V zadání příkladů se objevuje parametr a, jehož stanovení je vždy součástí zadání příkladu.

1. Nalezněte partikulární řešení diferenciální rovnice 2 body

$$y' = axy + x^3 a\cos(a\pi/2) - y^3 xa\sin(a\pi/2)$$

určené počáteční podmínkou $y(0) = a$.

Parametr a je počet písmen jména studenta odevzdávajícího projekt.
řešení závisí na zbytku po dělení čísla a číslem 4
pro $a = 2k$ je :
rovnice $y' = axy + (-1)^k x^3 a$ lineární a má obecné řešení

$$y = \mathrm{e}^{kx^2} C - \frac{(-1)^k (1 + kx^2)}{k}$$

a dosazením počáteční podmínky stanovíme konstantu a celkově dostáváme

$$y = \mathrm{e}^{kx^2} \left(2k + \frac{(-1)^k}{k}\right) - \frac{(-1)^k (1 + kx^2)}{k}$$

pro $a = 2k + 1$ je :
rovnice $y' = axy - y^3 xa\,(-1)^k$ separovaná a má obecné řešení

$$(-1)^{k+1} - \mathrm{e}^{-(2k+1)x^2} C + y^{-2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-(2k+1)x^2} C + (-1)^k}}$$

a dosazením počáteční podmínky stanovíme konstantu a celkově dostáváme

$$y = \frac{2k+1}{\sqrt{(2k+1)^2 \mathrm{e}^{-(2k+1)x^2} + (-1)^k (2k+1)^2 + (-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)x^2}}}$$

2. Napište obecné řešení lineární diferenciální rovnice 1 bod

$$y'' - 2ay' + \left(a^2 + 4\sin\frac{a\pi}{2}\right) y = 4\,\mathrm{e}^{(a+2)x}$$

Parametr a je měsíc data narození studenta odevzdávajícího projekt.

Výsledky jsou ve třech formách:

- Pro $a = 2k$
$$y = \mathrm{e}^{ax}(C_1 + C_2 x) + \mathrm{e}^{(a+2)x}$$

- Pro $a = 4k + 1$

$$y = \mathrm{e}^{ax}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(a+2)x}$$

- Pro $a = 4k + 3$

$$y = \mathrm{e}^{(a+2)x}(C_1 + x) + C_2\mathrm{e}^{(a-2)x}$$

3. Určete parametr p tak, aby funkce 2body

$$u(x, y) = \sin(ax)\left(\mathrm{e}^{py} + \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-py}\right),$$

byla reálnou částí vhodné holomorfní funkce $f(z)$. Dále určete derivaci $f'(z)$ a možné funkce $f(z)$. Parametr a je počet písmen příjmení studenta odevzdávajícího projekt.

Stanovení parametru p

$p = \pm a$, protože platí $u''_{xx} + u''_{yy} = (p^2 - a^2)u \Rightarrow p = \pm a$.

Další postup závisí na závisí na zbytku po dělení čísla a číslem 4, užitá integrační konstanta je reálná.
Pro $a = 4k$ je $u(x, y) = \sin(ax)\left(\mathrm{e}^{py} + \mathrm{e}^{-py}\right)$

$$f'(x + jy) = a\cos(ax)\left(\mathrm{e}^{py} + \mathrm{e}^{-py}\right) - j\sin(ax)p\left(\mathrm{e}^{py} - \mathrm{e}^{-py}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z) = 2a\cos(az)$$

$$f(z) = \int 2a\cos(az)\mathrm{d}z = 2\sin(az) + jc$$

pro $a = 2k + 1$ je $u(x, y) = \sin(ax)\,\mathrm{e}^{py} = sin\,(ax)\,\mathrm{e}^{\pm ay}$

$$f'(x + jy) = a\cos(ax)\mathrm{e}^{\pm ay} - j\sin(ax)(\pm a)\mathrm{e}^{\pm ay} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z) = a\cos(az) \mp ja\sin(az)$$

$$f(z) = \int a\cos(az) \mp ja\sin(az)z = \sin(az) \pm j\cos(az) + jc = \pm j\mathrm{e}^{\mp jaz} + jc$$

pro $a = 4k + 2$ je $u(x, y) = \sin(ax)\left(\mathrm{e}^{py} - \mathrm{e}^{-py}\right)$

$$f'(x + jy) = a\cos(ax)\left(\mathrm{e}^{py} - \mathrm{e}^{-py}\right) + j\sin(ax)p\left(\mathrm{e}^{py} + \mathrm{e}^{-py}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z) = 2jp\sin(az)$$

$$f(z) = \int 2jp\sin(az)\mathrm{d}z = -2\frac{p}{a}\cos(az) + jc$$

4. Vypočtěte integrál $\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, kde 1bod

$$f(z) = z\sin z \quad \Gamma(t) = t\pi\exp(j\pi t),\ t \in \langle 0, a\rangle$$

$$\int_\Gamma z\sin z\,\mathrm{d}z = \sin(a\pi) + a\pi\cos(a\pi) = -a\pi$$

5. Vypočtěte $\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, přes kladně orientovanou křivku Γ,kde 2body

$$f(z) = \frac{1}{z^{1-(-1)^a}(z^2 - ja^2)(z^2 + (-1)^a a^2)} \qquad \Gamma : |z - a| = \sqrt{3}a$$

Výsledky mají dvě varianty
a=2k:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2j\pi\left(\operatorname*{rez}_{z=\sqrt{j}a} f(z) + \operatorname*{rez}_{z=ja} f(z) + \operatorname*{rez}_{z=-ja} f(z)\right) = \frac{j\pi}{\sqrt{2}a^3}$$

a=2k+1:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2j\pi\left(\operatorname*{rez}_{z=0} f(z) + \operatorname*{rez}_{z=\sqrt{j}a} f(z) + \operatorname*{rez}_{z=a} f(z)\right) = \frac{-\pi}{2a^5}\left(\sqrt{2} + 1 + j\right)$$

6. Pomocí Laplaceovy transformace řešte: 2body

$$y'(t) + 2(a-1)y(t) + \left((a-1)^2 + \sin\left(\frac{(a-1)\pi}{2}\right)\right)\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = 2\mathrm{e}^{-at},$$
$$y(0) = -a\sin\left(\frac{(a-1)\pi}{2}\right),$$

Výsledky mají tři varianty
a=2k+1:

$$-2\,a\mathrm{e}^{-at} + 2\,\mathrm{e}^{-(a-1)t}\,(a - at + t)$$

a=4k:

$$\frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{-at}\left(-2 + a^2 + a + 2\,at\right) - \mathrm{e}^{-(a-2)t}\,(a+1)\,(a-2)\right)$$

a=4k+2:

$$-a\mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-(a-1)t}\sin(t)\left(-2\,a + 2 + a^2\right)$$