apod. Posuzováno bude pouze to, co uvedete na odevzdané listy. Jakékoliv logické skoky musejí být zdůvodněny.

Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5	Př. 6	Př. 7	**body celkem**

1. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy' = 3y - 4x$.

   Výsledek je $y\left(x\right) = Cx^3 + 2x$

2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' - 3y = e^x(8x + 10)$.

   Výsledek je $y(x) = e^x C_1 + C_2 e^{-3x} + (x^2 + 2x)e^x$

3. Najděte hodnotu parametru a, pro který je funkce $v(x, y) = 3x^2 + ay^2 + 3x - 2y$ imaginární složkou nějaké holomorfní funkce $f(z)$. Poté funkci $f(z)$ najděte, jestliže $f(0) = 0$.

   Výsledek je $a = -3,\ f(x + jy) = 3j(x + jy)^2 + (3j - 2)(x + jy), f(z) = 3jz^2 + (3j - 2)z$

4. Vypočtěte $\int\limits_\Gamma \frac{\cos z}{z(z+\pi)}\mathrm{d}z$, kde Γ je hranice kladně orientované oblasti určené nerovností $|z| < 4$. Výsledek vyjádřete jako komplexní číslo v algebraickém tvaru.

   Výsledek je $2\pi j \left(\operatorname*{rez}_{z=0} \frac{\cos z}{z(z+1)} + \operatorname*{rez}_{z=-\pi} \frac{\cos z}{z(z+1)} \right) = 4j$

5. Najděte rozvoj funkce $f(t) = |t| - 2$, kde $t \in \langle -2; 2\rangle$, do Fourierovy řady.

   $$\textit{Výsledek}\quad f(t) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}t\right)$$

6. Užitím Laplaceovy transformace najděte řešení počáteční úlohy $x' - 4x + 4 \int\limits_0^t x(s)\mathrm{d}s = 4t$, kde počáteční podmínka je $x(0) = 1$.

   $$\textit{Výsledek:}\ pX - 1 - 4X + \frac{4}{p}X = \frac{4}{p^2} \Longrightarrow X = \frac{p^2 + 4}{p(p-2)^2} \Longrightarrow x(t) = 4te^{2t} + 1$$

7. Užitím $\mathcal{Z}$–transformace najděte řešení rovnice $y(n + 2) + y(n + 1) - 6y(n) = 0,\ y(0) = 2, y(1) = -1$.

   Výsledek $y(n) = 2^n + (-3)^n$