Příjmení, jméno, ID 5. 3. 2020 A

....

1. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 3body

$$(x^2+4)y'(x) = 4xy(x) + 2(x^2+4)^2.$$

obecné řešení zhomogenizované rovnice $y(x) = C(x^2+4)^2$

variace konstant

$$C'(x) = \frac{2}{(x^2+4)} \Rightarrow C(x) = \arctan\frac{x}{2} \Rightarrow Y(x) = (x^2+4)^2 \arctan\frac{x}{2}$$

Obecné řešení rovnice $y(x) = (x^2+4)^2\left(C + \arctan\frac{x}{2}\right)$

2. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu 3body

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^x\cos x.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2x) - e^x\sin x$$

3. Ověřte, že $u = x^3 - 3xy^2 - 2y$ je reálnou částí holomorfní funkce $f(x+jy)$. Určete tuto funkci, jesliže $f(0) = j$ 3body

Platí $u''_{xx} = 6x,\ u''_{yy} = -6x \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$f'(x+jy) = u'_x - ju'_y = 3x^2 - 3y^2 - j(-6xy-2) \Rightarrow f'(z) = 3z^2 + 2j \Rightarrow f(z) = z^3 + 2zj + C.$
Dosazením podmínky $f(0) = j,\ f(z) = z^3 + 2zj + j$

4. Vypočtěte hlavní hodnotu $\ln(-1+j)$ 1bod

$-1+j = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, proto platí $\mathrm{Ln}(-1+j) = \frac{1}{2}\ln 2 + j\frac{3\pi}{4}$.

Příjmení, jméno, ID 5. 3. 2020 B

....

1. Nalezněte obecné řešení lineárni diferenciální rovnice 3body

$$y'(x) = y(x)\,\mathrm{tg}\,x + 4\sin x.$$

obecné řešení zhomogenizované rovnice $y(x) = \dfrac{C}{\cos x}$

variace konstant

$$C'(x) = 4\cos x \sin x \Rightarrow C(x) = -\cos 2x \Rightarrow Y(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

Obecné řešení rovnice $y(x) = \dfrac{C - \cos 2x}{\cos x}$

2. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu 3body

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2xe^{2x}.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y(x) = e^{3x}C_1 + e^{2x}C_2 - xe^{2x}(x+2)$$

3. Ověřte, že $v = e^x \cos y + 2xy$ je imaginární částí holomorfní funkce $f(x+jy)$. Určete tuto funkci, jesliže $f(0) = 1 + j$ 3body

Platí $u''_{xx} = e^x \cos y,\; u''_{yy} = -e^x \cos y \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$f'(x+jy) = v'_y + jv'_x = e^x \sin y + 2x + j(e^x + 2y) \Rightarrow f'(z) = 2z + je^z \Rightarrow f(z) = z^2 + je^z + C.$

Dosazením podmínky $f(0) = 1 + j,\; f(z) = z^2 + 1 + je^z$

4. Vypočtěte hlavní hodnotu $\ln(1-j)$ 1bod

$1 - j = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$, proto platí $\mathrm{Ln}(1-j) = \frac{1}{2}\ln 2 - j\frac{\pi}{4}$.

Příjmení, jméno, ID 5. 3. 2020 C

....

1. Nalezněte obecné řešení lineárni diferenciální rovnice 3body

$$(x^2-9)y'(x) = -4xy(x) + \frac{6}{(x^2-9)^2}.$$

obecné řešení zhomogenizované rovnice $y(x) = \dfrac{C}{(x^2-9)^2}$

variace konstant

$$C'(x) = \frac{6}{(x^2-9)^2} \Rightarrow C(x) = \ln\frac{x-3}{x+3} \Rightarrow Y(x) = \frac{\ln\frac{x-3}{x+3}}{(x^2-9)^2}$$

Obecné řešení rovnice $y(x) = \dfrac{\ln\frac{x-3}{x+3} + C}{(x^2-9)^2}$

2. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu 3body

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 50xe^{-x}.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y(x) = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(5x+3)$$

3. Ověřte, že $u = e^x\cos y - 2xy$ je reálnou částí holomorfní funkce $f(x+jy)$. Určete tuto funkci, jesliže $f(0) = 1+j$ 3body

Platí $u''_{xx} = e^x\cos y,\ u''_{yy} = -e^x\cos y \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$f'(x+jy) = u'_x - ju'_y = e^x\cos y - 2y - j(-e^x\sin y - 2x) \Rightarrow f'(z) = e^z + j2z \Rightarrow f(z) = e^z + jz^2 + C.$
Dosazením podmínky $f(0) = 1+j$, $f(z) = e^z + jz^2 + j$

4. Vypočtěte hlavní hodnotu $\ln(1+j)$ 1bod

$1+j = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, proto platí $\mathrm{Ln}(1+j) = \frac{1}{2}\ln 2 + j\frac{\pi}{4}$.

Příjmení, jméno, ID 9. 3. 2020 D

....

1. Nalezněte obecné řešení lineárni diferenciální rovnice 3body

$$y'(x) = -\operatorname{cotg} x\, y(x) + \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

obecné řešení zhomogenizované rovnice $y(x) = \dfrac{C}{\sin x}$

variace konstant

$$C'(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow Y(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Obecné řešení rovnice $y(x) = \dfrac{1 + C\cos x}{\cos x \sin x}$

2. Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu 3body

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2xe^{2x}.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 - 2x + x^2) + e^x C_2$$

3. Ověřte, že $v = 3x^2y - y^3 - x$ je imaginární částí holomorfní funkce $f(x + jy)$. Určete tuto funkci, jesliže $f(0) = 2$ 3body

Platí $v''_{xx} = 6y,\ u''_{yy} = -6y \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$f'(x + jy) = v'_y + jv'_x = 3x^2 - 3y^2 + j(6xy - 1) \Rightarrow f'(z) = 3z^2 - j \Rightarrow f(z) = z^3 - jz + C$.
Dosazením podmínky $f(0) = 2$, $f(z) = z^3 + jz + 2$

4. Vypočtěte hlavní hodnotu $\ln(-1 - j)$ 1bod

$-1 - j = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$, proto platí $\mathrm{Ln}(-1 - j) = \frac{1}{2}\ln 2 - j\frac{3\pi}{4}$.