Závěrečná písemná práce z BMA2 – 2020

jméno studenta	příjmení studenta	ID (osobní) číslo	jméno cvičícího	body ze cvičení

V zadáních příkladů jsou obsaženy parametry a, resp. b za které si dosadíte čísla podle pokynů v zadání. Pro jiné hodnoty bude příklad hodnicený 0 body.

Řešení všech příkladů zpracujte tak, aby byl nezávislý pozorovatel schopen pouze na základě Vašeho řešení zrekonstruovat Vaše úvahy, tj. rámečkem zvýrazněte všechny mezivýsledky, které jsou uvedeny u každého příkladu. Jakékoliv logické skoky musejí být zdůvodněny jinak nebudou hodnoceny.

Odevzdaná práce musí obsahovat čestné prohlášení, že jste ji vytvořili samostatně bez cizí pomoci.

1. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y' \sin x = ay\cos x - b\cos x \sin x$.
   Kde a je počet písmen Vašeho jména a b je měsíc data Vašeho narození.
   *Postupně vyjádřete *obecné řešení rovnice homogenní, *užití metody variace konstanty, *výsledek*

   *. $y = C(\sin x)^a$ $\qquad$ *. $C' = \dfrac{-b\cos x}{(\sin x)^a}$ $\qquad$ *. $y = \dfrac{b\sin x}{a-1} + C(\sin x)^a$

2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2ay' + \left(a^2 + b^2 \sin\frac{a\pi}{2}\right)y = 4\mathrm{e}^{(b-a)x}$.
   Kde a je počet písmen ve jméně a b je počet písmen v příjmení.
   *Postupně vyjádřete *kořeny charakteristické rovnice, *partikulární řešení, *výsledek*

   pro $a = 2k$
   * $\lambda_{1,2} = a$ $\qquad$ * $Y = 4\,\frac{\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b^2}$ $\qquad$ * $y = \mathrm{e}^{-ax}C_2 + \mathrm{e}^{-ax}xC_1 + \frac{4\,\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b^2}$
   pro $a = 2k+1$, kde k je liché
   * $\lambda_1 = -a-b,\ \lambda_2 = -a+b$ $\qquad$ *$Y = 2\,\frac{x\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b}$ $\qquad$ *$y\,(x) = \mathrm{e}^{(-a-b)x}C_2 + \mathrm{e}^{(b-a)x}C_1 + 2\,\frac{x\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b}$
   pro $a = 2k+1$, kde k je sudé
   * $\lambda_{1,2} = a \pm jb$ $\qquad$ *$Y = 2\,\frac{\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b^2}$ $\qquad$ *$y = \mathrm{e}^{-ax}\sin(xb)\,C_2 + \mathrm{e}^{-ax}\cos(xb)\,C_1 + 2\,\frac{\mathrm{e}^{(b-a)x}}{b^2}$

3. Najděte hodnotu parametru p, pro který je funkce $u(x,y) = ax^3 + pxy^2 + (-1)^a bxy$ reálnou složkou nějaké holomorfní funkce $f(z)$. Poté funkci najděte $f(z)$, je -li $f(0) = 0$, a určete její derivaci.
   Kde a je ciferný součet dne a b je měsíc data Vašeho narození.
   *Postupně vyjádřete *parametr p, *$f'(z)$, *$f(z)$*

   *. $p = -3a$ $\qquad$ *. $f'(z) = 3az^2 - j(-1)^a bz$ $\qquad$ * $f(z) = az^3 + (-1)^{a+1}j\dfrac{b}{2}z^2$

4. Pomocí Cauchy-Riemanovy věty vypočtěte $I = \displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, kde $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{z^2(z^2 + (-1)^a a^2)}$ a Γ je hranice kladně orientované oblasti určené nerovností $|z - (j)^b a| < a\sqrt{3}$.
   Kde a je měsíc dne Vašeho narození a b je počet písmen Vašeho jména.
   *Postupně vyjádřete *singulární body $f(z)$, *dosazení do Cauchy-Riemanovy věty, *výsledek*

   Pro a sudé $\qquad$ *$z_1 = 0, z_{2,3} = \pm ja$

   $$* \begin{cases} \text{pro } b = 2k \ I = 2\pi j \sum\limits_{i=1}^{3} \operatorname*{rez}\limits_{z=z_i} f(z) \\ \text{pro } b = 2k+1 \ I = 2\pi j \left(\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) + \operatorname*{rez}\limits_{z=j^b a} f(z) \right) \end{cases} \qquad . * \begin{cases} I = \dfrac{4j\pi}{a^2} + \dfrac{-2j\pi}{a^3}\sin(2a) \\ I = \dfrac{j2\pi}{a^2}\left(2 + (-1)^k \dfrac{j\mathrm{e}^{(-1)^k j2a}}{a}\right) \end{cases}$$

   Pro a liché $\qquad$. *$z_1 = 0, z_{2,3} = \pm a$

   $$* \begin{cases} \text{pro } b = 2k \ I = 2\pi j \left(\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) + \operatorname*{rez}\limits_{z=j^b a} f(z) \right) \\ \text{pro } b = 2k+1 \ I = 2\pi j \sum\limits_{i=1}^{3} \operatorname*{rez}\limits_{z=z_i} f(z) \end{cases} \qquad * \begin{cases} I = \dfrac{j2\pi}{a^2}\left(2 + (-1)^{k+1} \dfrac{\mathrm{e}^{(-1)^{k+1}2a}}{a}\right) \\ I = \dfrac{-4j\pi}{a^2} + \dfrac{2j\pi}{a^3}\sinh(2a) \end{cases}$$

5. Najděte rozvoj funkce $f(t) = \begin{cases} 2t + a, & \text{pro } -a < t < 0 \\ (-1)^b(2t - a), & \text{pro } 0 < t < a \end{cases}$, do Fourierovy trigonometrické řady.
   Kde a počet písmen Vašeho příjmení a b je den data Vašeho narození
   *Postupně vyjádřete *frekvenci ω, *koeficient a_n, *koeficient b_n, *Forierovu řadu*

pro b sudé

$$* \ \omega = \tfrac{\pi}{a}, \qquad * \ a_n = 0, \qquad * \ b_n = \frac{-2a((-1)^n+1)}{n\pi} = \begin{cases} b_{2k} = \frac{-2a}{k\pi} \\ b_{2k-1} = 0 \end{cases}, \qquad * \ f(t) \approx -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n\pi} \sin \frac{2n\pi t}{a}$$

pro b liché

$$* \ \omega = \tfrac{\pi}{a}, \quad *a_n = \frac{2a(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = \frac{4a}{(2k-1)^2\pi^2} \end{cases}, \quad *b_n = 0, \quad *f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a}{(2k-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2k-1)\pi t}{a}$$

6. Užitím Laplaceovy transformace najděte řešení počáteční úlohy $x'(t) - 2ax(t) + (a^2-b^2)\int\limits_0^t x(s)\mathrm{d}s = 4b^2\mathrm{e}^{(a+b)t}$ spolu s počáteční podmínkou $x(0) = 0$.
   Kde a je ciferný součet dne a b je počet písmen Vašeho příjmení
   *Postupně vyjádřete *obraz rovnice, *obraz řešení, *řešení rovnice*

   $* \ pY - 2aY + \frac{a^2-b^2}{p}Y = \frac{4b^2}{p-a-b}$ $\qquad$ $* \ Y = \frac{4b^2p}{(p-a-b)^2(p-a+b)}$ $\qquad$ $* \ y = (a-b)\mathrm{e}^{(a-b)t} + (2bt(a+b) - a + b)\mathrm{e}^{(a+b)t}$

7. Užitím $\mathcal{Z}$–transformace najděte řešení rovnice $y(n+2) - 2ay(n+1) + (a^2+2((-1)^b-1))y(n) = -4(a+(-1)^b-1)^{n+1}$, $y(0) = 0, y(1) = a + (-1)^b - 1$.

   Kde a počet písmen Vašeho jména b je měsíc data Vašeho narození
   *Postupně vyjádřete *obraz rovnice, *obraz řešení, *řešení rovnice*

   pro b sudé
   $* \ p^2Y - ap - 2apY + a^2Y = \frac{-4ap}{p-a}$ $\qquad$ $* \ Y = \frac{ap(4-p+a)}{(p-a)^3}$ $\qquad$ $* \ y(n) = a^{n-1}n\,(a - 2n + 2)$
   pro b liché
   $* \ p^2Y - (a-2)p - 2apY + (a^2-4)Y = \frac{4p(a-2)}{p-a+2}$ $\qquad$ $* \ Y = \frac{p(a-2)}{(p-a+2)^2}$ $\qquad$ $* \ y(n) = n(a-2)^n$