1 Tutoriál č. 1

1.1 Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které se vyskytují derivace nebo diferenciály neznámé funkce (případně více neznámých funkcí) jedné reálné proměnné. Obyčejné diferenciální rovnice jsou například

$$x^2y' + y = \sqrt{x}$$
$$y''' + 2y' + y = x$$

Řešením diferenciální rovnice na intervalu I rozumíme funkci f takovou, že po dosazení za neznámou funkci, dostaneme identitu.

Snadno výpočtem ověříme, že rovnice $xy' + y = \cos x$ má na libovolném intervalu, který neobsahuje 0 řešení $y = -\frac{\sin x}{x}$. Tato konkrétní funkce je tzv. **partikulární řešení**. **Obecné řešení** této rovnice je $y = \frac{1}{x}(c - \sin x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

1.2 Některé typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

1.2.1 Exaktní rovnice a integrační faktor

Exaktní rovnice souvisí s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných. Nechť má funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak má v Ω **totální diferenciál**, který je roven

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

Definice 1.1 (Exaktní rovnice)**.**
Diferenciální rovnice

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.2}$$

se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**, jestliže výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké funkce f v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci f nazýváme **kmenovou funkcí**.

To že je nějaká rovnice exaktní poznáme, pomocí Schwartzovi věty o záměněně derivování:

Věta 1.2. *Nechť M a N jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité a mají spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti R. Pak výraz*

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce f právě tehdy, když v uvedené oblasti platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{1.3}$$

Potom je řešení této rovnice dáno implicitně rovnicí

$$f(x,y) = C, \tag{1.4}$$

kde C je libovolná konstanta.

Nalezení kmenové funkce f z jejích parciálních derivací je úloha probíraná již v předmětu BMA2, kde bylo ukázáno několik možností jejího nalezení. Hledáme funkci f, pro kterou platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrací M podle x můžeme (tj. y pro tento moment považujeme za konstantu) f najít:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y),$$

kde $g(y)$ je funkce závislá pouze na y, která zde hraje roli integrační konstanty. Tuto můžeme určit z rovnice, že derivace f podle y má být rovna $N(x,y)$. To znamená, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,y).$$

Odtud dostaneme rovnici

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1.5}$$

ze které zatím neznámou funkci g najdeme integrací podle y. Tím je kmenová funkce f nalezena.

Poznámka 1.3. Celý postup hledání f lze provést i v opačném pořadí. Případně můžeme funkci f určit jako jakési množinové sjednocení integrálů

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x \cup \int N(x,y)\,\mathrm{d}y),$$

čímž je míněn součet kde je každá funkce napsaná pouze jednou.

Příklad 1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2(x+1)y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ y^2 + 2x}{\partial y} = 2y = \frac{\partial\ 2(x+1)y}{\partial x}.$$

Existuje proto funkce f, pro niž platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+1)y.$$

Integrací prvního vztahu podle x dostáváme

$$f(x,y) = xy^2 + x^2 + g(y).$$

Funkci $g(y)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + 2x^2 + g(y)) = 2xy + g'(y) = 2(x+1)y \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^2.$$

Kmenová funkce f je tedy $f(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2$ a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $xy^2 + x^2 + y^2 = C$. V tomto případě můžeme řešení vyjádři i v explicitním tvaru

$$y = \pm\sqrt{\frac{C - x^2}{x+1}}.$$

$\square$

Integrační faktor

Uvažujme úpravu exaktní rovnice

$$3x^2y\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y = 0.$$

„Vydělením x^2 se přece zjednoduší!“, což je pravda, ale z exaktní rovnice se stane rovnice, která není exaktní:

$$3y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

Rovnice je skutečně na pohled jednodušší, ale zato přestala být exaktní,neboť platí:

$$M(x,y) = 3y, \quad N(x,y) = x, \quad \text{a tedy} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

tato skutečnost nás vede k otázce zda naopak lze rovnici, která není exaktní, vynásobit vhodnou funkcí tak, že se z ní stane rovnice exaktní. Tuto označíme jako $\mu(x,y)$ a budeme jí říkat **integrační faktor**.

Obecně nalézt takovouto funkci $\mu(x,y)$, pro kterou by rovnice

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

byla exaktní, tj. pro kterou by platilo $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)$ je obtížnější úloha než počáteční, nebo´T je třeba vyřešit parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{1.6}$$

Integrační faktor jako funkce jedné proměnné

Pokud předpokládáme, že funkce μ závisí pouze na jedné proměnné, rovnice (1.6) se zredukuje na řešitelný tvar. Nejprve hledejme funkci závislou pouze na proměnné x, tj. $\mu = \mu(x)$. V tomto případě je $\mu'_y = 0$ a z (1.6) dostaneme

$$\mu(x)\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x)\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \mu'(x)\cdot N = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,.$$

Aby tato rovnost mohla být splněna, musí výraz na pravé straně záviset také pouze na x, tedy

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)\,.$$

Tím se rovnice (1.6) značně zjednodušila na rovnice se separovanými proměnnými:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \alpha(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \alpha(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = \int \alpha(x)\,\mathrm{d}x + c \quad \Rightarrow \quad \mu = c \cdot \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Protože nám jde o nalezení jedné konkrétní funkce μ, nikoli všech možných, můžeme konstantu c zvolit, např. $c = 1$. Tím máme

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Podobně by se postupovalo při hledání integračního faktoru μ jehož argument by mohla funkce proměnných x, y (např. $x + y$, xy). V následující větě je popsána situace pro integrační faktor jako závislé pouze na proměnné x nebo y.

Věta 1.4. *Nechť je dána rovnice*

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Je-li $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)$, *resp.* $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \beta(y)$, *pak vynásobením rovnice* (1.4) *integračním faktorem* $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}$, *resp.* $\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \beta(y)\,\mathrm{d}y}$, *dostaneme rovnici exaktní.*

Příklad 2. Najděte obecné řešení rovnice

$$(2x^2 + y^2 + 3)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení. Máme $M(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3, \quad N(x,y) = xy.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice není exaktní.}$$

Zkusíme, jestli se nám podaří najít integrační faktor μ jako funkci pouze proměnné x:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}.$$

Toto je funkce proměnné x a v tomto případě je $\alpha(x) = 1/x$ tedy

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

Zadanou rovnici nalezeným integračním faktorem vynásobíme:

$$(2x^3 + xy^2 + 3x)\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y = 0$$

Najdeme kmenovou funkci f.

$$f(x,y) = \int x^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{x^2y^2}{2} + h(x).$$

Funkci $h(x)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y^2}{2} + h'(x) = xy^2 + h'(x) = 2x^3 + xy^2 + 3x \Rightarrow h'(x) = 2x^3 + 3x \Rightarrow h(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{2}.$$

Kmenová funkce je tedy

$$f(x, y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + 3x^2}{2}$$

a obecné řešení dané rovnice je zadáno implicitně rovnicí

$$\underline{\underline{x^4 + x^2y^2 + 3x^2 = c}}.$$

□

Dále se seznámíme s některými vybranými typy diferenciálních rovnic, jmenovitě s rovnicí Bernoulliovou, Riccatiovou a Clairoutovou, a předvedeme řešení diferenciálních rovnic pomocí Picardovy metody postupných aproximací.

1.2.2 Bernoulliova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{1.7}$$

kde $n \in \mathbb{R}$, se nazývá **Bernoulliova rovnice**. Tuto rovnici můžeme chápat jako zobecnění lineární diferenciální rovnici ($n = 0$). Za pozornost stojí fakt, že pro $n > 0$ má rovnice vždy tzv. triviální řešení $y = 0$. Rovnici (1.7) můžeme řešit různými metodami. Lze např. použít substituci za y^{1-n}, kdy danou rovnici transformujeme na rovnici lineární. Ukážeme i jiný způsob, který kopíruje postup řešení lineární rovnice.

- Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici

$$y' = a(x)y. \tag{1.8}$$

Obecné řešení této rovnice vyjde ve tvaru $y = C \cdot y_0(x)$.

- Řešení původní rovnice (1.7) pak budeme hledat ve tvaru

$$y = C(x) \cdot y_0(x).$$

Toto je modifikace metody variace konstant, používané při řešení lineárních diferenciálních rovnic. Opravdu se podaří najít funkci $C(x)$, pro kterou je $y = C(x) \cdot y_0(x)$ řešením zadané rovnice. Dosadíme předpokládané řešení do rovnice (1.7):

$$C'(x) \cdot y_0(x) + C(x) \cdot y_0'(x) = a(x) \cdot C(x) \cdot y_0(x) + b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^n(x). \tag{1.9}$$

Protože $y_0(x)$ je řešením rovnice (1.8), a tedy platí $y_0'(x) = a(x) \cdot y_0(x)$. Druhý člen na levé straně rovnice (1.9) je proto roven prvnímu členu na pravé straně a z rovnice nakonec zbude

$$C'(x) = b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^{n-1}(x),$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$.

Příklad 3. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = -\frac{y}{x} + x^3 y^4$$

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = -\dfrac{y}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{c}{|x|} \quad \Rightarrow \quad y = C\cdot\frac{1}{x}\,.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = C(x)\cdot\dfrac{1}{x}$:

$$C'\cdot\frac{1}{x} + C\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{C\cdot\frac{1}{x}}{x} + x^3\cdot C^4\frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad C' = C^4.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = C^4 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}C}{C^4} = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3C^3} = x + k \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(x+k)}}\,.$$

Obecné řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{x\sqrt[3]{3(x+k)}}\,.$$

Navíc má rovnice ještě singulární řešení $y = 0$, které nelze dosáhnou volbou konstanty k. $\square$

Poznámka 1.5. U exaktních diferenciálních rovnic byly obě proměnné x a y ve stejné pozici. Inspirováni touto myšlenkou je možné v některých případech pouhou záměnou závislosti proměnných, tj. místo funkce $y(x)$ hledat funkci $x(y)$ rovnici převést na známý typ. Například rovnice

$$(2x^2 y \ln y - x)y' = y$$

přejde při této záměně, jejíž součástí je i záměna

$$y' = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}} = \frac{1}{x'},$$

v rovnici

$$(2x^2 y \ln y - x) = yx',$$

která je rovnicí Bernoulli. Obecné řešení rovnice homogenní má tvar

$$x = \frac{C}{y}.$$

Aplikací metody variace konstanty dostáváme

$$2\frac{C^2}{y^2} y \ln y = y\left(\frac{C'}{y} - \frac{C}{y^2}\right) \Leftrightarrow \int 2\frac{\ln y}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} \Leftrightarrow \ln^2 y + K = -\frac{1}{C}.$$

Celkově je možné získat řešení dané diferenciální rovnice v implicitním tvaru

$$xy(K - \ln y^2) = 1.$$

1.2.3 Riccatiova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1.10}$$

se nazývá **Riccatiova rovnice**.

Ze znalosti jedno řešení rovnice (1.10) (např. podaří-li se nám je nějak uhodnout) a použitím substituce

$$y = y_1 + u,$$

dostaneme pro novou proměnnou u rovnici

$$u' = (Q(x) + 2R(x)y_1)u + R(x)u^2. \tag{1.11}$$

což je pro neznámou funkci u Bernoulliova rovnice kde $n = 2$.

Příklad 4. Najděte obecné řešení rovnice

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0,$$

jestliže řešením této rovnice je funkce $y_1 = 1/x$.

Řešení. Zavedeme substituci

$$y = \frac{1}{x} + u,$$

po které získáme Bernoulliovu rovnici ve tvaru:

$$3\left(-\frac{1}{x^2} + u'\right) + \left(\frac{1}{x} + u\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 3u' + \frac{2}{x}u + u^2 = 0,$$

Vzniklou Bernoulliovu rovnici řešíme tak, že nejdříve určíme obecné řešení lineární homogenní rovnice $3u' = -\dfrac{2}{3x}\,u$:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int -\frac{2}{3x}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\frac{2}{3}\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{C}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice budeme hledat metodou variace konstanty $u = \dfrac{C(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$. Zderivováním a dosazením do rovnice dostaneme

$$3\left(\frac{C'}{\sqrt[3]{x^2}} + C\frac{-2/3}{\sqrt[3]{x^5}}\right) + \frac{2}{x}\frac{C}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{C^2}{\sqrt[3]{x^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C} = -\sqrt[3]{x} + K.$$

C máme ve tvaru $C = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + K}$ a dosazením do předpokládaného tvaru řešení získáme řešení Bernoulliho rovnice:

$$u = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+K}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Dalším řešení Bernoulliovy rovnice je singulární řešení $u = 0$.

Dosazením do transformačního vztahu nalezneme obecné řešení Riccatiho rovnice.

$$y = \frac{1}{x} + u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Můžete si všimnout, že ze zadání známé řešení $y_1 = 1/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K. Toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$. $\square$

1.2.4 Clairautova rovnice

Dosud probírané rovnice bylo možné převést na tzv, explicitní tvar $y' = f(x, y)$. Clairautova rovnice je příkladem diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem derivaci y' a to konkrétně je to rovnice:

$$y = xy' + f(y'). \tag{1.12}$$

Řešení Clairautovy rovnice je známo a jsou to řešení dvou typů

1. řešeními Clairautovy rovnice jsou všechny přímky tvaru:

$$y = cx + f(c), \tag{1.13}$$

   kde c je libovolná konstanta.

2. Rovnice (1.12) může mít ještě další řešení, které je vyjádřené parametricky:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{1.14}$$

   Toto řešení je singulární, protože jestliže $f''(t) \neq 0$, proto řešení (1.14) nedostaneme z řešení (1.13) pro žádnou volbu konstanty c. Naopak každá přímka (1.14) má s tímto řešení společný jeden bod, který je proto singulární.

Příklad 5. Najděte řešení rovnice

$$y = xy' - \ln y' .$$

Řešení. V tomto příkladu je $f(y') = \ln y'$ proto je řešením každá přímka:

$$\underline{\underline{y = cx - \ln c}}, \quad c > 0.$$

Parametricky dané řešení (1.14) určíme ze vztahů $f(t) = -\ln t$, je $f'(t) = -1/t$,tedy další řešení zadané rovnice je

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = -\ln t - t \cdot \frac{-1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \ln x + 1.$$

□

Shrnutí

V tomto tutoriálu jsme nejprve připomněli, jak vypadá diferenciální rovnice, co je jejím řešením, jak může řešení vypadat a jaký je rozdíl mezi obecným a partikulárním řešením dané diferenciální rovnice. Dále jsme se věnovali tzv. exaktním rovnicím. Uvedli jsme podmínku exaktnosti a několik možností jak rovnici vyřešit. Nakonec jsme se zabývali problémem, jak rovnici, která původně exaktní není, na exaktní rovnici převést. V jednoduchých případech je možno tuto úpravu provést pomocí tzv. integračního faktoru.

Dále jsme řešili tři typy význačných diferenciálních rovnic: Bernoulliovu, Riccatiovu a Clairotovu. Nejdůležitější poznatky jsou:

1. Bernoulliho rovnice se řeší podobně jako rovnice lineární. Nejprve najdeme obecné řešení odpovídající homogenní rovnice a pomocí něj pak i řešení samotné Bernoulliho rovnice.

2. Známe-li jedno partikulární řešení y_1 Riccatiho rovnice, můžeme tuto rovnici pomocí substituce $y = y_1 + u$ převést na Bernoulliho rovnici.

3. Clairautova rovnice se svým tvarem odlišuje od všech zatím probraných typů rovnic. Její řešení však najdeme snadno. Jsou to všechny přímky tvaru $y = cx + f(c)$. Navíc existuje ještě řešení, které lze vyjádřit parametricky pomocí vztahů (1.14).

2 Tutoriál č. 2 Systémy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

Opakování lineární algebry a lineárních diferenciálních rovnic n=tého řádu
Základní pojmy a struktura řešení systému LDR
Vztah mezi lineární rovnicí n-tého řádu a systémem n rovnic prvního řádu
Řešení pomocí vlastních vektorů

2.1 Opakování

Maticí A typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schema objektů pro něž je definováno sčítání a násobení (čísla, funkce,...)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součet dvou matic stejného typu je matice téhož typu, jejíž prvky jsou součty odpovídajících prvků sčítaných matic: **Násobek** matice **konstantou** získáme tak, že každý prvek matice touto konstantou vynásobíme. **Součin** matic **A** a **B** získáme o něco složitějším způsobem. Prvek, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci výsledné matice, dostaneme jako součet součinů odpovídajících prvků i-tého řádku matice **A** s j-tým sloupcem matice **B**.

Příklad 6.

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - y \\ 4x + 2z \\ -3x + y + 5z \end{pmatrix}.$$

Lineární vektory jsou závislé, jestliže existuje jejich nulová lineární kombinace s alespoň jedním nenulovým koeficientem. V opačném případě jsou **vektory jsou nezávislé**

Příklad 7. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ lineárně závislé nebo nezávislé.

a) $\mathbf{u} = (3, 2, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 2), \mathbf{w} = (13, 12, 11)$

b) $\mathbf{u} = (1, 2, 3), \mathbf{v} = (0, 1, 1), \mathbf{w} = (-1, 0, 3)$

Řešení. a) Pozorný student „vidí“ $\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3, 2, 1) + 5(2, 2, 2) - (13, 12, 11) = (0, 0, 0)$.

b)V tomto případě můžeme ze souřadnic vektorů vytvořit čtvercovou matici a je-li její determinant nenulový jsou vektory nezávislé:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 3 = 4 \neq 0.$$

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou tedy lineárně nezávislé. □

2.1.1 Opakování o lineární rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty

Pro lineární diferenciální rovnici homogenní n-tého řádu $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, určíme řešení pomocí kořenů charakteristické rovnice, kterou odvodíme dosazením řešení ve tvaru $y = e^{\lambda t}$, kde λ je reálné nebo komplexní číslo. Potom λ vyhovuje **charakteristické rovnici**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{2.1}$$

V následující větě si připomeneme, jakým způsobem se konstruuje obecné řešení původní rovnice pro všechny možné případy kořenů charakteristické rovnice (2.1).

Věta 2.1.
a) *Každému k-násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice* (2.1) *odpovídá k partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru*
$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t},\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

b) *Každé dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ charakteristické rovnice* (2.1) *odpovídá $2s$ partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru tvaru*

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & \dots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t; \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & \dots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array}$$

c) *Součet násobností všech kořenů je roven stupni charakteristické rovnice n; proto je počet všech výše uvedených partikulárních řešení n.* **Obecné řešení** *původní diferenciální rovnice je lineární kombinací těchto partikulárních řešení s* **libovolnými** *koeficienty.*

Příklad 8. Řešme diferenciální rovnici $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y''' + 2y'' + 6y' - 4y = 0$.

Řešení. Určíme kořeny charakteristické rovnice:

$$\lambda^5 - 2\,\lambda^4 - \lambda^3 + 6\,\lambda - 4 = 0,$$

kterými jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1,\ \lambda_{3,4} = -1 \pm i$. Obecné řešení diferenciální rovnice je

$$y = c_1 \mathrm{e}^{2t} + (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}(c_4 \cos t + c_5 \sin t),$$

kde c_1, c_2, …, c_5 jsou libovolné konstanty. □

K určení partikulárního řešení nehomogenní rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{2.2}$$

můžeme opět využít *metodu variace konstant*. Tento postup je poměrně technicky náročný. Celý postup lze ovšem popsat pomocí jediného vzorce, využijeme-li váhovou funkci $\Phi(t,s)$, která je pro rovnici s jednotkovým koeficientem u nejvyšší derivace definována jako řešení homogenní rovnice (2.2) splňující počáteční podmínky $y(s) = y'(s) = \cdots = y^{(n-2)}(s) = 0, \quad y^{(n-1)}(s) = 1$. Potom lze ukázat, že partikulární řešení $Y(t)$ počáteční úlohy (2.2), splňující počáteční podmínku $y(t_0) = 0$ je následujícího tvaru

$$Y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\Phi(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

V praxi se často používá tzv. metoda neurčitých koeficientů. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro funkce $f(x)$, je ve **speciálním tvaru**. Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice. Porovnáním obou stran rovnice tyto koeficienty dopočítáme.

K pravé straně, kdy funkce f je ve tvaru

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

kde a, b jsou reálná čísla a P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m, má partikulární řešení Y rovnice (2.2) tvar:

$$Y = e^{ax}x^k(R_{\max\{m,n\}}(x)\cos bx + S_{\max\{m,n\}}(x)\sin bx),$$

kde číslo $a + bj$ je k-násobný kořen charakteristické rovnice a $R_{\max\{m,n\}}$ a $S_{\max\{m,n\}}$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{m, n\}$.

Příklad 9. Nalezněte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = \sin 2t.$$

Řešení. Partikulární řešení nalezneme všemi uvedenými metodami, protože se jedná o rovnici se speciální pravou stranou.

1. Vyřešíme lineární systém s derivacemi neznámých funkcí, který získáme dosazením $Y(t) = c_1(t)\cos t +$ $+ c_2(t)\sin t$ do dané rovnice a první rovnice je volenou podmínkou:

$$\left.\begin{array}{rl} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t & = 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t & = \sin 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1' = -\sin t\ \sin 2t \\ c_2' = \cos t\ \sin 2t \end{array}$$

Následně určíme integrací funkce $c_1(t)$ a $c_2(t)$:

$$c_1(t) = \int -2\sin^2 t \cos t \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \sin t = u \\ \cos t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int -2u^2 \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}u^3 = -\frac{2}{3}\sin^3 t,$$

$$c_2(t) = \int 2\sin t \cos^2 t \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \cos t = u \\ -\sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int -2u^2 \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}u^3 = -\frac{2}{3}\cos^3 t.$$

Dosazením vypočtených funkcí získáme partikulární řešení:

$$Y(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t \cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t \sin t = -\frac{\sin 2t}{3}.$$

2. Nejprve určíme váhovou funkci $\Phi(t,s)$. Tou je homogenní řešení $y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ splňující počáteční podmínky $y_h(s) = 0$, $y_h'(s) = 1$. Z nich určíme konstanty c_1, c_2:

$$\left. \begin{array}{rl} c_1 \cos s + c_2 \sin s & = 0, \\ -c_1 \sin s + c_2 \cos s & = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} c_1 = -\sin t \\ c_2 = \cos t. \end{array}$$

Dostáváme váhovou funkci $\Phi(t,s) = \Phi(t-s) = -\sin s \cos t + \cos s \sin t = \sin(t-s)$ a integrací (za t_0 volíme $t_0 = 0$) získáme partikulární řešení:

$$Y(t) = \int_0^t \sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s = [\sin 2s \cos(t-s)]_0^t - \int_0^t 2\cos 2s \cos(t-s)\mathrm{d}s =$$

$$\sin 2t + [2\cos 2s \sin(t-s)]_0^t + \int_0^t 4 \sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s \Rightarrow$$

$$-3\int_0^t \sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s = \sin 2t - 2\sin(t)] \Rightarrow Y(t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{\sin 2t}{3}.$$

3. Předpovíme tvar partikulárního řešení$Y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ vypočteme derivace:

$$Y'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \qquad Y''(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t.$$

   Tyto derivace dosadíme do původní rovnice:

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = -3A\cos 2t - 3B\sin 2t = \sin 2t.$$

   a porovnáním koeficientů u stejných výrazů určíme neznámé konstanty $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{3}$:

   Partikulární řešení je $Y(t) = -\dfrac{\sin 2t}{3}$

□

I na uvedeném příkladě je patrné, že různé použité metody hledání partikulárního řešení mohou dávat různé tvary tohoto řešení, neboť toto není určeno jednoznačně.

2.2 Základní pojmy

Budeme se zabývat řešením soustavy n obyčejných diferenciálních rovnice prvního řádu tvaru

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}(t)x_n & + & f_1(t) \\
x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}(t)x_n & + & f_2(t) \\
 & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}(t)x_n & + & f_n(t).
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Tuto soustavu můžeme přepsat jako

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}
$$

neboli zkráceně

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{2.5}$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Příklad 10. Následující zápisy soustavy diferenciálních rovnic jsou ekvivalentní

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 5x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' &= 2x_1 - 3x_2 + \mathrm{e}^{2t} \end{aligned} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

Definice 2.2. Sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1(t),\ x_2(t),\ \dots\ x_n(t))^T$ je **řešením** systému diferenciálních rovnic (2.4) na intervalu I, jestliže všechny jeho složky jsou na I diferencovatelné a rovnice (2.4) jsou splněny pro každé $t \in I$.

Příklad 11. Ověřte, že vektory $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{7t} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{7t} \end{pmatrix}$ jsou na intervalu $(-\infty, \infty)$ řešeními soustavy

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Řešení. Výpočet provedeme pouze pro $\mathbf{x}_1$. Dosadíme vektor $\mathbf{x}_1$ do zadané soustavy rovnic za $\mathbf{x}$ a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:

$$L = \mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^{-t})' \\ (-\mathrm{e}^{-t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} + 3(-\mathrm{e}^{-t}) \\ 5\mathrm{e}^{-t} + 4(-\mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = L.$$

□

Stejně jako u jediné diferenciální rovnice, i u systémů diferenciálních rovnic často řešíme tzv. **počáteční úlohu**, která spočívá v tom, že hledáme řešení zadaného systému, které vyhovuje určité počáteční podmínce:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.6}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je nějaký bod (často, ale nikoli vždy, to bývá 0) a $\mathbf{x}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$.

Věta 2.3 (O existenci a jednoznačnosti řešení)**.**
Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{A}(t)$ a vektoru $\mathbf{f}(t)$ funkce spojité na intervalu I, který obsahuje bod t_0, pak existuje jediné řešení počátečního problému (2.6) *na intervalu I.*

2.2.1 Struktura řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Budeme předpokládat, že prvky matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{f}$ v soustavě (2.5) jsou spojité funkce na nějakém intervalu I.

Nejprve se zaměříme na **homogenní systémy**. To jsou systémy, kde $\mathbf{f}(t) = \mathbf{o}$, tj. ze soustavy (2.5) zbude pouze

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{2.7}$$

Věta 2.4 (Princip superpozice)**.** *Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, jsou řešení systémů*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_i,$$

pro $i = 1, \ldots, k$. Potom je libovolná lineární kombinace

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k.$$

Přímým důsledkem je následující věta, která jinými slovy ukazuje, že množina všech řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

Věta 2.5.
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *jsou řešení homogenního systému* (2.7) *na intervalu* I. *Pak je také libovolná lineární kombinace*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I.

Věta 2.6 (Kritérium pro lineární nezávislost řešení)**.**
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *jsou řešení homogenního systému* (2.7) *na intervalu* I,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá, právě když je Wronskián

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.8}$$

pro každé $t \in I$.

Dá se ukázat, že pro libovolné $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektory řešení soustavy (2.7) je Wronskián stále nulový nebo stále nenulový. Stačí tedy, že je Wronskián nenulový v jediném bodě $t_0 \in I$,z čehož plyne, že je nenulový na celém intervalu I.

Příklad 12. Ověříme, že vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix},$$

které jsou řešeními systému $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, jsou lineárně nezávislé. Stačí vypočíst Wronskián (v prvním kroku jsme od 3. řádku odečetli 2 a přičetli 1. řádek):

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ \mathrm{e}^t & 2\sin(t) & 2\cos(t) \\ \mathrm{e}^t & \sin(t) + \cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ \mathrm{e}^t & 2\sin(t) & 2\cos(t) \\ 0 & -2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} = 2\mathrm{e}^t \begin{vmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ -2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} =$$

$$2e^t(\sin^2(t) - 3\sin t\cos t + \cos^2 t + 3\sin t\cos t) = 2e^t \neq 0.$$

Wronskián je nenulový pro všechna reálná t, a proto jsou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineárně nezávislé.

Definice 2.7 (Fundamentální množina řešení)**.**
Jakákoli n-tice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislých řešení homogenního systému (2.7) na intervalu I se nazývá **fundamentální množina řešení** na tomto intervalu.

Věta 2.8. *Fundamentální množina řešení homogenního systému* (2.7) *na intervalu I vždy existuje.*

Definice 2.9 (Obecné řešení homogenního systému)**.**
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je fundamentální množina řešení homogenního systému (2.7) na nějakém intervalu I. Obecné řešení systému na tomto intervalu se definuje jako

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n, \tag{2.9}$$

kde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou libovolné konstanty.

Dá se ukázat, že každé řešení systému (2.7) lze zapsat ve tvaru (2.9), tj. ke každému řešení $\mathbf{x}$ najdeme konstanty $c_1, \ldots, c_n$ tak, aby platilo (2.9).

Trojice řešení z předchozího příkladu je fundamentální množina řešení a obecné řešení může mít tvar:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix},$$

Věta 2.10. *Nechť* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *jsou řešení homogenního systému* (2.7) *na intervalu* I *a nechť* $\mathbf{x}_p$ *je libovolné řešení nehomogenního systému* (2.5) *na tomtéž intervalu. Pak*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_p,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *jsou libovolné konstanty, je také řešením nehomogenního systému* (2.5) *na intervalu* I.

Definice 2.11 (Obecné řešení nehomogenního systému)**.**
Nechť $\mathbf{x}_p$ je jedno dané řešení nehomogenního systému (2.5) na nějakém intervalu I a nechť

$$\mathbf{x}_c = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

je obecné řešení odpovídajícího homogenního systému (2.7) na tomtéž intervalu. **Obecné řešení** nehomogenního systému na intervalu I se definuje jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p. \tag{2.10}$$

Obecné řešení $\mathbf{x}$ nehomogenního systému (2.5) je tedy rovno součtu obecného řešení $\mathbf{x}_c$ přidruženého homogenního systému (2.7) a některého partikulárního řešení $\mathbf{x}_p$ nehomogenního systému (2.5).

Definice 2.12 (Fundamentální matice)**.**
Nechť

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

je fundamentální množina řešení homogenního systému (2.7) na intervalu I. Matice

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **fundamentální matice** systému na tomto intervalu.

Pro fundamentální matici platí:

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t). \tag{2.11}$$

2.3 Vztah mezi lineární rovnice n-tého řádu a systém n lineárních diferenciálních rovnic

Ukážeme si, jak lze libovolnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu převést na lineární systém. Tato možnost převedení je velice významná, neboť umožňuje použít veškerou vyloženou teorii taktéž k rovnicím n-tého řádu.

Uvažujme lineární obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \tag{2.12}$$

kde koeficienty $a_{n-1}(t), \ldots, a_1(t), a_0(t)$ a nehomogénní člen $b^*(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Budeme rovnici (2.12) transformovat na systém rovnic. Nechť jsou $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nové závislé funkce, definované jako

$$y_1 = u,\ y_2 = u',\ y_3 = u'', \ldots, y_n = u^{(n-1)}.$$

Tímto předpisem byl definován vektor $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Pak je lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu (2.12) ekvivalentní systému

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \tag{2.13}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

a

$$b(t) = (0, 0, \ldots, 0, b^*(t))^T.$$

Podobně se ukáže, že počáteční problém

$$\begin{aligned} &u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \\ &u(t_0) = u_1,\ u'(t_0) = u_2, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_n \end{aligned} \tag{2.14}$$

je ekvivalentní počáteční úloze

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{2.15}$$

kde

$$y_0 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T.$$

Naopak lze pro každou složku řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic nalézt diferenciální rovnici nejvýše n-tého řádu takovou, že je tato složka obecným řešením nalezené diferenciální rovnice. Postup lze popsat slovy:

- Vybereme si rovnici na jejíž levé straně je první derivace hledané složky řešení a tuto derivujeme. Do pravé strany derivované rovnice dosadíme pravé strany odpovídajících derivací v původním systému. Získáme tak rovnici na jejíž levé straně stojí druhá derivace hledané složky řešení a na pravé straně lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Tento postup ještě $n-1$ krát opakujeme a získáme tak systém rovnic na jejichž jedné straně stojí pouze derivace vybrané složky řešení a na druhé lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Takto získaný systém, který je vzhledem nederivovaným složkám řešení systémem lineárních (algebraických) rovnic vyřešíme a toto řešení má pro zvolenou složku řešení tvar hledané lineární diferenciální rovnice nejvýše n řádu.

Tato skutečnost ukazuje na ekvivalenci řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a řešení diferenciální rovnice nejvýše n-tého řádu. Tento postup nazýváme eliminační metodou řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Obvykle postupujeme tak, že z jedné rovnice určíme jednu neznámou jako funkci ostatních neznámých a dosadíme ji do zbývajících rovnic. Obdržíme tak systém $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých. V tomto sytému jsou ovšem i derivace vyšších řádů. Postup dále opakujeme. Uvedený postup je možné s výhodou použít na systém dvou lineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých.

Příklad 13. Nalezněte obecné řešení nehomogenního systému

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + 1 - 2t + e^t \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 3x_2(t) - 4t + e^t. \end{aligned}$$

Řešení: Z první rovnice určíme funkci $x_2(t)$

$$x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 1 - 2t + e^t \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t \tag{2.16}$$

a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$-x_1''(t) + 2x_1'(t) - 2 + e^t = 4x_1(t) - 3(-x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^{-t}) - 4t + e^t$$

$$x_1''(t) + x_1'(t) - 2x_1(t) = 1 - 2t + 3e^t.$$

Nejdříve stanovíme obecné řešení rovnice homogenní pomocí charakteristické rovnice:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

a obecné řešení homogenní rovnice je $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t}$. Partikulární řešení pomocí principu superpozice předpovíme ve tvaru:

$$X_1(t) = A + Bt + Cte^t \Rightarrow X_1'(t) = B + Ce^t(t+1) \Rightarrow X_1''(t) = Ce^t(t+2).$$

Dosadíme do rovnice a z rovnosti určíme zatím neznámé konstanty:

$$\begin{aligned} Ce^t(t+2) + B + Ce^t(t+1) - 2+ &= 1 - 2t - 3e^t \\ B - 2A - 2Bt + 3Ce^t &= 1 - 2t + 3e^t. \end{aligned}$$

Konstanty $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ dosadíme do předpovězeného tvaru partikulárního řešení a dostáváme obecné řešení:

$$x_1(t) = C_1e^t + c_2e^{-2t} + t(e^t + 1).$$

Toto řešení dosadíme do (14) a získáme i druhou složku řešení původního systému:

$$x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t =$$

$$-\left(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} + e^t(t+1) + 1\right) + 2(C_1e^t + C_2e^{-2t} + t(e^t+1)) + 1 - 2t + e^t = C_1e^t + 4C_2e^{-2t} + te^t.$$

Obě složky tvoří řešení systému a můžeme je zapsat pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} t(e^t+1) \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Příklad 14. Nalezněte obecné řešení homogenního systému

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{aligned}.$$

Řešení: Z první rovnice určíme funkci $x_3(t)$

$$x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = x_1'(t) - x_1(t) + x_2(t)$$

a dosadíme ji do druhé a třetí rovnice:

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= x_1'(t) - 2x_1(t) \\ x_1''(t) - x_1'(t) + x_2'(t) &= x_1'(t) + 2x_2(t) \end{aligned}.$$

Odečtením první rovnice ke druhé získáme vyjádření proměnné $x_2(t)$:

$$x_1''(t) - x_1'(t) - 2x_1(t) = 2x_2(t).$$

Dosazením tohoto vyjádření do rovnice dostáváme rovnici pouze pro proměnnou $x_1(t)$

$$x_1''' - x_1'' - 2x_1' = 2(x_1' - 2x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1''' - x_1'' - 4x_1' + 4x_1 = 0. \tag{2.17}$$

S využitím kořenů charakteristické rovnice:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

dostáváme obecné řešení rovnice pro proměnnou $x_1(t)$

$$x_1(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{2t} + C_3 \mathrm{e}^{-2t}.$$

Všechny složky tvoří řešení systému a můžeme je zapsat pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.$$

Poznámka 2.13. Uvedený postup snižuje počet operací ve srovnání s robustním postupem, kdybychom derivovali postupně derivovali dvakrát první rovnici a za derivace na pravé straně bychom dosazovali pravé strany původních rovnic. Po té bychom rovnici 2.17 získali jako řešení systému lineárních rovnic, ketré by měly na pravé straně derivace proměnné $x_1(t)$.

2.4 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty - řešení pomocí vlastních vektorů

V předchozím jsme ukázali, že pro jednu složku řešení systému lineárních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty je možné nalézt lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s kontaktními koeficienty takovou, že řešení této rovnice je složkou řešení původního systému. V případě systému s málo proměnnými (2-3) je možné tzv. eliminační metodou bez větších problémů nalézt řešení. Pro rozsáhlejší systémy uvedeme postup, pomocí kterého lze řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty pomocí konstrukce tzv. vlastních vektorů. Metoda umožňuje nalézt n-tici lineárně nezávislých řešení soustavy. Lineární kombinace těchto řešení dá obecné řešení soustavy. Při použití metody budeme pracovat s charakteristickou rovnicí a s jejími kořeny. Cílem je sestavit obecné řešení v závislosti na tom, jaké tyto kořeny jsou (reálné, komplexní, násobné).

2.4.1 Idea řešení

Zabývejme se soustavou lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty ve tvaru

$$x' = Ax, \tag{2.18}$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektorem hledaného řešení s nezávisle proměnnou t, tj. $x = x(t)$. Předpokládejme, že řešení soustavy (2.18) má tvar

$$x = v\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{2.19}$$

kde λ je vhodné číslo a v je vhodný konstantní vektor. Uvažujme pouze tzv. netriviální řešení $x(t) \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$. Po dosazení tvaru (2.19) do soustavy (2.18) dostáváme

$$\lambda v\mathrm{e}^{\lambda t} = Av\mathrm{e}^{\lambda t}$$

což lze postupnými úpravami převést na rovnici s jedním výrazem $\mathrm{e}^{\lambda t}$:

$$(Av)\mathrm{e}^{\lambda t} - (\lambda v)\mathrm{e}^{\lambda t} = (A - \lambda E)v\mathrm{e}^{\lambda t} = o \tag{2.20}$$

Kde E je čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je nulový vektor. Ve vektorovém vztahu (2.20) lze krátit výrazem $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Dostáváme vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \tag{2.21}$$

Tento vztah (2.21) nezávisí na proměnné t a je vztahem mezi konstantní maticí A, neznámým (konstantním) vektorem v a hledaným číslem λ. Soustava (2.21) je lineární algebraickou soustavou rovnic vzhledem ke složkám vektoru v. Aby soustava (2.21) měla nenulové řešení v, musí být její matice singulární, tedy platí

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{2.22}$$

Rovnice (2.22) má na levé straně polynom proměnné λ a je stupně n. Takto definovaný polynom

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) \tag{2.23}$$

nazýváme **charakteristickým polynomem** a samotnou rovnici (2.22) nazýváme **charakteristickou rovnicí**. Kořeny **charakteristické rovnice** nazýváme **vlastní čísla** matice A. Je-li $\lambda = \widetilde{\lambda}$ vlastním číslem matice A a vektor $v = \widetilde{v}$ je řešením soustavy (2.21), tj. soustavy

$$(A - \widetilde{\lambda}E)\widetilde{v} = o,$$

nazýváme vektor $\widetilde{v}$ **vlastním vektorem** matice A (který přísluší vlastnímu číslu $\widetilde{\lambda}$). Pro každou dvojici vlastního čísla a odpovídajícího vlastního vektoru $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{v}$ je vektorová funkce

$$x = \widetilde{v}\exp(\widetilde{\lambda}t)$$

jedním z řešení soustavy (2.18). Ze základní věty algebry plyne, že takovýchto vlastních čísel je n, což odpovídá počtu hledaných lineárně nezávislých řešení, potřebných pro fundamentální řešení.

2.4.2 Případ reálných nenásobných kořenů charakteristické rovnice

V případě, že má charakteristická rovnice (2.22) n navzájem různých vlastních čísel, která jsou reálná

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \tag{2.24}$$

a vektory

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \tag{2.25}$$

jsou jim odpovídající vlastní vektory, je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (2.18) jednoduchá. Snadno lze prověřit, že tato soustava vlastních vektorů je lineárně nezávislá. Pak z obecné teorie lineárních soustav okamžitě vyplývá tento výsledek:

Věta 2.14 (případ nenásobných vlastních čísel)**.** *Má-li matice A celkem n navzájem různých vlastních čísel (2.24), kterým odpovídají vlastní vektory (2.25), potom n vektorových funkcí*

$$v_1 \exp(\lambda_1 t), v_2 \exp(\lambda_2 t), \ldots, v_n \exp(\lambda_n t) \tag{2.26}$$

tvoří **fundamentální systém řešení** *soustavy rovnic (2.18). Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru:*

$$x(t) = C_1 v_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 v_2 \exp(\lambda_2 t) + \cdots + C_n v_n \exp(\lambda_n t), \tag{2.27}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

Příklad 15. Metodou popsanou výše určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 2x_2, \\ x_2' &= -3x_1 + 3x_2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Řešení. Soustava (2.28) je speciálním případem soustavy (2.18) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Tato jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 5$. Můžeme tedy Větu 2.14. Hledáme proto vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. Prvním vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Oba řádky jsou lineárně závislé a pro souřadnice vlastního vektoru platí

$$v_{11} - v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (1,1)^T$. Řešení soustavy (2.28) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (1,1)^T.$$

Podobně u druhého vlastního čísla $\lambda_2 = 5$ pro vlastní vektor $v_21 = (v_{21}, v_{22})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$ platí:

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Tato soustava se redukuje na závislost

$$-3v_{21} - 2v_{22} = 0$$

a jedno její nenulové řešení je například

$$x_2(t) = (2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (2.28) je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$(1,1)^T \quad \text{a} \quad (2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(1,1)^T + C_2(2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{5t}$$

□

2.4.3 Případ komplexních nenásobných vlastních čísel

Nechť má charakteristická rovnice (2.22) komplexní kořen

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot i,$$

kde i je komplexní jednotka. Potom je kořenem charakteristické rovnice i číslo komplexně sdružené s kořenem λ:

$$\overline{\lambda} = \alpha - \beta \cdot i.$$

Analogicky vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ v je komplexně sdružený s vektorem odpovídajícímu komplexně sdruženému s původním vlastním číslem tedy platí

$$(A - \lambda E)v = o \Leftrightarrow (A - \overline{\lambda} E)\overline{v} = o. \tag{2.29}$$

To tedy znamená, že je-li vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (2.18), pak je také vektor

$$\overline{x}(t) = \overline{v} \exp(\overline{\lambda} t)$$

řešením této soustavy. místo této dvojice komplexně sdružených funkcí budeme v reálném oboru pracovat s jejich lineárními kombinacemi, které budou reálné

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}\left(x(t)+\overline{x}(t)\right), \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}\left(x(t)-\overline{x}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Tato dvě reálná řešení $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$ jsou **lineárně nezávislá**.

Věta 2.15 (komplexní nenásobná vlastní čísla)**.** *Je-li komplexní číslo $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ vlastním číslem matice A a je-li v odpovídající vlastní vektor, pak má soustava (2.21) dvě lineárně nezávislá a reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ daná vztahy*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re}\left[v \exp\left(\lambda t\right)\right], \\ x_2(t) &= \operatorname{Im}\left[v \exp\left(\lambda t\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Příklad 16. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Řešení. Soustava (2.32) je speciálním případem soustavy (2.18) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme vlastní čísla matice A z charakteristické rovnice

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

Hledaná vlastní čísla jsou komplexní: $\lambda_1 = 2+i$ a $\lambda_2 = 2-i$, což dvojice komplexně sdružených vlastních čísel. Proto využijeme Větu 2.15.

Určeme nyní vlastní vektory, odpovídající prvnímu vlastnímu číslu. Vlastní vektor $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 2 + i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot v_1 = o..$$

První řádek je i-násobkem druhého, proto se soustava redukuje na jediný vztah

$$-iv_{11} + v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení můžeme volit např. $v_1 = (1, i)^T$. Řešení soustavy (2.32) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{(2+i)t} = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}(\cos t + i \sin t) = \mathrm{e}^2 t \cdot \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (2.30) nebo (2.31) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení, tj. reálný fundamentální systém $y_1(t)$, $y_1(t)$ soustavy (2.32):

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}\left(x(t)+\overline{x}(t)\right) = \mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix},\\
x_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}\left(x(t)-\overline{x}(t)\right) = \mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Obecné řešení $x(t)$ soustavy (2.32) je dáno lineární kombinaci

$$
x(t) = C_1x_1(t)+C_2x_2(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix}\cos 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}
$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. □

V následujícím příkladě si ukážeme, že při hledání řešení systému, který nemá násobná vlastní čísla, budeme obě věty kombinovat. Postup již nebudeme detailně rozepisovat.

Příklad 17. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -2x_1 + 5x_2, - 5x_3\\
x_2' &= - x_2 + 2x_3,\\
x_3' &= x_1 - 3x_2 + 4x_3.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Řešení. Soustava (2.33) je speciálním případem soustavy (2.18) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určíme vlastní čísla matice A z charakteristické rovnice

$$0 = \det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & -5 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)[\lambda^2 + 1] = 0.$$

Hledané kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$ jsou tři nenásobná a různá vlastní čísla. Jedno reálné a dvě komplexně sdružená. Proto při hledání obecného řešení soustavy (4.18) využijeme v případě kořene $\lambda_1 = -1$ Větu 2.14 a v případě komplexně sdružených kořenů $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$ využijeme Větu 2.15.

Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, je-li první proměnná nulová a druhá rovna třetí. Jedno takové nenulové řešení je například $v_1 = (0, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (2.33) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (0, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda E)v = \begin{pmatrix} -2-i & 5 & -5 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o..$$

Přičteme-li k prvnímu řádku třetí řádek vynásobený číslem $2 + i$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1-3i & 4+2i \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Dále přičtěme k prvnímu řádku -(2+i) násobek druhého řádku a získáme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Nyní snadno určíme jedno nenulové řešení. Je jím například vektor $v_2 = (1-3i, 2, 1+i)^T$. Řešení soustavy (2.33) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1-3i, 2, 1+i)^T \cdot (\cos t + i \sin t) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t + i(\sin t - 3\cos t) \\ 2\cos + 2i \sin t \\ \cos t - \sin t + i(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (2.30) nebo (2.31) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení $x_2(t)$, $x_3(t)$ soustavy (2.33), odpovídajících komplexnímu řešení $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Re} x(t) &= \frac{1}{2}(x(t) + \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ y_3(t) &= \operatorname{Im} x_2(t) &= \frac{1}{2i}(x(t) - \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení soustavy (2.33) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. □

Shrnutí

Tento tutoriál byl věnován řešení lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Ukázali jsme metodu eliminační, která spočívá v převodu tohoto systému na jednu rovnici, ale n-tého řádu. Dále jsme pomocí kořenů charakteristické rovnice a vlastních vektorů zkonstruovli fundamentální systém řešení, jestliže matice neobsahovala násobné vlastní čísla. Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní.

2.4.4 Řešené příklady

Příklad 18. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Řešení. Soustava (4.17) je speciálním případem soustavy (2.18) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (4.17) opět využít Větu 2.14.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11} & - & 2v_{12} & + & v_{13} & = & 0, \\ v_{11} & + & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{21} & - & v_{22} & + & v_{23} & = & 0, \\ & - & 2v_{22} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3v_{31} & - & v_{32} & + & v_{33} & = & 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} & + & v_{33} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (4.17) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{t}, \;\; (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \text{a} \quad (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{t} + C_2(1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3(-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t} =$$

$$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & -\ C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & - & C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & & & - & 2C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & + & C_3\mathrm{e}^{-2t}. \end{array} \tag{2.35}$$

□

Příklad 19. Nalezněte řešení soustavy rovnic (4.17) splňující podmínku

$$x(0) = (1, 0, -1)^T. \tag{2.36}$$

Řešení. Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 21. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1, C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapíšeme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} -C_1 & + & C_2 & - & C_3 & = & 1, \\ C_1 & & & - & 2C_3 & = & 0, \\ C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -1. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}\,.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (4.18) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (4.19):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & + & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & - & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & + & \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & - & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & - & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}. \end{array}$$

$\square$

3 Tutoriál č. 3

Exponenciála matice a její užití

řešení Cauchyovy úlohy pro lineární systémy užitím fundamentálních matic.

Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu

3.1 Exponenciála matice a její užití

3.1.1 Definice exponenciály matice

V této části definujeme pojem takzvané exponenciály matice, který je motivován rozvojem exponenciální funkce do Mac'laurinovy řady a pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{1}{1!} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot t^n + \cdots .$$

Definice 3.1. Pro $n \times n$ matici $B(t)$ definujme *exponenciálu matice* jako novou $n \times n$ matici pomocí řady

$$\mathrm{e}^{B(t)} := \exp[B(t)] = E + \frac{1}{1!} B(t) + \frac{1}{2!} B^2(t) + \cdots + \frac{1}{n!} B^n(t) + \cdots . \tag{3.1}$$

Každý prvek matice $\exp[B(t)]$ je součtem některé řady a výše uvedená definice v sobě zahrnuje celkem $n \times n$ řad. Lze ukázat, že každá tato řada konverguje, a tím prokázat korektnost této definice. Použitím Definice 3.1 se snadno dokáže následující

Věta 3.2. *Je-li O nulová $n \times n$ matice, pak $\mathrm{e}^O = E$.*

Další vlastnost říká, že pro exponenciálu matice platí podobná výpočetní pravidla jako pro exponenciální funkci

Věta 3.3. *Jestliže $n \times n$ matice A a B komutují, tj. platí-li $AB = BA$, potom*

$$\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A.$$

Důsledkem Věty 3.3 i volbě $B = -A$je fakt, že exponenciála matice e^A má matici inverzní a platí

$$\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}.$$

Příklad 3.4. Najděte (pomocí definice) exponenciály matice e^{At} v případě, že $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Proto

$$\mathrm{e}^{At} = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Postup z tohoto příkladu je možno v některých případech zobecnit na postup uvedený v následující větě.

Věta 3.5. *Je-li A matice typu $n \times n$ a P je regulární matice taková, že*

$$P^{-1}AP = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\mathrm{e}^A = P\exp(\Lambda)P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Zvolíme-li v této větě matici P jako 2×2 jednotkovou matici, obdržíme ihned výsledek příkladu č. 3.4. Existují ovšem matice, které nesplňují předpoklady předchozí věty. Určitě jsou to matice s komplexními vlastním čísly. Takovou maticí se budeme zabývat v následujícím příkladě.

Příklad 3.6. Najděte (pomocí definice) exponenciálu matice e^{At} v případě, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem lze získat jednotlivé mocniny

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^5 = A.$$

Proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} & \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Užití exponenciály matice

Je-li A konstantní $n \times n$ matice pak s pomocí vzorce (3.1) dostaneme

$$\left(\mathrm{e}^{At}\right)' = A\mathrm{e}^{At}. \tag{3.2}$$

Tento vztah dává možnost zapsat obecné řešení homogenního systému diferenciálních lineárních rovníc (3.2) s konstantní maticí A, tj. systému

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay. \tag{3.3}$$

Věta 3.7. *Fundamentální matice systému (3.3) s konstantní maticí A je dána vztahem*

$$Y(t) = \mathrm{e}^{At}.$$

S pomocí vztahu (3.2) dostaneme

$$Y'(t) = A\mathrm{e}^{At} = AY(t),$$

tj. matice $Y(t)$ je skutečně řešení systému (3.3). Navíc splňuje podmínku

$$Y(0) = E.$$

Z této skutečnosti snadno plyne následující věta.

Věta 3.8. *Obecné řešení $y = y(t)$ lineárního systému (3.3) je dané vzorcem*

$$y = y(t) = \mathrm{e}^{At} \cdot C \tag{3.4}$$

kde $C = (C_1, \dots, C_n)^T$ je konstantní vektor.

Přímý výpočet exponenciály matice podle definice (tj. podle vzorce (3.1)) je obyčejně nepoužitelný kvůli tomu, že není možné najít součet definiční řady. Jak vyplývá z Věty 3.8 je pro nalezení některého řešení (nebo pro nalezení obecného řešení systému (3.3) užitečné mít metody pro výpočet exponenciály matice. Takové existují. Nyní uvedeme jinou metodu.

3.1.3 Metoda pro nalezení exponenciály matice

Metoda nalezení exponenciály matice, kterou nyní uvedeme, vyžaduje nalezení jistého partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Důležitou roli hraje pojem tzv. *charakteristického polynomu* a *charakteristické rovnice*. Předpokládejme, že je dána konstantní $n \times n$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A nazýváme polynom $p(\lambda)$ definovaný pomocí determinantu

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je zřejmé, že po provedení výpočtu determinantu lze polynom $p(\lambda)$ zapsat ve schématickém tvaru skutečného polynomu například takto

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

kde koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ dostaneme, když determinant spočítáme. V následující větě předpokládáme, že charakteristický polynom byl získán právě tímto způsobem. Často bývá charakteristický polynom definován jako determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

který lze pomocí původního polynomu vyjádřit ve tvaru $(-1)^n p(\lambda)$. Tento znaménkový rozdíl nemá vliv na tvar a řešení tzv. *charakteristické rovnici* matice A, která má tvar

$$p(\lambda) = 0.$$

Věta 3.9. *Předpokládejme, že A je konstantní $n \times n$ matice, jejíž charakteristický polynom má tvar*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Předpokládejme dále, že $y(t)$ je řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu se stejnými koeficienty:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{3.5}$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)} = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{3.6}$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Pak pro exponenciálu matice platí vztah:

$$\mathrm{e}^{At} = z_1(t)I + z_2(t)A + \cdots + z_n(t)A^{n-1}.$$

Příklad 3.10. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 3\,\lambda - 4$ a vlastní čísla $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4 = 0$ má obecné řešení $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}$.
Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & & C_1 & + & C_2 \\ 1 = y'(0) = & & -C_1 & + & 4C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} C_1 = -\frac{1}{5} \\ C_2 = \frac{1}{5} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = \frac{1}{5}(-e^{-t} + e^{4t}$, $y'(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} + 4e^{4t}$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{4t} \\ e^{-t} + 4e^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{-t} + e^{4t} \\ -e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{4e^{-t} + e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-e^{-t} + e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -2e^{-t} + 2e^{4t} \\ 3e^{-t} + 3e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

□

Příklad 3.11. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\,\lambda + 4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2j$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 4 = 0$ má obecné řešení $y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & C_1 & & \\ 1 = y'(0) = & C_1 & + & 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = \frac{1}{2}e^t \sin 2t$, $y'(t) = \frac{1}{2}e^t(2\cos 2t + \sin 2t)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t(2\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t(2\cos 2t - \sin 2t) \\ e^t \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{e^t}{2}(2\cos 2t - \sin t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \sin 2t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 3.12. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 2$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4 = 0$ má obecné řešení $y = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$.
Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & C_1 & & \\ 1 = y'(0) = & 2C_1 & + & C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = e^{2t}t$, $y'(t) = e^{2t}(2t+1)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}t \\ e^{2t}(2t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1-2t) \\ e^{2t}t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{2t}(1-2t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{2t}t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

□

3.2 Cauchyova úloha pro lineární systémy

3.2.1 Cauchyova úloha pro homogenní systém

Počáteční (Cauchyovou) úlohou na intervalu $\mathcal{I}$ pro homogenní systém rozumíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.8}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Tato úloha má jediné řešení, která můžeme zapsat pomocí jakékoli fundamentální matice $\Phi(t)$. Tato má pro libovolné $t_0 \in \mathcal{I}$ inverzní matici $(\Phi(t_0))^{-1}$ a pronásobením touto konstantní maticí dostáváme normovanou fundamentální matici v bodě $t = t_0$ ve tvaru e $\Phi(t, t_0) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}$. Taková matice je řešením úlohy

$$Y' = AY(t), \quad Y(t_0) = E,$$

Analogicky platí, že řešení úlohy (3.8) je dáno vztahem

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y_0. \tag{3.9}$$

3.2.2 Cauchyova úloha pro homogenní systém s konstantní maticí

Nyní uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay, \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.10}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. V tomto případě je fundamentální matice ve tvaru exponenciály $\Phi(t) = e^{At}$ a normovanou fundamentální matici v bodě $t = t_0$ je maticová exponenciála

$$\Phi(t, t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \tag{3.11}$$

a řešení (3.8) zapsat vztahem (3.9), tj.,

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0.$$

3.2.3 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém

Hledejme nyní řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy pro nehomogenní systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Také tato úloha má jediné řešení. Obecné řešení odpovídající homogenní úlohy můžeme zapsat ve tvaru $y(t) = \Phi(t;t_0) \cdot C$, kde $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je konstantní vektor. Použijeme metodu variace konstant a řešení $y(t)$ na intervalu $\mathcal{I}$ předpokládáme ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t, t_0) \cdot C(t) \tag{3.13}$$

tak, aby platilo $y(t_0) = y_0$. Vztah, kterému vyhovuje vektorová funkce $C(t)$ je

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t;t_0)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s;t_0)b(s)\mathrm{d}s.$$

Abychom dostali řešení úlohy (3.12), volíme $C(t_0) = y_0$, tedy:

$$y(t) = \Phi(t;t_0)y_0 + \Phi(t;t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s;t_0)b(s)\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

Nyní pro $t, t_0, s \in \mathcal{I}$ užijeme vztah:

$$\Phi(t, t_0)\Phi^{-1}(s, t_0) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}(\Phi(s)(\Phi(t_0))^{-1})^{-1} = \Phi(t)(\Phi(s))^{-1} = \Phi(t, s) \tag{3.15}$$

a získáme tak konečnou podobu:

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t; s)b(s)\mathrm{d}s. \tag{3.16}$$

3.2.4 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro nehomogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.17}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, můžeme užitím vztahu (3.11) nalezené řešení (3.16) zjednodušit. Protože

$$\Phi(t; t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \quad \text{a} \quad \Phi(t; s) = \mathrm{e}^{(t-s)A},$$

má řešení (3.16) tvar

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s. \tag{3.18}$$

Příklad 3.13. Nalezněte obecné řešení systému lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 2y_2 & + & 2 & - & 5t \\ y_2' & = & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 5 & - & 7t \end{array}$$

Řešení. Matice soustavy je konstantní $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ a pravá strana má tvar $b(t) = \begin{bmatrix} 2 - 5\,t \\ 5 - 7\,t \end{bmatrix}$.

V příkladě 3.10 jsme určili exponenciálu matice A ve tvaru $e^{tA} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t} + 2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} - 2\,e^{-t} \\ 3\,e^{4\,t} - 3\,e^{-t} & 2\,e^{-t} + 3\,e^{4\,t} \end{bmatrix}$. Nyní určíme integrál ze vzorce (3.18) ($t_0 = 0$):

$$\int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{5}\int_0^t \begin{bmatrix} -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s \\ 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + \,e^{-t+s}s \end{bmatrix} ds =$$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \int_0^t -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s \; ds \\ \int_0^t 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + \,e^{-t+s}s \; ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}$$

Nyní dosadíme za vektor počátečních hodnot vektor $C = [C_1, C_2]$ a celkově dostáváme řešení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{C_1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t} + 2\,e^{4\,t} \\ 3\,e^{4\,t} - 3\,e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{C_2}{5}\begin{bmatrix} 2\,e^{4\,t} - 2\,e^{-t} \\ 2\,e^{-t} + 3\,e^{4\,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}.$$

$\square$

4 Počítačové cvičení č. 1

Metoda vlastních čísel a vektorů pro lineární systémy
s konstantními koeficienty násobná vlastní čísla.
Weyrova metoda pomocí MAPLE

4.1 Formulace problému a postup jeho řešení

V minulém tutoriálu jsme se zabývali soustavou lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty.

$$x' = Ax, \tag{4.1}$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a tento vektor je vektorem hledaného řešení, zavisejícího na (nezávislé) proměnné t, tj. $x = x(t)$. Za předpokladu, že řešení soustavy (4.1) má tvar

$$x = v \exp(\lambda t), \tag{4.2}$$

kde λ je vhodné reálné nebo komplexní číslo a v je vhodný (reálný či komplexní) konstantní vektor jsme odvodili:

$$(Av) \exp(\lambda t) - (\lambda v) \exp(\lambda t) = (A - \lambda E) v \exp(\lambda t) = o, \tag{4.3}$$

ve kterém je E čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je již zmíněný nulový vektor. Po vykrátcení výrazem $\exp(\lambda t)$ jsme dostali vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \tag{4.4}$$

Z teorie lineárních soustav vyplývá, že soustava (4.4) bude mít nenulové řešení v pouze tehdy, když bude její matice singulární. Musí tedy být

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.5}$$

Rovnice (4.5) je polynomiální rovnicí (stupně n) vzhledem k λ. Obecně má rovnice (4.5) celkem n kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát kolik je jeho násobnost. V minulém tutoriálu jsme řešili případ reálných a navzájem různých kořenů charakteristické rovnice a případ komplexních nenásobných vlastních čísel. Abychom mohli uvedenou metodu použít na každý systém s konstantními koeficienty musíme vyřešit i případ násobných vlastních čísel. Bylo ukázáno, že v případě nenásobných kořenů jsme našli ke každému kořeni jedno reálné řešení, která jsou lineárně nezávislá. Komplexní kořeny lze uspořádat do dvojic komplexně sdružených kořenů a této dvojici se přiřadí také dvojice lineárně nezávislých reálných řešení. V případech, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice (4.3) násobné je konstrukce fundamentálního systému komplikovanější. Ke každému násobnému vlastnímu číslu λ musíme nalézt přesně tolik lineárně nezávislých řešení, jaká je jeho násobnost. Mezi těmito řešeními jsou řešení v předpokládaném tvaru, tj. řešení ve tvaru (4.2). Může se ovšem stát, počet vlastních vektorů k násobnému vlastnímu číslu (geometrická násobnost) je menší než jeho násobnost jako kořenu charakteristické rovnice (algebraická násobnost). Postup jak tuto komplikaci řešit popíšeme obecně a budeme je ilustrovat pro reálné kořeny. Pro násobné komplexní kořeny postupujeme podobně jako v případě nenásobných komplexních čísel dostaneme i v tomto případě dvojice komplexně sdružených vektorů a tedy dvojice reálných vektorů, které jsou reálnými a imaginárními částmi komplexních řešení. Uveďme nyní postup, vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy (4.1).

4.1.1 Zobecněné vlastní vektory

Vektor v nazýváme **zobecněným vlastním vektorem hodnosti** r, odpovídající vlastnímu číslu λ, jestliže platí

$$(A-\lambda E)^r v = o \tag{4.6}$$

a

$$(A-\lambda E)^{r-1} v \neq o. \tag{4.7}$$

Je-li dán zobecněný vlastní vektor v hodnosti r, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak k němu definujeme odpovídající **řetězec zobecněných vlastních vektorů**

$$v_1, v_2, \ldots, v_r \tag{4.8}$$

délky r takto:

$$\left\{\begin{array}{lllll} v_r & = & v, & & \\ v_{r-1} & = & (A-\lambda E)v_r & = & (A-\lambda E)v, \\ v_{r-2} & = & (A-\lambda E)v_{r-1} & = & (A-\lambda E)^2 v, \\ \ldots & & & & \\ v_1 & = & (A-\lambda E)v_2 & = & (A-\lambda E)^{r-1} v. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Poznamenejme, že z uvedené podmínky (4.6) okamžitě vyplývá, že vektor v_1 v řetězci (4.8) je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ, neboť dle (4.7) a (4.9) je $v_1 \neq o$ a dle (4.6) je $(A-\lambda E)v_1 = o$.

Jednomu vlastnímu číslu může odpovídat několik různých řetězců, které mohou mít různé délky. Bez důkazu uveďme následující poznatky o zobecněných vlastních vektorech (příslušné důkazy k těmto a k dalším poznatkům jsou obsaženy v některých učebnicích algebry).

Věta 4.1. *Všechny vektory řetězce (4.8) jsou lineárně nezávislé. Odpovídá-li jednomu vlastnímu číslu několik zobecněných vlastních vektorů, které nejsou lineárně závislé, pak je množina vektorů tvořená všemi příslušnými řetězci lineárně nezávislou množinou. Součet délek všech lineárně nezávislých řetězců odpovídajících danému vlastnímu číslu je roven jeho násobnosti. Zobecněné vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

4.1.2 Metoda vlastních vektorů - konstrukce fundamentálního systému

Poznatky uvedené ve Větě 4.1 jsou teoretickým základem garantujícím správnost a úplnost níže uvedeného postupu konstrukce fundamentálního systému řešení soustavy (4.1). Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice A, vektor v je zobecněným vlastním vektorem hodnosti s a (4.8) je odpovídající řetězec vlastních vektorů. Jak bylo uvedeno výše, platí

$$(A - \lambda E)v_1 = o. \tag{4.10}$$

Jinými slovy, v_1 je vlastní vektor matice A, příslušející vlastnímu číslu λ. Proto je vektor

$$y_1 := v_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{4.11}$$

řešením soustavy (4.1). Definujme vektor

$$y_2 := (v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{4.12}$$

a ukažme, že je řešením soustavy (4.1). Skutečně, pomocí vztahů (4.9) (ze kterých mj. vyplývá $(A-\lambda E)v_2 = = v_1$, tj. $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$) a (4.10) (tj. $\lambda v_1 = Av_1$) dostáváme

$$\begin{aligned} y_2' = \left[(v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t}\right]' = v_1\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda(v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} = \left[(\lambda v_1 t) + \lambda v_2 + v_1\right]\mathrm{e}^{\lambda t} = \\ t\left(\lambda v_1 \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + (\lambda v_2 + v_1)\mathrm{e}^{\lambda t} = t\left(Av_1\mathrm{e}^{\lambda t}\right) + Av_2\mathrm{e}^{\lambda t} = \\ A\left(v_1 t + v_2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = Ay_2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení, že vektor y_2 je řešením soustavy (4.1) prověřeno. Definujme další vektor

$$y_3 := \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

a také ukažme, že je řešením soustavy (4.1). Dostáváme (kromě výše uvedených vztahů použijeme ještě $Av_3 = \lambda v_3 + v_2$)

$$y_3' = \left[\left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\right]' = \left(v_1 t + v_2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} +$$

$$\lambda\left(v_1\cdot\frac{t^2}{2}+v_2t+v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=\left(\lambda v_1\cdot\frac{t^2}{2}+(\lambda v_2+v_1)\,t+(\lambda v_3+v_2)\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=$$
$$\frac{t^2}{2}\left(\lambda v_1\mathrm{e}^{\lambda t}\right)+t(\lambda v_2+v_1)\mathrm{e}^{\lambda t}+(\lambda v_3+v_2)\mathrm{e}^{\lambda t}=$$
$$\frac{t^2}{2}\left(Av_1\mathrm{e}^{\lambda t}\right)+tAv_2\mathrm{e}^{\lambda t}+Av_3\mathrm{e}^{\lambda t}=$$
$$A\left(v_1\frac{t^2}{2}+v_2t+v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=Ay_3.$$

Podobným způsobem konstruujeme další vektory až po vektor

$$y_r:=\left(v_1\cdot\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}+v_2\cdot\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}+\cdots+v_{r-1}t+v_r\right)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Protože jsou vektory řetězce (4.8) dle Věty 4.1 lineárně nezávislé a

$$y_1(0)=v_1,y_2(0)=v_2,\ldots,y_r(0)=v_r,$$

jsou vektory

$$y_1(t),y_2(t),\ldots,y_r(t) \tag{4.13}$$

také lineárně nezávislé. Získali jsme tedy s lineárně nezávislých řešení (4.13) soustavy (4.1).

Věta 4.2. *Množina všech vektorů (konstruovaných výše uvedeným způsobem) odpovídajících všem vlastním číslům a všem jim odpovídajícím řetězcům zobecněných vlastních vektorů tvoří* **fundamentální systém** *soustavy* (2.18).

Stranou jsme prozatím nechali otázku kolik zobecněných vlastních vektorů odpovídá násobnému vlastnímu číslu λ. Odpověď na ni vyplývá z teorie algebraických lineárních systémů a je obsažena v následující větě. Označme hodnost matice

$$A - \lambda E \tag{4.14}$$

písmenem h a její nulitu písmenem ν, kde $\nu = n - h$.

Věta 4.3. *Počet zobecněných vlastních vektorů odpovídajících násobnému vlastnímu číslu λ je roven nulitě ν matice* (4.14).

Ilustrujme popsaný postup několika příklady.

Příklad 20. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + x_2 - x_3,\\
x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3,\\
x_3' &= -x_2 + 2x_3.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Řešení: Soustava (4.15) je speciálním případem soustavy (2.18) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} v_{11} & & & + & v_{13} & = & 0, \\ & & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.15) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o. \tag{4.16}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (4.16) má hodnost $h = 2$ a nulitu $\nu = 3 - 2 = 1$. Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ tedy bude odpovídat jeden zobecněný vlastní vektor hodnosti $r = 2$. Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{ccccccc} & & v_{22} & - & v_{23} & = & 0, \\ v_{21} & & & + & v_{23} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (-1, 1, 1)^T$. Jedno z řešení soustavy (4.15) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Vytvořme řetězec zobecněných vlastních vektorů, odpovídajících uvažovanému vlastnímu číslu. Hledejme nenulový vektor

$$v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T,$$

splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = v_2.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádek jsou lineárně závislé. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & v_{32} & - & v_{33} & = & -1, \\ -v_{31} & & & - & v_{33} & = & 1 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-2, 0, 1)^T$. Další řešení soustavy (4.15) odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (v_2 t + v_3) \cdot \mathrm{e}^t = \left((-1,1,1)^T t + (-2,0,1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t.$$

Všechna tři řešení soustavy (4.15) tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$\begin{aligned} x(t) = C_1(-1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^t + & \\ C_3\left((-1,1,1)^T t + (-2,0,1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t &= \\ C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_3 & \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

4.1.3 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla věnována řešení lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Pomocí kořenů charakteristické rovnice byly sestaveny vlastní vektory a byl zkonstruován fundamentální systém řešení. Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní a násobné či nenásobné. V případě násobných kořenů se některá řešení lišila od původně předpokládaného tvaru. Vždy však jedno z řešení tento tvar mělo.

4.1.4 Řešené příklady

Příklad 21. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Řešení: Soustava (4.17) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (4.17) opět využít Větu 2.14.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11} & - & 2v_{12} & + & v_{13} & = & 0, \\ v_{11} & + & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{21} & - & v_{22} & + & v_{23} & = & 0, \\ & - & 2v_{22} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3v_{31} & - & v_{32} & + & v_{33} & = & 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} & + & v_{33} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (4.17) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^t, \ \ (1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \text{a} \quad (-1,-2,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_2(1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3(-1,-2,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \\ C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & -\ C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & - & C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & & & - & 2C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & + & C_3\mathrm{e}^{-2t}. \end{array} \tag{4.18}$$

Příklad 22. Nalezněte řešení soustavy rovnic (4.17) splňující podmínku

$$x(0) = (1,0,-1)^T. \tag{4.19}$$

Řešení: Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 21. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1, C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} -C_1 & + & C_2 & - & C_3 & = & 1, \\ C_1 & & & - & 2C_3 & = & 0, \\ C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -1. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (4.18) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (4.19):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

Příklad 23. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Řešení: Soustava (4.14) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno: $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$ a je trojnásobné.

Hledejme odpovídající vlastní vektor
$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T.$$
Bude jím libovolný nenulový vektor, splňující vztah
$$(A - \lambda E)v_1 = o.$$
Jeho rozepsáním dostáváme soustavu
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o. \tag{4.21}$$
Snadno lze ověřit, že matice soustavy (4.21) má hodnost $h = 1$ a nulitu $\nu = 3 - 1 = 2$. Vlastnímu číslu tedy budou odpovídat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Jsou jimi například vektory $v_1^{1*} = (-1, 0, 1)^T$ a $v_1^{2*} = (0, 1, -1)^T$. Jeden z vlastních vektorů však musí být zobecněným vlastním vektorem hodnosti 2. Bude to takový vektor, pro který existuje netriviální řešení v_2 jedné ze soustav
$$(A - \lambda E)v_2 \;\; = \;\; v_1^{i*}, \quad i = 1, 2. \tag{4.22}$$
Snadno ověříme, že každá soustava (4.22) má pouze triviální řešení $v_2 = (0, 0, 0)$. Výběr vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ tedy neumožňuje najít nenulový vektor v_2, přestože dle teoretických poznatků takový vektor musí (je-li pravá strana vhodně zvolena) existovat.

Pokusme se vybrat pravou stranu v soustavě (4.22) tak, aby nenulový vektor v_2 existoval. Libovolná lineární kombinace

$$\alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2*}$$

je opět vlastním vektorem (který je pro $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nenulový). Jinými slovy - tato lineární kombinace je obecným řešením soustavy (4.21). Pokusme se určit parametry α a β tak, aby soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \quad = \quad \alpha v_1^{1*} + \beta v_1^2 \tag{4.23}$$

měla nenulové řešení. Aplikací Frobeniovy věty (hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené) ihned dospíváme k požadavku $\alpha = \beta/2$. Volme například $\beta = 2$, $\alpha = 1$ a místo původní dvojice vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ definujme novou dvojici

$$v_1^1 = v_1^{1*}, \quad v_1^2 = v_1^{1*} + 2v_1^{2*} = (-1, 2, -1)^T.$$

Soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \quad = \quad v_1^1 \tag{4.24}$$

má netriviální řešení $v_2 = (-1, 1, -1)$. Fundamentální systém řešení soustavy (4.14) je tvořen trojicí vektorů

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] \cdot \mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1(t) & = & -(C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_2(t) & = & (2C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & + & 2C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_3(t) & = & (C_1 - C_2 - C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t.
\end{array}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

4.2 Řešený příklad pomocí programu MAPLE

Uvedený postup je realizován pomocí matematického programu MAPLE v klasickém sešitě.

```
> with(linalg);
> assume(a,real);assume(t,real);
```

[*BlockDiagonal*, *GramSchmidt*, *JordanBlock*, *LUdecomp*, *QRdecomp*, *Wronskian*, *addcol*, *addrow*, *adj*, *adjoint*, *angle*, *augment*, *backsub*, *band*, *basis*, *bezout*, *blockmatrix*, *charmat*, *charpoly*, *cholesky*, *col*, *coldim*, *colspace*, *colspan*, *companion*, *concat*, *cond*, *copyinto*, *crossprod*, *curl*, *definite*, *delcols*, *delrows*, *det*, *diag*, *diverge*, *dotprod*, *eigenvals*, *eigenvalues*, *eigenvectors*, *eigenvects*, *entermatrix*, *equal*, *exponential*, *extend*, *ffgausselim*, *fibonacci*, *forwardsub*, *frobenius*, *gausselim*, *gaussjord*, *geneqns*, *genmatrix*, *grad*, *hadamard*, *hermite*, *hessian*, *hilbert*, *htranspose*, *ihermite*, *indexfunc*, *innerprod*, *intbasis*, *inverse*, *ismith*, *issimilar*, *iszero*, *jacobian*, *jordan*, *kernel*, *laplacian*, *leastsqrs*, *linsolve*, *matadd*, *matrix*, *minor*, *minpoly*, *mulcol*, *mulrow*, *multiply*, *norm*, *normalize*, *nullspace*, *orthog*, *permanent*, *pivot*, *potential*, *randmatrix*, *randvector*, *rank*, *ratform*, *row*, *rowdim*, *rowspace*, *rowspan*, *rref*, *scalarmul*, *singularvals*, *smith*, *stackmatrix*, *submatrix*, *subvector*, *sumbasis*, *swapcol*, *swaprow*, *sylvester*, *toeplitz*, *trace*, *transpose*, *vandermonde*, *vecpotent*, *vectdim*, *vector*, *wronskian*]

```
> MA := matrix([[4*a-12, -3*a+12, -a+6, 6*a], [-2*a+10, 3*a-6,
```

```
6*a], [-2*a, -3*a, -a, 6]]);
```

$$MA := \begin{bmatrix} 4\,a\sim-12 & -3\,a\sim+12 & -a\sim+6 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim+10 & 3\,a\sim-6 & -a\sim+2 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim+6 & -3\,a\sim+12 & 5\,a\sim-12 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim & -3\,a\sim & -a\sim & 6 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvectors(MA);
```

$$[6+6\,I\,a\sim, 1, \{[-I, -I, -I, 1]\}], [6-6\,I\,a\sim, 1, \{[I, I, I, 1]\}],$$
$$[-18+6\,a\sim, 2, \{[-1, 1, -1, 0]\}]$$

```
> r1:=evalm(exp((-18+6*a)*t)*vector([-1, 1, -1,
0]));Mchar:=evalm(MA-(-
18+6*a)*matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])):v2:
=linsolve(Mchar,vector([-1, 1, -1, 0])):r2:=evalm((t*vector([-
1, 1, -1, 0])+v2)*exp((-18+6*a)*t));
```

$$r1 := [-e^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, e^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, -e^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, 0]$$

$$r2 := \left[\mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} \left(-t\sim + \_t_1 + \frac{1}{2}\right), \mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} \left(t\sim - \_t_1 - \frac{1}{3}\right), \mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} (-t\sim + \_t_1), 0 \right]$$

```
> komplvektor:=evalm(exp((6+6*I*a)*t)*vector([-I, -I, -I, 1]));
```

$$komplvektor := [-I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, -I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, -I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, \mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}]$$

```
> r3:=map(x->Re(x), komplvektor);r4:=map(x->Im(x),
komplvektor);
```

$$r3 := [\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim\,a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim\,a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim\,a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim\,a\sim)]$$

$$r4 := [-\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim\,a\sim), -\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim\,a\sim), -\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim\,a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim\,a\sim)]$$

```
>
>
```

5 Tutoriál č. 4

Užití mocninných řad

Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Planární autonomní diferenciální systém

5.1 Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu

Cílem této pasáže je seznámit čtenáře se speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu, Besselovou rovnicí. Ukážeme, že řešení této rovnice se hledá pomocí nekonečné řady. Zmíníme se o tzv. gama funkci, která se v řešení Besselovy rovnice objevuje. Popíšeme Besselovy funkce, pomocí nichž je řešení Besselovy rovnice popsáno.

Funkce gama

V dalším bude užívána funkce gama, která se definuje jako jako nevlastní integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Funkce $\Gamma(x)$ je tímto integrálem definována pro $x > 0$ (pro $x \leq 0$ integrál diverguje) a je pro $x > 0$ spojitá.

Pomocí integrace per partes lze ukázat , že

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{5.2}$$

Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

užitím (5.2) vidíme, že pro přirozená čísla n dostáváme

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{5.3}$$

Funkce gama je tedy jakýmsi zobecněním faktoriálu.

5.2 Besselova rovnice

Při popisu mnohých fyzikálních jevů hraje důležitou roli diferenciální rovnice

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{5.4}$$

Tato rovnice se nazývá **Besselova**. Budeme předpokládat, že $\nu \geq 0$. Řešení vyjádříme pomocí mocninné řady se středem v 0. Bod $x = 0$ je tzv. regulárním singulárním bodem Besselovy rovnice.

5.2.1 Konstrukce řešení ve tvaru řady

Řešení Besselovy rovnice můžeme hledat ve tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \tag{5.5}$$

nebo (vytkneme-li výraz x^r) ve tvaru

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde koeficienty řady c_n a číslo r určíme v průběhu výpočtů. Dsazením a úpravami lze odvodit

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)^2 - \nu^2)x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \tag{5.6}$$

Z tzv. **charakteristické rovnice**

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

určíme hodnotu čísla r. Vidíme, že kořeny charakteristické rovnice jsou $r_1 = \nu$ a $r_2 = -\nu$.

Pro $r = \nu$ z (5.6) zbude

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Výraz na pravé straně lze upravit:

$$x^\nu \left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{n+2} \right).$$

Tento výraz je ovšem roven 0 a aby byla uvedená rovnost splněna pro každé x, musí platit

$$\begin{aligned}(1+2\nu)c_1 &= 0 \\ (k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k &= 0 \quad k=0,1,2,\dots\end{aligned} \tag{5.7}$$

neboli

$$c_{k+2}=\frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}\,,\qquad k=0,1,2,\dots. \tag{5.8}$$

Protože podle (5.7) je $c_1=0$, lze ověřit, že liché členy řady jsou tedy nulové a zbývá určit sudé členy řady. Přeznačíme $k+2=2n$ (indexům $k=0,2,4,\dots$ teď odpovídá $n=1,2,3,\dots$) a vztah (5.8) můžeme zapsat jako

$$c_{2n}=\frac{-c_{2n-2}}{2^2n(n+\nu)}\,,\qquad n=1,2,3,\dots. \tag{5.9}$$

Postupným dosazováním případně užitím matematické indukce lze odvodit

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}\,,\qquad n=1,2,3,\dots. \tag{5.10}$$

Konstanta c_0 se standardně se volí $c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$ a konečný tvar s využitím vztahu (5.2)je:

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\Gamma(1+\nu)}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\cdot n!\cdot\Gamma(1+\nu+n)}\,.$$

5.3 Besselovy funkce

Jedno řešení Besselovy rovnice je tedy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} .$$

Pro $\nu \geq 0$ tato řada konverguje alespoň na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Funkce popisující právě získané řešení se obvykle značí $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} . \tag{5.11}$$

Pro druhý kořen charakteristické rovnice rovnice, $r_2 = -\nu$, zcela analogicky dostaneme

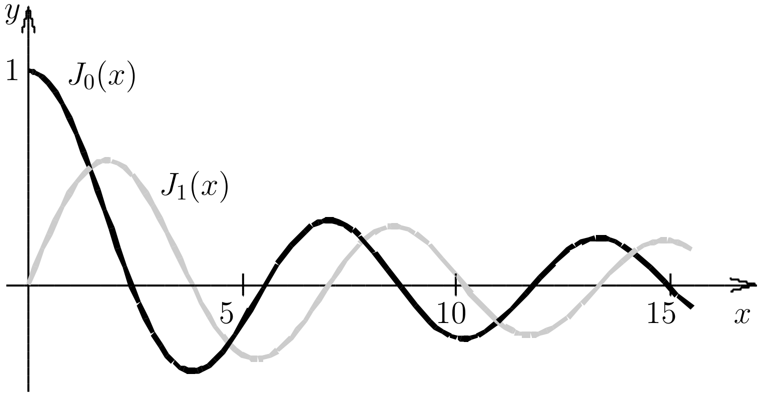
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} . \tag{5.12}$$

Funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ se nazývají **Besselovy funkce prvního druhu** řádu ν, resp. $-\nu$.

Na obrázku 5.1 jsou grafy funkcí $y = J_0(x)$ a $y = J_1(x)$.

Dá se ukázat, že jestliže ν není celé číslo, funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ jsou lineárně nezávislé. V tomto případě je obecné řešení rovnice (5.4) na intervalu $(0, \infty)$

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \tag{5.13}$$



Obrázek 5.1: Besselovy funkce prvního druhu řádu 0 a 1

Příklad 5.1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení. V našem případě je $\nu^2 = 1/4$, a tedy $\nu = 1/2$. Vidíme, že ν není celé číslo, a tedy obecné řešení zadané rovnice je

$$\underline{\underline{y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)}}.$$

$\square$

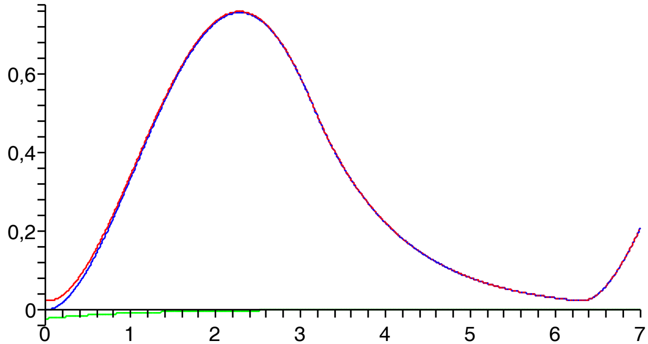
5.4 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

V předmětu BMA2 jsme pomocí Laplaceovy transformace řešili jednoduchou diferenciální rovnici s periodickou pravou stranou $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$ spolu s nulovými počátečními podmínkami $y(0) = 0$. Ukázali jsme, že je možné řešení rovnice vyjádřit ve tvaru součtu periodického řešení a funkce, která má pro větší t velmi malé hodnoty, tedy řešení splývá s periodickým řešením viz obrázek Tato situace se opakuje i pro jiné počáteční podmínky a tím je periodické řešení výjimečné.

Obecně studujeme chování řešení systému diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{5.14}$$

který může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů, jejichž jedno chování je popsáno konkrétním řešením $\mathbf{y}$ systému (5.14). To závisí na hodnotách stavových proměnných v počátečním okamžiku t_0 kdy stavové proměnné systému nabývají hodnotu $\mathbf{y}(t_0)$. Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty $\mathbf{y}_0$ stavových proměnných $\mathbf{y}$ se budou



Obrázek 5.2: periodické řešení řešení blížící se 0 řešení počáteční

v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $v(t_0)$ o méně než δ, budou se vypočtené hodnoty $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ stavových proměnných v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $v(t)$ $\forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ o méně než ε.

Z praktických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně veliké i pro libovolně veliké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích $t_0, \mathbf{y}_0$, ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Analogicky při sestavování matematického modelu nějakého fyzikální systému S zanedbáváme působení poruch, které nejsme schopni do modelu zahrnout. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému (5.14) a budeme předpokládat, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ má **triviální řešení**, které budeme značit $\mathbf{o}$.

Toto omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení $\mathbf{o}$ nezmenšuje obecnost dalších úvah: Vyšetřujme řešení $\mathbf{u}$ systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \tag{5.15}$$

definované na nějakém intervalu I. Proveďme v systému (5.15) substituci

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}\,. \tag{5.16}$$

Jelikož funkce $\mathbf{u}$ je řešením systému (5.15), platí $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) \quad \forall t \in I$, a tedy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \mathbf{u}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y} + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}) \tag{5.17}$$

Označíme-li $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}+\mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u})$, dostaneme z (5.17) systém $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\quad \mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ s triviálním řešením $\mathbf{o}$. Jeho stabilita se pak transformací (5.16) přenáší na řešení $\mathbf{u}$ systému (5.15).

Dále předpokládejme,že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ $\forall t > \alpha$ pro každý bod $(t_0, \mathbf{y}_0)$ $(t_0 \in I = (\alpha, \infty))$ je Cauchyova úloha daná počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ a systémem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{5.18}$$

jednoznačně řešitelná.

Definice 5.2. Řekneme, že triviální řešení $\mathbf{o}$ systému (5.18) je **stabilní** (viz obrázek 5.4), jestliže ke každému $t_0 > \alpha$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny počáteční hodnoty $\mathbf{y}_0 \in H$, $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ a pro všechna $t \geq t_0$ platí, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ Cauchyovy úlohy (5.18) splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon\,. \tag{5.19}$$

Příklad 5.3. Ukažte, že triviální řešení rovnice

$$y' = ky$$

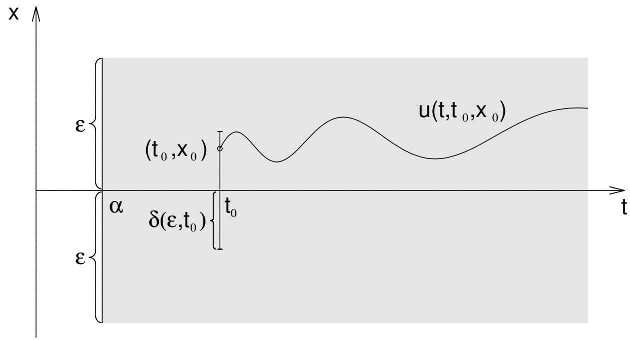
je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení. Funkce $f(t, y) = ky$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné y pro všechna $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty, I = (-\infty, \infty), H = \mathbb{R}, G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha

$$y' = ky\,, \quad y(t_0) = y_0$$

má řešení $u(t, t_0, y_0) = y_0 \mathrm{e}^{k(t-t_0)}$, $t \in I$.

$$\text{Tedy} \quad |u(t, t_0, y_0)| = |\,y_0| \cdot \mathrm{e}^{k(t-t_0)} \leq |\,y_0| \quad \text{pro všechna } k \leq 0,\ t \geq t_0\,.$$



Obrázek 5.3: Stabilní systém

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle (5.19) platit

$$|u(t, t_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |\, x_0| < \delta\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Poznámka 5.4. V úvodním motivačním příkladu jsme měli homogenní rovnici tohoto typu s konstantou $k = -1$, což dokazuje stabilitu tam zmíněného periodického řešení.

Příklad 5.5. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 6y_2 \\ y_2' &= y_1 - 4y_2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

je stabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (5.20) s počáteční podmínkou $y_1(t_0) = c_1, y_2(t_0) = c_2$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{y}_0 = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} (-3\,e^{-t+t_0} + 4)\,c_1 + (-6 + 6\,e^{-t+t_0})\,c_2 \\ (2 - 2\,e^{-t+t_0})\,c_1 + (4\,e^{-t+t_0} - 3)\,c_2 \end{bmatrix}.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| &= \left|\left(-3\,e^{-t+t_0} + 4\right) c_1 + \left(-6 + 6\,e^{-t+t_0}\right) c_2\right| + \left|\left(2 - 2\,e^{-t+t_0}\right) c_1 + \left(4\,e^{-t+t_0} - 3\right) c_2\right| \le \\ &\le |c_1| + |c_2| + |c_1| + |c_2| = 2\,(|c_1| + |c_2|) = 2\|\mathbf{y}_0\|\,. \end{aligned}$$

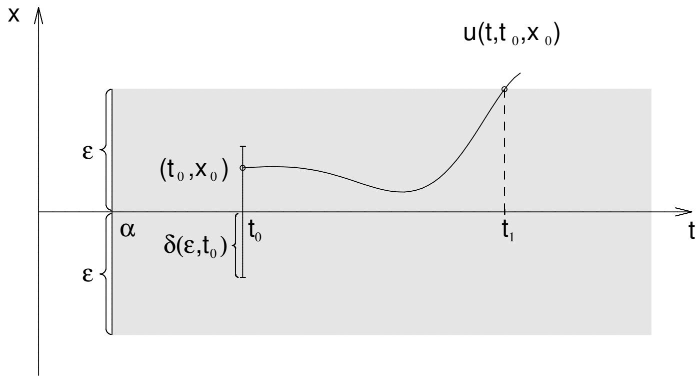
Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| \le 2\|\mathbf{y}_0\| < 2\delta = \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \ge t_0\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Triviální řešení, které není stabilní, nazveme **nestabilním**.

Volně můžeme říci, že triviální řešení systému (5.18) je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod $\mathbf{y}_0$ tak, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε, neboli existuje $t_1 > t_0$ tak, že $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| > \varepsilon$ pro $t > t_1$ (viz obrázek 5.4).



Obrázek 5.4: Triviální řešení není stabilní.

Příklad 5.6. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 6y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 5y_2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

je nestabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (5.21) s počáteční podmínkou $y_1(t_0) = c_1, y_2(t_0) = c_2$ má řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} (4\,e^{t-t_0} - 3\,e^{2\,t-2\,t_0})\,c_1 + (6\,e^{2\,t-2\,t_0} - 6\,e^{t-t_0})\,c_2 \\ (-2\,e^{2\,t-2\,t_0} + 2\,e^{t-t_0})\,c_1 + (-3\,e^{t-t_0} + 4\,e^{2\,t-2\,t_0})\,c_2 \end{bmatrix}$$

Zvolme $\varepsilon = 1$, $t_0 = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme volit $\mathbf{y}_0 = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)^T$, $t_1 > -\ln\delta$ a dostaneme odhad

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_0, \mathbf{y}_0)\| = \|\mathbf{u}(t_1, 0, \mathbf{y}_0)\| = \left\| \begin{bmatrix} \delta(3e^{2t_1} - 2e^{t_1}) \\ \delta(2e^{2t_1} - e^{t_1}) \end{bmatrix} \right\| = \delta e^{2t_1} \left\| \begin{bmatrix} (3 - 2e^{-t_1}) \\ (2 - e^{-t_1}) \end{bmatrix} \right\| =$$
$$\delta \mathrm{e}^{2t_1} \cdot \|(1,1)\| = 2\delta \mathrm{e}^{t_1} = 2\delta \mathrm{e}^{t_1} > \delta \mathrm{e}^{-\ln\delta} = 2\delta \cdot \tfrac{2}{\delta} = 2 > \varepsilon\,.$$

Triviální řešení systému (5.21) je nestabilní. □

Definice 5.7. Řekneme, že triviální řešení systému $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ je **asymptoticky stabilní** (viz obrázek 5.5), jestliže

i) je stabilní

ii) existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{y}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$ a každé $t_0 > \alpha$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| = 0\,.$$

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.

Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,, \tag{5.22}$$

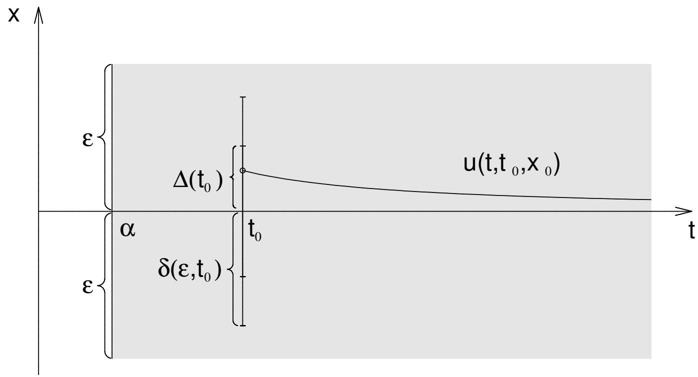
kde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Pak libovolné řešení $\mathbf{u}(t)$ systému (5.22) je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, právě když triviální řešení homogenního systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:



Obrázek 5.5: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

I) Všechna řešení jsou stabilní.

II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní.

Při vyšetřování stability nehomogenního systému (5.22) se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \tag{5.23}$$

Věta 5.8. *Triviální řešení systému (5.23) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \leq K\,, \quad t \in I\,,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (5.23).

(Tedy každé řešení systému je ohraničené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém (5.22) stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničná pro $t \to \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničenosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 5.9. *Triviální řešení systému (5.23) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \to 0 \quad \textit{pro } t \to \infty\,,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (5.23).

(Tedy všechna řešení systému (5.23) konvergují pro $t \to \infty$ k nule.)

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}\,, \tag{5.24}$$

kde $\mathbf{A}$ je konstatní reálná čtvercová matice typu (n, n).

V tomto případě je systém (5.24) speciálním případem autonomního systému $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Tedy stabilita triviálního řešení systému (5.24) je ekvivalentní s jeho stejnoměrnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému (5.24) je ekvivalentní se stejnoměrnou asymptotickou stabilitou.

Věta 5.10. *Nechť je dán systém (5.24). Jestliže všechna charakteristická čísla matice* $\mathbf{A}$ *mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice* $\mathbf{A}$ *s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka 5.11. O stabilitě lineárního systému (5.24) nelze rozhodnout pomocí věty 5.10 v případě, že žádné charakteristické číslo matice $\mathbf{A}$ nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí. V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. nestability, uvedené ve větě 5.10 jsou tedy postačující, nikoli nutné. Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující. Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$ mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému (5.24) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n ,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n , \quad n \geq 1,\ a_0 > 0,\ a_n \neq 0 \tag{5.25}$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu (5.25) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix} , \tag{5.26}$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (5.25) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (5.25) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j, $j = 0, \ldots, n$, kladné.

Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1 + 3j, 1 - 3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 5.12. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 2z + 3$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \\
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0\,.
\end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský.

Příklad 5.13. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 100z^4 + 580z^3 + 1281z^2 + 2206z + 4010$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 4010,\ a_1 = 2206,\ a_2 = 1281,\ a_3 = 580,\ a_4 = 100$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = 2206 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 \\ 580 & 1281 \end{vmatrix} = 1633862194 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 & 0 \\ 580 & 1281 & 2 \\ 0 & 100 & 580 \end{vmatrix} = -19659372000 < 0$$

Podmínky Hurwitzova kritéria nejsou splněny, takže polynom není hurwitzovský.

Příklad 5.14. Zjistěte pro jaká α je polynom

$$f(z) = z^4 + 8z^3 + 27z^2 + \alpha z + 50$$

hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 50,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = 27,\ a_3 = 8,\ a_4 = 1$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = \alpha > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 50 \\ 8 & 27 \end{vmatrix} = 27\alpha - 400 > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{400}{27} \doteq 14.81481481$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 50 & 0 \\ 8 & 27 & \alpha \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2216\alpha - \alpha^2 - 3200 = -(\alpha - 16)(\alpha - 200) > 0$$

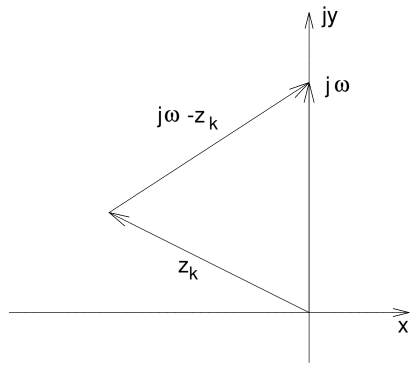
Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny pro $\alpha \in (16, 200)$, pro něž je polynom hurwitzovský.

Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom,který nemá kořeny ležící na imaginární ose, zapsán ve tvaru:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)\,. \tag{5.27}$$

Uvažujme pohyb bodu $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ po imaginární ose zdola nahoru. Z obrázku je zřejmé, že pro $\operatorname{Re} z_k < 0$ se argument rozdílu $z - z_k = j\omega - z_k$ (úhel, který svírá vektor s kladným směrem osy x) zvětší o hodnotu $+\pi$, neboť se mění z hodnoty $-\pi/2$ do hodnoty $3\pi/2$. Naopak pro bod $\operatorname{Re} z_k > 0$ tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor otočí o úhel π ve směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ se zmenší o hodnotu $-\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.



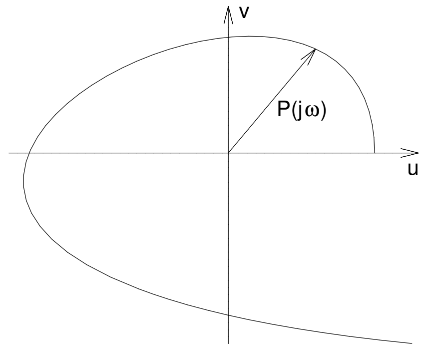
Po dosazení $z = j\omega$ do (5.27) dostáváme

$$P(j\omega) = a_n(j\omega)^n + \cdots + a_i(j\omega)^+ \cdots + a_0 = u(\omega) + j\, v(\omega)\,,$$

kde jsou polynomy $u(\omega)$ a $v(j\omega)$ definovány:

$$u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots \qquad v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \cdots\,.$$

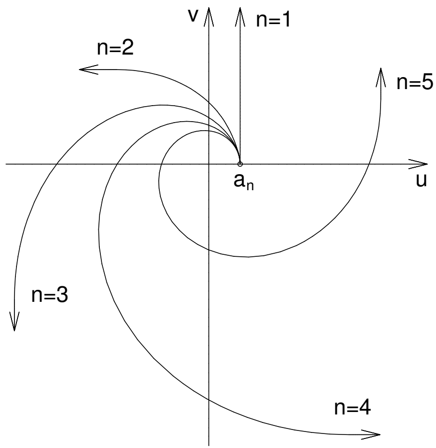
$P(j\omega)$ je komplexní funkcí reálné proměnné ω. Tak jsou v komplexní rovině definovány křivky. Tedy **hodograf** vektorové funkce $w = P(j\omega)$ skalárního argumentu ω nazýváme Michajlovova křivka. Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ a platí $\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi$, kde $P(z)$ má m značí počet kořenů s kladnou reálnou částí a $n-m$ kořenů se zápornou reálnou částí. elikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u, což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovovu křivku pouze pro $\omega \in \langle 0, \infty)$, přičemž úhel který proběhne argument křivky $w = P(j\omega)$ na intervalu $\omega \in \langle 0, \infty)$ je poloviční jako na intervalu $\omega \in (-\infty, \infty)$.



Protože víme, že řešení systému (5.22) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části,lze vyslovit následující kritérium stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom (5.27) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Úhel φ obvykle stanovíme z orientačního průběhu křivky, který stanovíme pomocí průsečíků této křivky se souřadnými osami u, v v rovině uv a stanovíme tak kolika kvadranty křivka prochází. To předpokládá nalezení kořenů polynomů $u(\omega)$, $v(\omega)$. To jsou ovšem polynomy, které po vhodné substituci $\omega^2 = t$ přejdou v polynomy s polovičním stupněm jako polynom původní. Na obrázku 5.6 jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.



Obrázek 5.6: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 5.15. Michajlovovým kritériem rozhodněte zda je zadaný polynom Hurwitzovský:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Řešení. Po dosazeni $x = j\omega$ do daného platí:

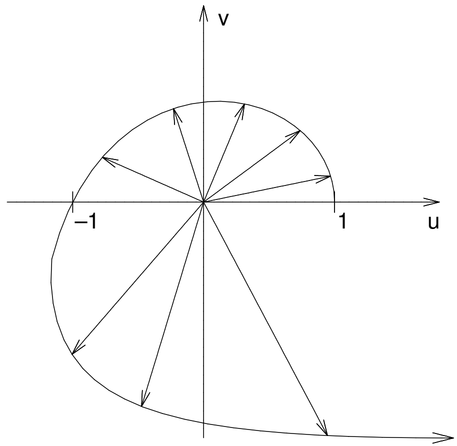
$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1\,, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega)\,. \end{aligned}$$

Pro kladné ω mají polynomy $u(\omega$ a $v(\omega)$ kořeny:

$$\begin{array}{lccl} u(\omega)=0 & \Leftrightarrow & \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 & \Rightarrow \ \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,, \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ v(\omega)=0 & \Leftrightarrow & 2\omega(1-\omega)(1+\omega) = 0 & \Rightarrow \ \omega_3 = 0\,, \omega_4 = 1\,. \end{array}$$

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω, a to vzestupně vzhledem k ω:

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	$+$
v	0	$+$	0	$-$	$-$



Obrázek 5.7: Michajlovova křivka k příkladu 5.16

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \to \infty$. Jelikož $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní. $\square$

Příklad 5.16. Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
x_3' &= x_4 \\
x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \,.
\end{aligned}
$$

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici z matice soustavy:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -\lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.
$$

Tento polynom je studován v předchozím příkladu, kde bylo ukázáno, že polynom je Hurwitzovký, dostáváme závěr, že zadaný systém je asymptoticky stabilní. $\square$

5.5 Rovinný autonomní diferenciální systém

Budeme diskutovat kvalitativní chování řešení systému rovnic

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{5.28}$$

s reálnou konstantní maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

v okolí bodu $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Připomeňme terminologii zavedenou v **??**. Rovina x_1x_2 je nazývána **fázovou rovinou.** Grafické znázornění ukazující kolmou projekci řešení do fázové roviny nazýváme **fázovým obrazem řešení** systému rovnic. Fázový obraz množiny všech řešení systému (5.28) nazýváme **fázovým obrazem systému.** Systém (5.28) může být zapsán (položíme-li $x_1 = x$, $x_2 = y$) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y, \tag{5.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y \tag{5.30}$$

a jeho fázový obraz bude diskutován v okolí rovnovážného bodu $(x, y) = (0, 0)$. Zapišme odpovídající charakteristickou rovnici

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj. rovnici

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{5.31}$$

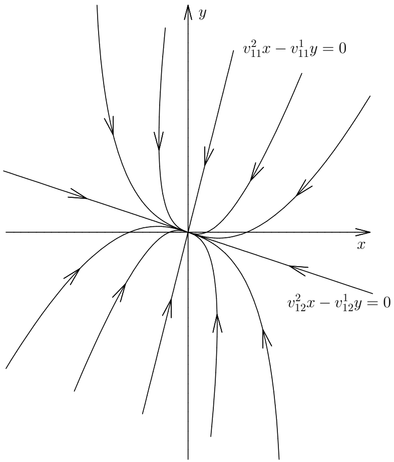
Přípustné tvary obecného řešení rovinného systému

- Případ reálných a různých kořenů $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Případ reálných a stejných kořenů $\lambda_1 = \lambda_2$
- Případ komplexních kořenů $\lambda_{1,2} = p \pm q \cdot i$

Fázové obrazy v závislosti na kořenech charakteristické rovnice

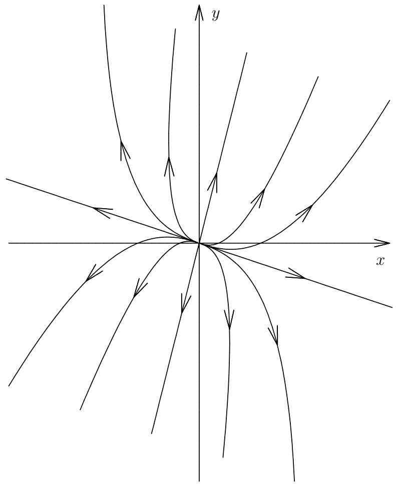
Nejdříve se zabývejme různými reálnými kořeny charakteristické rovnice a situaci popíšeme pouze pomocí obrázků s fázovým obrazem systémů

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 0$



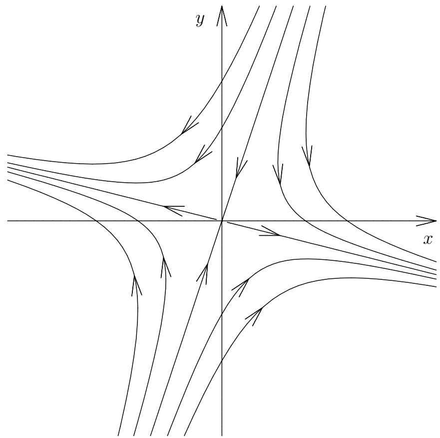
Stabilní uzel

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



Nestabilní uzel

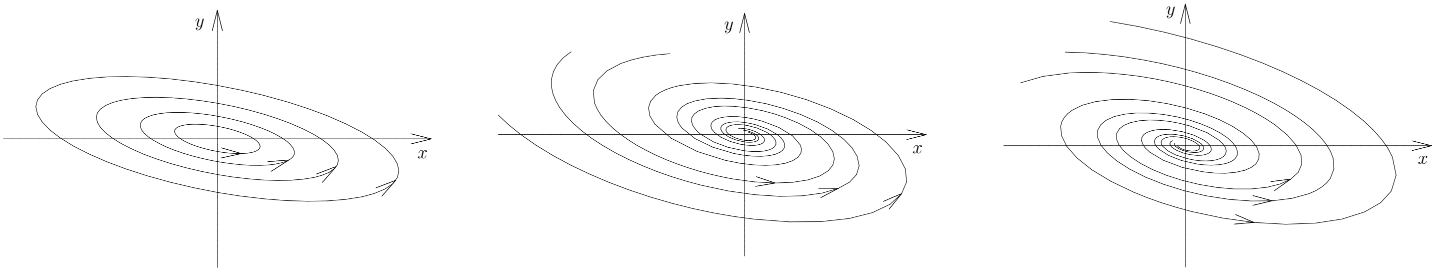
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



Sedlový bod

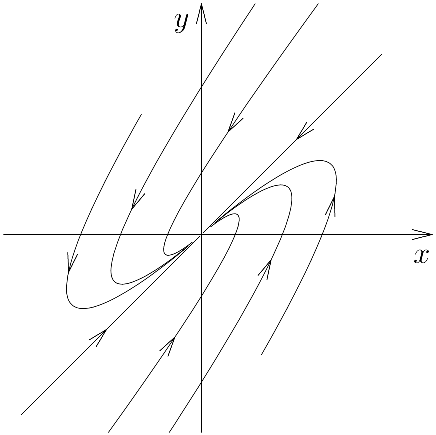
Dále se zabývejme komplexními kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Podobně jako u reálných kořenů budou reálné části kořenů komplexních rozhodovat o stabilitě a nestabilitě jednotlivých případů.

$\alpha = 0$ to jest $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$ $\qquad \alpha < 0 \qquad 0 < \alpha$

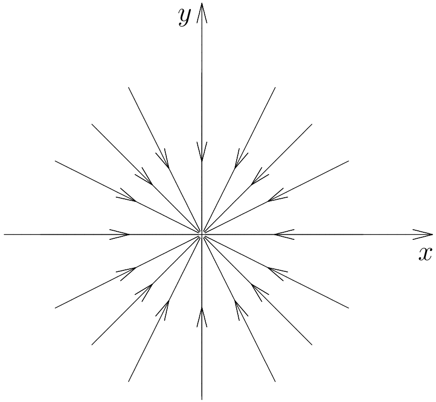


Střed $\qquad$ Stabilní ohnisko $\qquad$ Nestabilní ohnisko

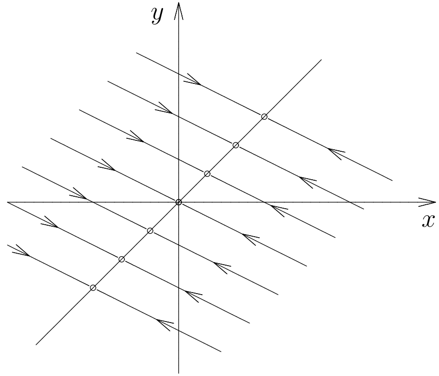
Dále zbývají případy násobných kořenů. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnici druhého řádu je tato možnost pouze pro kořeny reálné. O stabilitě nebo nestabilitě rozhoduje to zda jsou kořeny kladné nebo záporné. Navíc je potřeba uvážit algebraickou a geometrickou násobnost , proto nastávají možnosti s nevlastním uzlem nebo uzlem dikritickým. Poslední možností je jeden kořen nulový. Pro tyto možnosti ukážeme pouze obrázky stabilních variant.



Nevlastní uzel



Dikritický uzel



Nulový a záporný kořen

5.5.1 Řešené příklady

Příklad 24. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$
\begin{aligned}
x' &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, \\
y' &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y.
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním nevlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě je $\lambda_1 = -2 < \lambda_2 = -1$. Obecné řešení systému (5.32) je:

$$x = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t},$$
$$y = C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t}.$$

□

Příklad 25. Charakterizujte bod bod $(0,0)$ systému

$$x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \qquad (5.33)$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y.$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním vlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 1$. Obecné řešení systému (5.33) je

$$x = C_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 \mathrm{e}^{t},$$
$$y = C_1 \mathrm{e}^{2t} - C_2 \mathrm{e}^{t}.$$

□

Příklad 26. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x \end{aligned} \tag{5.34}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je sedlovým bodem. V tomto případě je $\lambda_1 = 1 > 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Obecné řešení systému(5.34) je:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= C_1 \mathrm{e}^t - C_2 \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

□

Příklad 27. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je středem. V tomto případě $\lambda_{1,2} = \pm i$. Obecné řešení systému (5.35) je

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned}$$

Fázovým portrétem řešení jsou kružnice, neboť platí $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 > 0$. □

Příklad 28. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním ohniskem. Kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení systému (5.36) je

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \mathrm{e}^t(-C_2 \cos t + C_1 \sin t). \end{aligned}$$

□

Příklad 29. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= x + 5y, \\ y' &= -x - 3y. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním ohniskem, protože $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Obecné řešení systému (5.37) je

$$\begin{aligned} x &= \phantom{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}((-2C_1 + C_2) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t). \end{aligned}$$

□

Příklad 30. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je dikritickým stabilním nevlastním uzlem. V tomto případě máme $\lambda_{1,2} = -1$. Obecné řešení systému (5.38) je:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= \alpha_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 31. Charakterizujte rovnovážný bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= x. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Řešení. V tomto případě je $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Jde o stabilní bod. Obecné řešení systému (5.39) má tvar

$$\begin{aligned} x &= \phantom{C_1 -{}} C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= C_1 - C_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 32. Charakterizujte rovnovážný bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= \ \ 3x + y, \\ y' &= -x + y. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je nestabilním nevlastním uzlem, neboť $\lambda_{1,2} = 2$. Obecné řešení systému (5.40) je

$$\begin{aligned} x &= (\ \ C_1 + C_2 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}, \\ y &= (-C_1 \qquad\ \ - C_2 t)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. $\square$

6 Počítačové cvičení č. 2

Numerické řešení PDR

Metoda konečných diferencí

Metoda konečných prvků (matlab)

6.1 Numerické řešení PDR

Nevýhodou analytického řešení je značná teoretická a technická náročnost a tedy skutečnost, že se nedá vždy použít. Existuje velmi široká třída rovnic, které neumíme analyticky řešit. Tehdy se používají jiné numerické metody řešení.

Cílem je seznámit se základními principy numerických metod řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tím je nahrazení analytického řešení této úlohy (funkce více proměnných) přibližnými hodnotami tohoto řešení ve vybraných obvykle předem daných bodech definičního oboru. Tyto body obvykle nazýváme uzly nějaké sítě. Samotné hodnoty v těchto bodech jsou obvykle řešením soustavy jiných rovnic než parciálních diferenciálních. Obvykle se jedná o soustavu lineární (v některých případech i nelineárních algebraických rovnic. Jejich sestavení závisí podstatným způsobem na volbě uzlů sítě.V dalším se omezíme pouze na parciální diferenciální rovnice, kde je řešením funkce dvou proměnných (x, y).

Dále se budeme zabývat pouze dvěmi možnosti stanovení sítě a sice na sítě obdélníkové, které mají strany rovnoběžné se souřadnými osami a v druhém případě půjde o síť tvořenou trojúhelníky. Další omezení je v řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Poznamenejme, že numerické metody je možné použít na nalezení jednoho konkrétního (partikulárního) řešení. Z této skutečnosti vyplývá také požadavek na určení tohoto řešení. To řešení bude určeno okrajovými podmínkami na hranici oblasti, ve které je hledáno. Tyto podmínky mohou být dány předepsáním funkčních hodnot nebo hodnot parciálních derivací tohoto řešení.

V závislosti na volbě sítě budeme hovořit o dvou metodách

- **Metoda konečných diferencí**, kdy jednotlivé parciální derivace nahrazujeme rozdíly funkčních hodnot řešení podobně jako v případě obyčejných diferenciální rovnic.
- **Metoda konečných prvků**, kdy je zvolená síť tvořena trojúhelníky.

6.2 Metoda konečných diferencí pro PDR

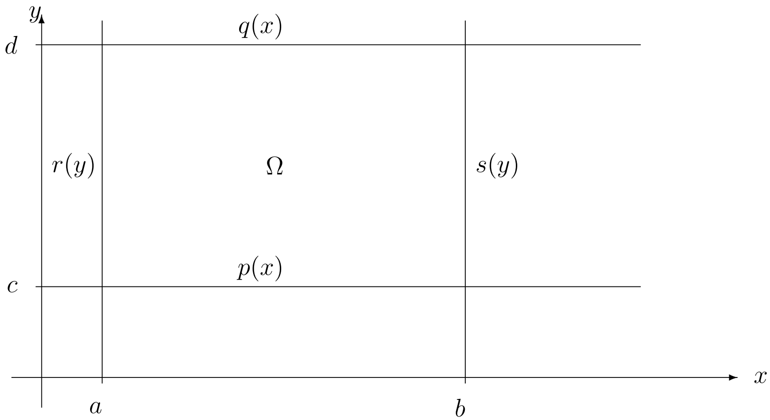
Uvažujme modelový případ: lineární parciální diferenciální rovnici 2. řádu eliptického typu:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma(x,y)u = f(x,y), \tag{6.1}$$

kde $u = u(x,y)$ je definována na oblasti $\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, a funkce $\sigma(x,y) \geq$ $\geq 0\ \forall x, y \in \Omega,\ \sigma, f$ jsou spojité na Ω.
Nechť je splněna tzv. Dirichletova okrajová podmínka na hranicích oblasti Ω:

$$\begin{aligned} u(x,c) = p(x), \quad u(x,d) = q(x), \qquad & a \leq x \leq b, \\ u(a,y) = r(y), \quad u(b,y) = s(y), \qquad & c \leq y \leq d, \\ p(a) = r(c),\ p(b) = s(c),\ q(a) = r(d),\ & q(b) = s(d). \end{aligned}$$

Poslední řádek nám zabezpečuje spojitost okrajových podmínek v „rozích“ oblasti Ω. Viz obrázek 6.1.



Obrázek 6.1: Metoda konečných diferencí

Vytvoříme síť na oblasti Ω (nejčastěji se používají čtvercové a nebo obdélníkové sítě).

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

$$y_j = c + jk, \quad j = 0, 1, \ldots, m, m+1, \quad k = \frac{d-c}{m+1}.$$

Uzly jsou pak body (x_i, y_j). Označme $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Jestliže předpokládáme spojitost $u(x, y)$, pak pro dostatečně malé h, k můžeme zanedbat chybové funkce. Potom dosazením do (6.1) dostáváme pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\frac{2u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{ij} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{k^2} + \sigma_{ij} u_{ij} = f_{ij}.$$

Pro pravidelné čtvercové sítě, t.j. $h = k$, se tato soustava dále zjednoduší na tvar

$$\left(4 + h^2 \sigma_{ij}\right) u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}. \tag{6.2}$$

Všimněte si, že matice soustavy je v obou případech pro $\sigma_{ij} \not\equiv 0$ diagonálně dominantní a proto můžeme použít i iterační metody řešení.

Analogický postup můžeme použít pro numerické řešení všech lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Postup řešení je vždy stejný: derivace nahradíme diferencemi a hledáme řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Pro další parciální derivace se používají aproximace:

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k},$$

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}.$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{2h2k}.$$

Problémy při řešení mohou vznikat, pokud oblast Ω není obdelníková.

6.2.1 Řešený příklad

Příklad 6.1. Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x,0) = x^3, \quad u(0,y) = 0, \quad u(x,y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω je vnitřní část čtvrtkruhu

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 10.$$

Řešení. Rovnici si upravíme na stejný tvar jako (6.1)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x.$$

Zvolme čtvercovou síť s krokem $h = 1$.Potom máme hraniční body

$$\begin{aligned} u(0,0) =& 0, u(1,0) = 1, u(2,0) = 8, u(3,0) = 27, \\ u(0,1) =& u(0,2) = u(0,3) = 0, \\ u(1,3) =& 40, u(3,1) = 60. \end{aligned}$$

Ještě potřebujeme znát hodnotu v bodě $P_{2,2}$. Protože je

$$Q = (2.449; 2),\ \varphi(Q) = 73.485,\ \delta = 0.449,$$

lineární interpolací dostaneme

$$u_{2,2} = \frac{1 \cdot 73.485 + 0.449 \cdot u_{1,2}}{1 + 0.449} = 50.697 + 0.310 u_{1,2}.$$

Nyní pro 3 vnitřní uzly sestavíme síťové rovnice podle (6.2), přitom hraniční uzly jsou podtrženy.

$$4u_{1,1} - \underline{u_{0,1}} - u_{2,1} - \underline{u_{1,0}} - u_{1,2} = -8,$$

$$4u_{1,2} - u_{1,1} - \underline{u_{1,3}} - \underline{u_{0,2}} - \underline{u_{2,2}} = -8,$$

$$4u_{2,1} - u_{1,1} - \underline{u_{3,1}} - \underline{u_{2,0}} - \underline{u_{2,2}} = -16$$

a pak přidáním odvozeného vztahu pro $u_{2,2}$ dostaneme soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých. Po úpravě

$$
\begin{aligned}
u_{1,1} &= \frac{1}{4}(0 + u_{2,1} + 1 + u_{1,2}) - \frac{1}{4}8,\\
u_{2,1} &= \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 60 + 8) - \frac{1}{4}16,\\
u_{1,2} &= \frac{1}{4}(0 + 40 + u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{4}8,\\
u_{2,2} &= 50.697 + 0.310u_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Jejím řešením je pak

$$
\begin{aligned}
u_{1,1} &= 12.384,\\
u_{2,1} &= 30.768,\\
u_{1,2} &= 25.768,\\
u_{2,2} &= 58.688.
\end{aligned}
$$

Další postup je pak obvyklý, t.j. zmenšíme krok a opakujeme výpočet až se nám odchylky v uzlových bodech ustálí. □

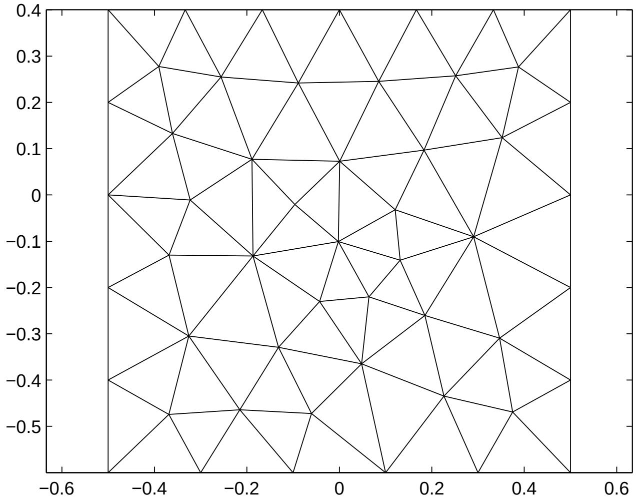
6.3 Metoda konečných prvků pro PDR - řešení pomocí Matlabu

Cílem je bez bližšího vysvětlení metody ilustrovat řešení parciální diferenciální rovnice numericky užitím programu Matlab, který má v rámci připravené knihovny rozpracovanou konečných diferencí, ale metodu konečných prvků, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic.

6.3.1 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP, anglicky FEM – „finite element method“) má základní přístup podobný jako metoda konečných diferencí (MKD). Opět hledáme řešení parciální diferenciální rovnice na zadané oblasti Ω. Matlab umožňuje řešit parciální diferenciální rovnice druhého řádu na rovinných oblastech (tj. hledaná funkce u závisí na prostorových proměnných x a y a případně na čase t), ale obecně lze metodou konečných prvků řešit i rovnice vyššího než druhého řádu a ve vyšších dimenzích než v rovině (ovšem už v třírozměrném prostoru se problém technicky velmi zkomplikuje). Všude dál v této kapitole budeme uvažovat pouze rovinné oblasti.

Stejně jako u metody konečných diferencí oblast Ω pokryjeme sítí. Tentolrít se však v základní verzi metody konečných prvků používají trojúhelníkové sítě, viz obrázek 6.2. Říkáme, že **oblast Ω ztriangulujeme**. Na obrázku vidíme, že síť nemusí být nikterak pravidelná. Je však vhodné, aby pro jednotlivé trojúhelníky nebyly jejich vnitřní úhly nebyly příliš malé.

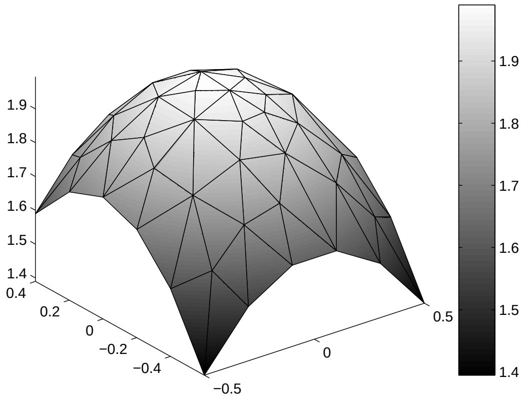


Obrázek 6.2: Triangulovaná oblast Ω

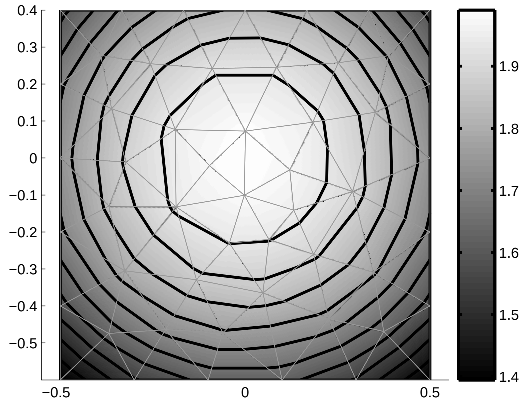
Výhodou trojúhelníkových sítí (oproti obdélníkovým, které se používají u MKD) je to, že mohou dobře vystihnout i velmi složité oblasti. Tím odpadají problémy s realizací okrajových podmínek.

Další analogie s metodou konečných diferencí je v tom, že **původní parciální diferenciální rovnici převedeme na soustavu algebraických rovnic** (lineárních či nelineárních, dle povahy původní úlohy) s neznámými $u_1, u_2, \dots, u_n$, kde u_i je přibližná hodnota řešení v i-tém uzlu sítě a n je počet uzlů. Postup, jakým je tato soustava tzv. diskretizačních rovnic získána, je však zcela odlišný a daleko komplikovanější než u MKD a nebude zde popisán. Soustavu diskretizačních rovnic vyřešíme – tím získáme hodnoty řešení v uzlových bodech – a za přibližné řešení rovnice na celé oblasti Ω bereme plochu, která uvnitř jednotlivých trojúhelníků nahrazuje řešení kouskem roviny, která prochází funkčními hodnotami ve vrcholech tohoto trojúhelníka. To, že získáme řešení na celé oblasti, a nikoli jen v uzlech sítě, je další výhodou metody konečných prvků oproti MKD.

Pro ilustraci slouží obrázek 6.3, na kterém vidíme přibližné řešení rovnice $-\Delta u = 4$ na oblasti Ω z obrázku 6.2 s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ na $\partial\Omega$. Snadno bychom ověřili, že přesným řešením této rovnice s touto okrajovou podmínkou je funkce $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Grafem řešení tedy je rotační paraboloid. Vidíme, že přibližné řešení nalezené metodou konečných prvků tvarem paraboloidu vcelku odpovídá, pro přesnější srovnání bychom museli porovnat příslušné numerické hodnoty. Prostorový graf nemusí být ovšem zrovna nejpřehlednější, řešení se proto častěji znázorňuje pomocí vrstevnic, viz obrázek 6.4.



Obrázek 6.3: Graf přibližného řešení



Obrázek 6.4: Přibližné řešení téže rovnice znázorněné pomocí vrstevnic

6.4 Příklad řešený pomocí Matlabu

Poznámka 6.2. V dalším textu budeme do češtiny míchat různá anglická slova a zacházet s nimi jako s českými. Toto se popisu počítačových programů užívá a je tento přístup vhodnější než důsledný překlad do češtiny.

V Matlabu je pro řešení parciální diferenciální rovnice nainstalovaný tzv. PDE Toolbox (PDE = „partial differential equations“). Nejpohodlnější je pracovat s grafickým uživatelským rozhraním (GUI). Ukážeme zde řešení jednoho příkladu právě v tomto prostředí.

Příklad 6.3. Pomocí Matlabu řešte metodou konečných prvků okrajovou úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x \quad \text{na } \Omega, \tag{6.3}$$

kde oblast Ω je čtvrtina kruhu se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem 3, která leží v prvním kvadrantu:

$$\Omega = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\},$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

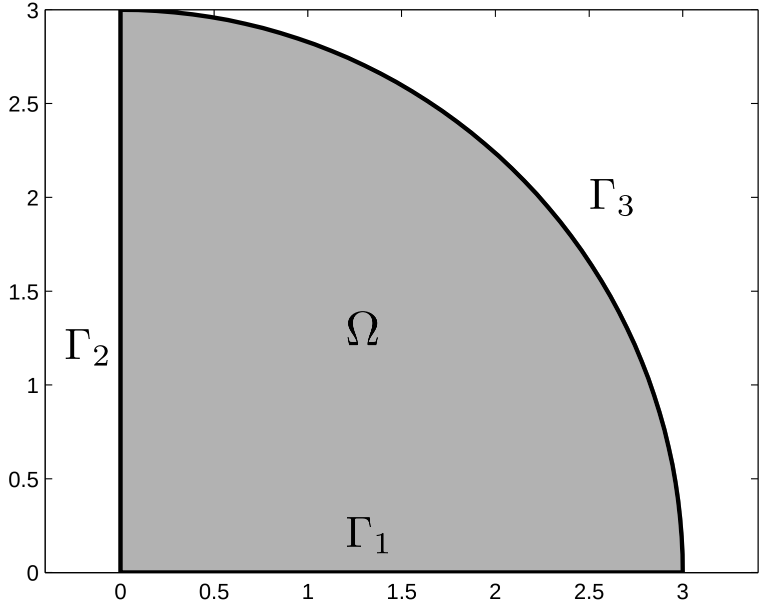
$$\begin{array}{rcll} u(x,y) & = & x^3 & \text{na } \Gamma_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, y = 0\}, \\ u(x,y) & = & 0 & \text{na } \Gamma_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 \leq y \leq 3\}, \\ u(x,y) & = & 9x(y+1) & \text{na } \Gamma_3 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}. \end{array} \tag{6.4}$$

Oblast Ω s vyznačenými částmi hranice Γ_1, Γ_2 a Γ_3 vidíme na obrázku 6.5.

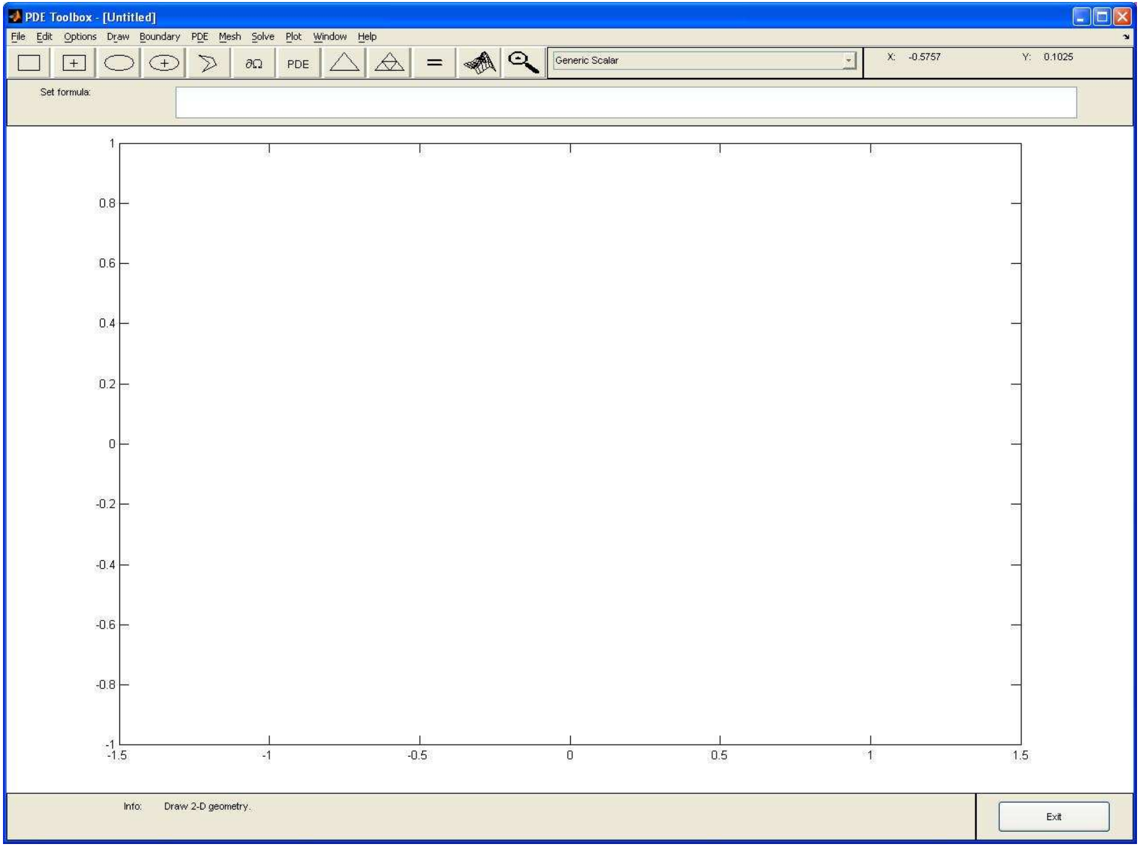
Řešení. Spustíme Matlab. Do příkazového okna napíšeme příkaz k otevření prostředí pro řešení parciálních diferenciálních rovnic:

```
>> pdetool
```

Otevře se následující okno



Obrázek 6.5: K příkladu 6.3: Oblast Ω a její hranice, rozdělená na tři části


PDE Toolbox - [Untitled]
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
PDE
Generic Scalar
X: -0.5757
Y: 0.1025
Set formula:
Info: Draw 2-D geometry.
Exit

Řešení příkladu v tomto prostředí popíšeme krok za krokem. Každá akce, kterou je třeba provést, bude označena symbolem •.

Zadání oblasti Ω

Oblast, na které řešíme parciální diferenciální rovnici, můžeme zadat interaktivně. Na bílou plochu uprostřed můžeme umisťovat různé geometrické obrazce (obdélníky, kruhy, elipsy a polygony) a pak z nich pomocí množinových operací (sjednocení, průniku a rozdílu) sestavit požadovanou oblast. Naši oblast (čtvrtkruh) dostaneme jako průnik kruhu se středem v počátku a poloměrem 3 a čtverce, který má levý dolní vrchol v počátku a stranu o délce 3 (případně cokoli většího než 3).

Rozmezí os na ploše neodpovídá našim potřebám, a proto je musíme změnit:

• V menu v položce **Options** vybereme **Axis Limits...** a nastavíme správné rozmezí - pro náš příklad můžeme zadat pro obě osy např. meze -1 až 4.

Dále nastavíme, aby se ukazovala mřížka a aby se body, které budeme za chvíli klikáním zadávat (vrcholy čtverce a pod.) k mřížce přichytávaly.

• V **Options** klikneme na položku **Grid**.

• V **Options** klikneme na položku **Snap** („snap to grid“ = „přilnout k mřížce“).

Nyní zadáme kruh:

• Klikneme na tlačítko se symbolem $\oplus$. Tím budeme zadávat elipsu, s tím, že první bod, na který klikneme, je jejím středem.

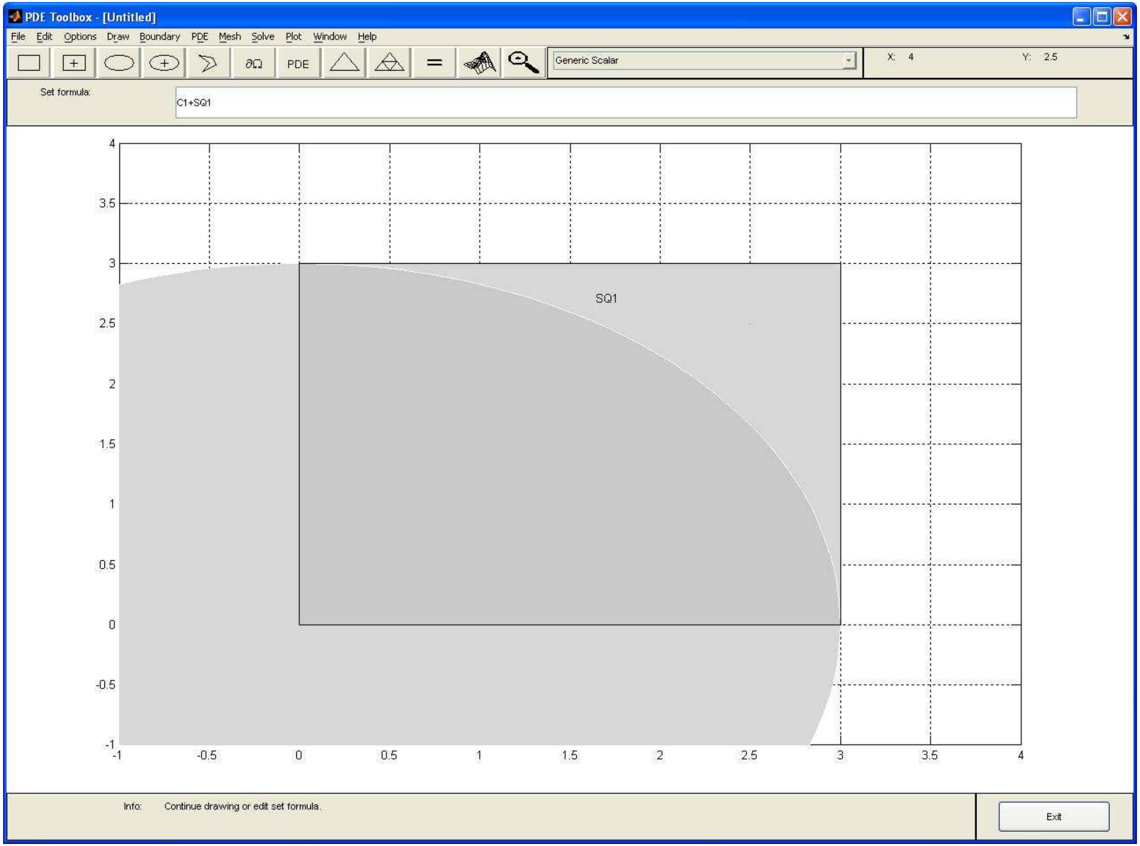
• Najedeme myší na bod $(0, 0)$, stiskneme tlačítko myši (díky tomu, že jsme zvolili „snap to grid“, se nemusíme trefit úplně přesně) a táhneme - objeví se obrys elipsy. Táhneme, až elipsu (v našem případě vlastně kruh) natáhneme do požadovaných rozměrů.

Podobným způsobem zadáme čtverec:

• Klikneme na tlačítko se symbolem $\square$. Tím budeme zadávat obdélník.

• Opět najedeme na bod $(0, 0)$ (levý dolní roh čtverce) a dotáhneme kurzor do bodu $(3, 3)$ (pravý horní roh).

Výsledek by měl vypadat nějak takto:


PDE Toolbox - [Untitled]
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
PDE
Generic Scalar
X: 4
Y: 2.5
Set formula:
C1+SQ1
SQ1
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Info:
Continue drawing or edit set formula.
Exit

Kdybychom některý z objektů zadali jinak, než jsme chtěli, můžeme jej vcelku snadno opravit: Nejprve na požadovaný objekt klikneme a tím jej vybereme pro další úpravy (aktuálně vybraný objekt má černě zvýrazněnou hranici). Je-li nevhodně umístěn, ale velikost má přitom správnou, můžeme jej pomocí myši přetáhnout na jiné místo. Chceme-li změnit velikost, stačí, když na vybraný objekt „doubleklikneme" (Jak je tohle správně česky? Poklepneme? Dvojklikneme?). Otevře se dialog, ve kterém můžeme změnit rozměry, umístění i název. Pokud jsme to zkazili úplně, můžeme vybraný objekt stisknutím klávesy Delete odstranit a začít znovu.

Zatím jsme jen zadali kruh a čtverec, ale nijak jsme počítači nesdělili, že nás zajímá jejich průnik. To provedeme nyní. Podíváme se na políčko nadepsané **Set formula**. Do tohoto políčka zadáváme množinový vzorec („set" má kromě mnoha jiných i význam „množina", „formula" snad překládat netřeba), pomocí něhož je z jednotlivých zadaných oblastí sestavena oblast výsledná. Můžeme používat operátory $+$ (sjednocení), $*$ (průnik) a $-$ (množinový rozdíl). Při našem zadávání kruhu a čtverce se v poli Set formula automaticky objevil text C1+SQ1. Kdybychom to tak nechali, za oblast Ω by se vzalo sjednocení oblastí C1 (C jako „circle" = kruh) a SQ1 (SQ jako „square" - čtverec). My ale potřebujeme průnik, a proto

• změníme text v editačním poli **Set formula** na C1*****SQ1. Navenek nepoznáme žádnou změnu, obrázek bude vypadat pořád stejně.

Nyní nastal vhodný okamžik pro uložení výdobytků naší práce.

• Uložíme rozpracovanou úlohu např. jako soubor priklad1.m (klasicky: v menu **File**, **Save as...**).

Můžeme se do uloženého souboru podívat, např. v editoru Matlabu nebo třeba v Poznámkovém bloku, jak kdo chce. Uvidíme, že Matlab automaticky vytvořil poměrně dlouhý soubor, v němž většině věcí nerozumíme, a proto do něj nebudeme vrtat.

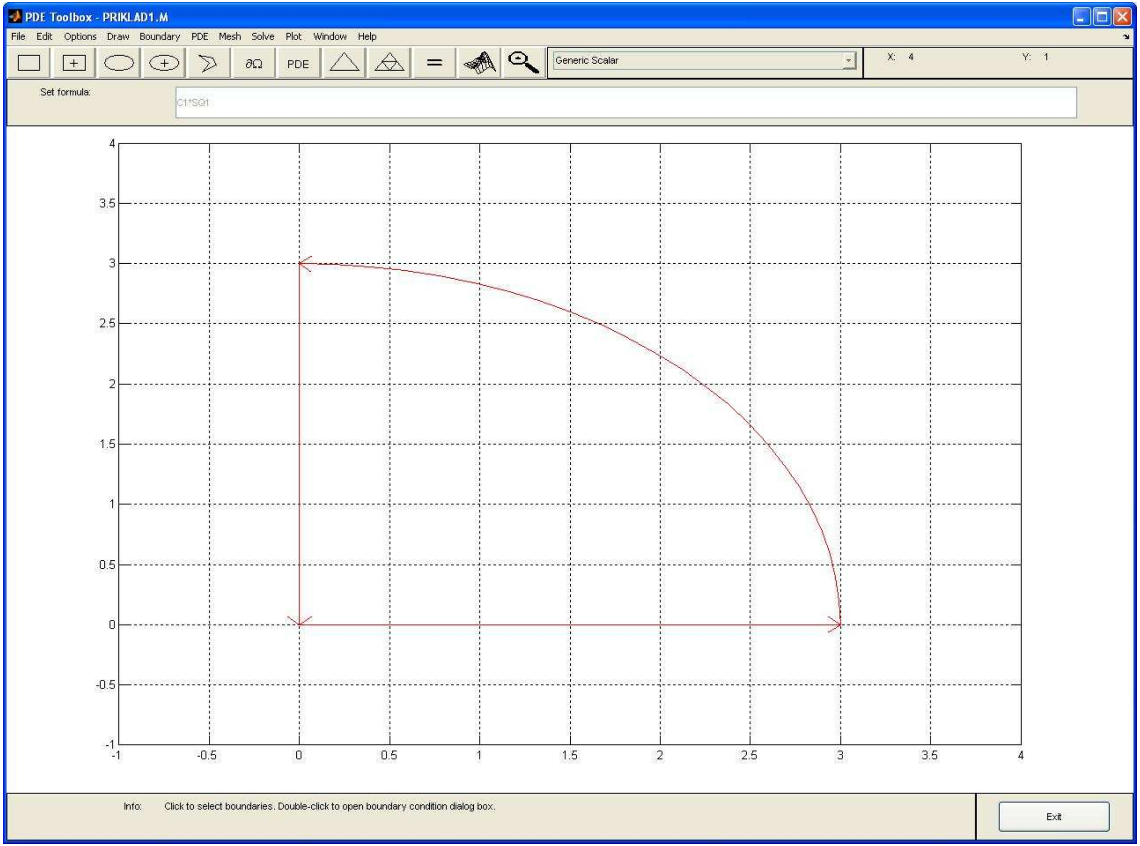
Při další práci je vhodné čas od času úlohu opět uložit, dále již to zdůrazňovat nebudeme.

Zadání okrajových podmínek

Pokračujeme zadáním okrajových podmínek. Nejprve si necháme zobrazit hranici oblasti.

- Klikneme na tlačítko se symbolem $\partial\Omega$. (Jiná možnost: v menu **Boundary**, pak **Boundary Mode**.)

Ukáže se nám hranice oblasti:


PDE Toolbox - PRIKLAD1.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
PDE
Generic Scalar
X: 4
Y: 1
Set formula:
C1*SQ1
Info: Click to select boundaries. Double-click to open boundary condition dialog box.
Exit

Postupně zadáme okrajové podmínky podle předpisů (6.4). Nejprve zadáme podmínku na vodorovné části hranice Γ_1 (viz též obrázek 6.5).

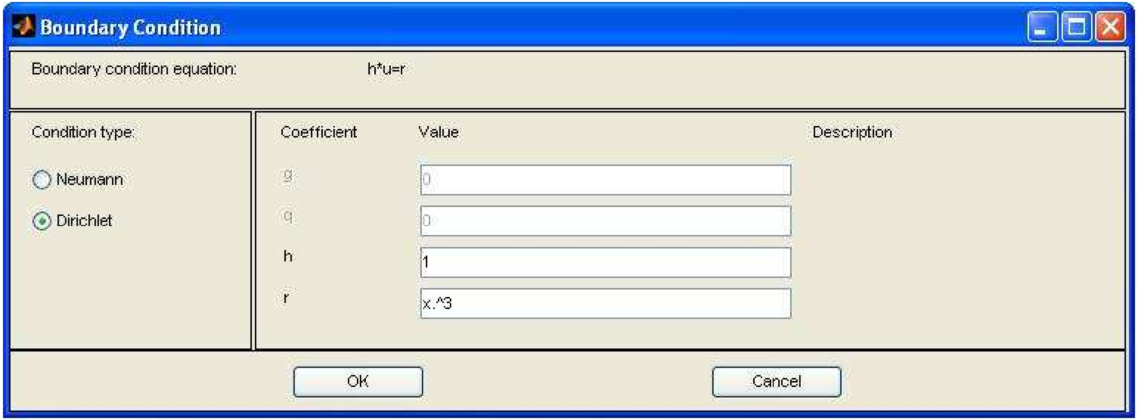
• Doubleklikneme na vodorovnou část hranice. Otevře se dialog pro zadávání okrajové podmínky. Jiná možnost: Na příslušnou část hranice klikneme (jednou). Tím bude tato část hranice vybrána pro další práci. Pak vybereme v menu **Boundary** a **Specify Boundary Conditions...**

V dialogu nyní zadáme okrajovou podmínku $u(x, y) = x^3$. V Matlabu lze zadávat dva základní druhy okrajových podmínek, Dirichletovy (je přímo zadáno, čemu se má řešení na hranici rovnat) a Neumannovy (které obsahují též derivaci řešení ve směru normály k hranici). Naše okrajové podmínky jsou Dirichletova typu.

• V dialogu proto vybereme (či spíš necháme nastaveno) **Condition type** na **Dirichlet**.

Matlab očekává nyní podmínku ve tvaru (viz horní část dialogu) $h \cdot u = r$, kde h a r jsou zadané funkce, případně konstanty. Pro naši podmínku $u(x, y) = x^3$ je $h = 1$ a $r(x, y) = x^3$.

• V dialogu vyplníme kolonku pro funkci r výrazem `x.^3`. (Funkce h je na jedničku nastavená automaticky.) Vyplněný dialog by měl vypadat takto:



Podobným způsobem zadáme okrajové podmínky na ostatních částech hranice:

• Doubleklikneme na svislou část hranice. V dialogu zkontrolujeme, zda je zatržen Dirichletův typ okrajových podmínek a vyplníme kolonku pro funkci r výrazem `0`.

• Totéž provedeme pro obloukovou část hranice, tentokrát zadáme `9*x.*(y+1)`.

Zadání rovnice

Nyní zadáme samotnou parciální diferenciální rovnici, kterou chceme vyřešit.

• Klikneme na tlačítko **PDE** nebo v menu vybereme **PDE** a pak **PDE Specification...**

Otevře se dialog pro zadání rovnice. V levé části dialogu vybíráme typ rovnice - na výběr máme rovnici eliptickou, parabolickou, hyperbolickou a problém vlastních čísel. Naše rovnice (6.3) je typu eliptického, proto

- vybereme (případně jen zkontrolujeme, zda je vybrán) z možností pro **Type of PDE** typ **Elliptic**.

Rovnice je nyní očekávána (viz horní část dialogu) ve tvaru

$$-\operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad} u) + au = f \tag{6.5}$$

a po nás se chce, abychom doplnili funkce c, a a f. Doufáme, že tvarem (6.5) nejste příliš zaskočeni, pro jistotu však připomeňme, že je-li f funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak gradient funkce f je

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak divergence zobrazení $g = (g_1, \ldots, g_n)$ je

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}.$$

Též si snad pamatujete, že

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f.$$

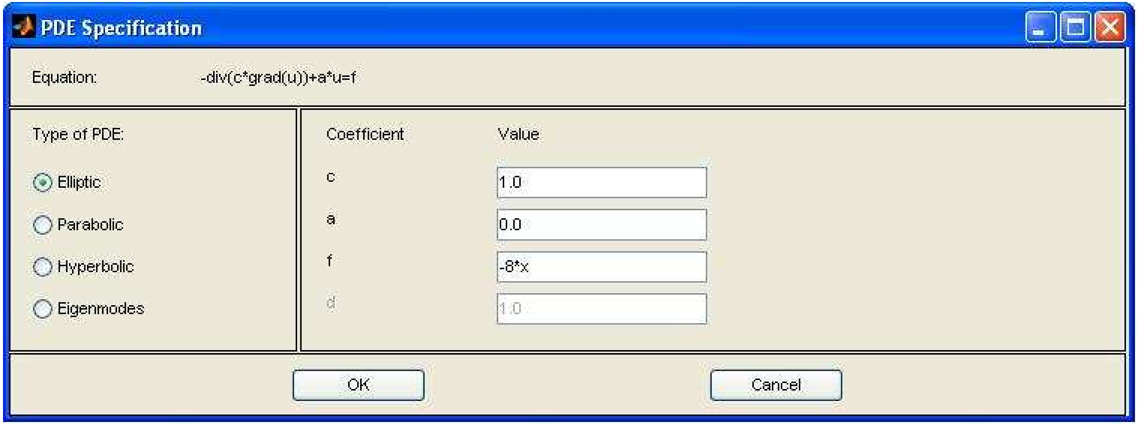
Řešená rovnice (6.3), tj. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x$, po snadné úpravě $-\Delta u = -8x$, se tedy do tvaru (6.5) přepíše jako

$$-\mathrm{div}(1 \cdot \mathrm{grad}\, u) + 0 \cdot u = -8x.$$

Proto dialog pro zadání rovnice doplníme takto (některé z uvedených hodnot už tam možná jsou „samy od sebe“, pak je pochopitelně necháme být):

• Do kolonky pro funkci c doplníme konstantu `1`, do kolonky pro a napíšeme nulu a do kolonky pro f napíšeme `-8*x`.

Celá věc by pak měla vypadat následovně:



Triangulace oblasti
Oblast Ω ztriangulujeme:

• Klikněte na tlačítko s trojúhelníkem nebo v menu vyberte **Mesh** a pak **Initialize Mesh**

Chceme-li mít sít jemnější, můžeme

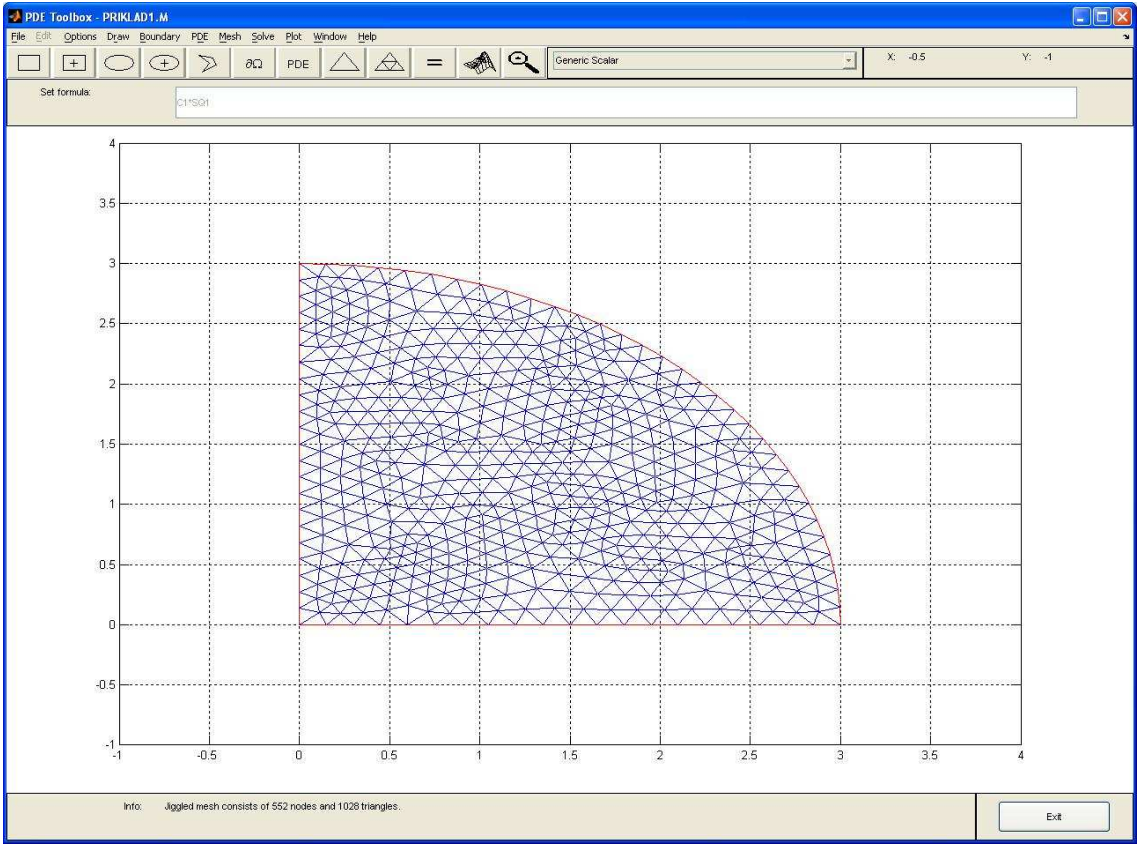
• kliknout na tlačítko s trojúhelníkem rozděleným na čtyři menší trojúhelníky nebo v menu vybrat **Mesh** a pak **Refine Mesh**.

Zjemněnou síť pak můžeme ještě poněkud vylepšit (zpravidelnit, odstranit z ní některé úzké trojúhelníky) pomocí funkce Jiggle. (Původní význam slova „jiggle“ je „pohupovat“ či „trhaně se pohybovat“, v souvislosti se sítí se tím myslí zhruba to, že uzly sítě se trošku popřemisťují, každý uzel se přesune do průměru svých sousedů.)

• Můžeme v menu vybrat **Mesh** a pak **Jiggle Mesh** - tuto operaci můžeme provádět i opakovaně.

Pokud se nám to, co se se sítí děje, nelíbí, můžeme úpravy brát zpět pomocí menu: Mesh, pak Undo Mesh Change. První návrh sítě můžeme ovlivnit pomocí nastavení parametrů (v menu Mesh, Parameters…). Zde můžeme např. nastavit maximální povolenou délku hrany (maximum edge size).

Jestliže jsme zjemnění a „jigglování“ provedli právě jednou, měli bychom mít na obrazovce toto:


PDE Toolbox - PRIKLAD1.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
PDE
Generic Scalar
X: -0.5
Y: -1
Set formula:
C1*SQ1
Info: Jiggled mesh consists of 552 nodes and 1028 triangles.
Exit

Síť můžeme exportovat pro její případné další použití: v menu Mesh, pak Export Mesh.... Síť bude uložena pomocí tří matic, jejichž jména si můžeme vybrat. Matlab nám nabízí jména `p`, `e` a `t`. První matice bude obsahovat informace o uzlech sítě (points), druhá o hranách (edges) a třetí o trojúhelnících (triangles). S těmito maticemi pak v Matlabu můžeme dále pracovat dle potřeby, např. si jejich prvky můžeme nechat vypsat do souboru, který pak můžeme přenést a používat v jiném programu.

Řešení rovnice a jeho grafické znázornění

Teď když máme všechno připravené, můžeme konečně najít přibližné řešení rovnice.

- Klikneme na tlačítko s rovnítkem nebo v menu vybereme **Solve**, pak **Solve PDE**.

Řešení bude asi chvilku trvat (je nutno ne zcela jednoduchým způsobem sestavit a pak vyřešit systém zhruba 500 rovnic o 500 neznámých – pokud pracujeme se sítí, která je na předchozím obrázku). Až je počítač hotov, řešení se zobrazí pomocí dvourozměrného obrázku – hodnoty řešení na oblasti Ω jsou rozlišeny pomocí barev, vpravo máme zobrazenu stupnici (angl. colorbar), pomocí níž poznáme, jaká barva odpovídá jaké hodnotě řešení.

Chceme-li řešení exportovat pro další použití, uděláme to přes menu: Solve, pak Export Solution.... Řešení je uloženo ve formě vektoru (jméno si můžeme vybrat, automaticky se nabízí `u`), jehož složky jsou hodnoty řešení v jednotlivých uzlech sítě. Chceme-li s tímto řešením dále pracovat, případně je (přes soubor) přenést do nějakého jiného programu, musíme k němu samozřejmě mít i příslušnou síť, hlavně její uzly, jinak je zcela bezcenné.

Parametry zobrazení řešení můžeme měnit. Formulář pro nastavení parametrů se nám zobrazí po stisknutí tlačítka s 3-D grafem, případně se k němu dostaneme z menu: Plot, Parameters... Zde již necháme každému čtenáři prostor pro experimentování. □

Cvičení

1. Pomocí Matlabu najděte přibližné řešení úlohy

$$-\Delta u = 5\sin\left(10\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right) \quad \text{na } \Omega,$$

   kde Ω je část mezikruží o poloměrech $r = 1$, $R = 3$, která leží v prvním kvadrantu,

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\},$$

   s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}, \\ u(x,y) &= 5 \quad \text{na } \Gamma_2 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}, \\ \vec{n} \cdot \mathrm{grad}\, u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_3 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, y = 0\} \text{ a } \Gamma_4 = \{(x,y) : x = 0, 1 \leq y \leq 3\}. \end{aligned}$$

Výsledky

1. Spíše několik poznámek a tipů:
   Pozor na okrajovou podmínku zadanou na Γ_3 a Γ_4. Symbolem $\cdot$ se zde nemyslí obyčejné násobení, ale skalární součin. Podmínka mohla být též zapsána jako $\partial u/\partial \vec{n} = 0$. Jedná se o homogenní Neumannovu okrajovou podmínku, které se též říká podmínka kolmosti. Až budete mít řešení, nechte si zobrazit vrstevnice (contours) a pokuste se odhadnout, proč se v souvislosti s touto podmínkou zmiňuje zrovna kolmost.
   Při zadávání této podmínky si můžete všimnout, že v Matlabu bude očekáván tvar `n*c*grad(u)+qu=g`. Písmenem `n` se myslí normála $\vec{n}$, takže nezadáváme nic. Funkce c je tatáž jako v rovnici (viz (6.5)) a zadáme ji (nebo spíš necháme nastavenou na 1) až při zadávání rovnice. Jediné, co musíme zadat přímo zde, jsou funkce q a g.
   Pravá strana rovnice je poněkud komplikovaná, ale není to ze zlomyslnosti, spíš k tomu vedla snaha o to, aby výsledný obrázek byl zajímavější než u řešeného příkladu. Pozor na správný zápis operátorů - nezapomeňte na patřičné místo napsat tečku. Funkce arctg se v Matlabu zadává jako `atan`, ne třeba arctan! Z toho, že zlomek y/x na části hranice oblasti Ω není definován, si nemusíte dělat hlavu - Matlab si s tím poradí, zvlášť, když se tento zlomek dále dosazuje do funkce arctg.

7 Tutoriál č. 5

Úvod do parciálních diferenciálních rovnic

Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

7.1 Parciální diferenciální rovnice

Definice 7.1. Parciální diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou funkci více proměnných a její parciální derivace.

Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem dané rovnice.

Řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která je definovaná v zadané oblasti, včetně svých parciálních derivací, až do řádu rovnice včetně, a vyhovuje dané rovnici v zadané oblasti.

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice k-tého řádu ve které je hledaná funkce u funkcí n nezávislých proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, je

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Příklad 7.2. Hledejme funkci u, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{7.2}$$

Máme tedy parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = 2x + y$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

v každém bodě roviny Oxy. Obecněji je možné ukázat, že pro libovolnou diferencovatelnou funkci f jedné proměnné je funkce

$$u(x,y) = f(2x+y),$$

také řešením uvedené rovnice. Všimněme si, že tato řešení jsou z geometrického hlediska plochami v prostoru (x,y,z). Lehce si také ověříme, že řešením bude i každá funkce

$$u(x,y,z) = f(2x+y) + g(z),$$

kde g je libovolná funkce proměnné z.

Z uvedeného příkladu plyne jeden podstatný rozdíl mezi parciálními rovnicemi a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Ze zápisu obyčejné diferenciální rovnice, například $y' = x + y$, okamžitě poznáme, že hledaná funkce y závisí pouze na x. Ze zápisu parciální rovnice (7.2) nepoznáme na kolika proměnných závisí řešení. Víme, že hledaná funkce u závisí na proměnných x, y, ale nevíme, zda se jedná o všechny nezávislé proměnné na kterých řešení závisí, tedy zda jde o funkci dvou, tří či více proměnných. Dohodněme se proto hned na místě úmluvu, že řešení dané parciální rovnice budeme hledat pouze mezi funkcemi těch proměnných, které se přímo v rovnici vyskytují.

Druhým novým faktorem je, že množina řešení závisí na libovolné neznámé funkci a nikoli na tzv. integračních konstantách.

7.1.1 Základní problémy řešení parciálních diferenciálních rovnic

Podobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic máme i u parciálních rovnic dva základní problémy

1. Najít obecné řešení dané parciální rovnice, tj. najít všechna její řešení.

2. Najít takové řešení dané parciální rovnice, které vyhovuje některým doplňujícím podmínkám.

Nyní se budeme zabývat parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu.

7.1.2 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 7.3. Rovnici

$$f\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{7.3}$$

nazýváme *parciální diferenciální rovnicí prvního řádu*, kde funkce $f(x, y, u, p, q)$ je definovaná na otevřené množině D proměnných x, y, u, p, q.

Definice 7.4. *Řešením* rovnice (7.3) v oblasti G proměnných x, y nazveme každou takovou funkci u, definovanou a spojitou v G, pro kterou platí:

1. Funkce u má v oblasti G spojité parciální derivace prvního řádu.

2. Pro každé $(x, y) \in G$ platí, že $\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \in D$.

3. Funkce $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ splňují rovnici (7.3).

Formulace počáteční úlohy, pojem jejího řešení.

Definice 7.5. Cauchyovou úlohou pro rovnici (7.3) rozumíme dvojici: rovnici

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{7.4}$$

a počáteční křivku Θ zadanou parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a, b). \tag{7.5}$$

Funkci $z = h(x, y)$, která má spojité parciální derivace v G, nazveme řešením Cauchyovy úlohy (7.4), (7.5), jestliže funkce h splňuje v G rovnici (7.4) a pro všechna $t \in (a, b)$ křivka $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ leží v G a navíc platí $\chi(t) = h(\varphi(t), \psi(t))$.

O křivce Θ budeme všude dále předpokládat, že je hladká a jednoduchá.

7.1.3 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu

Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0$.

Řešením rovnice je libovolná funkce závisející pouze na proměnné y

$$z(x,y) = H(y). \tag{7.6}$$

Což je rovnici válcové plochy tvořené přímkami rovnoběžnými s x-ovou souřadnicovou osou. Z toho plyne omezení na volbu křivky nemůže být rovnoběžná s osou x u počáteční Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici. Nechť je křivka Θ zadána parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a < t < b.$$

Předpokládejme, že pro funkce $\psi(t), \chi(t)$ platí, že mají spojité derivace v intervalu (a,b) a že funkce $\psi(t)$ má inverzní funkci $\psi^{-1}(t)$. Dosazením křivky Θ do řešení $z = H(y)$ stanovíme, funkci H

$$\chi(t) = H\left(\psi(t)\right). \tag{7.7}$$

Dosadíme do této rovnice $t = \psi^{-1}(y)$, dostaneme

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = H(y). \tag{7.8}$$

Řešení je ve tvaru

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = z.$$

Poznámka 7.6. Zcela analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ se řeší rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$.

Analogickým postupem lze řešení určit vztahem

$$z = \int f(x,y)dx + H(y). \tag{7.9}$$

Důkaz existence a jednoznačnosti řešení se provádí stejně jako v předchozím případě.

Poznámka 7.7.

1. Analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se řeší i rovnice $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x,y)$.

2. Obdobně jako u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se může stát, že počáteční úloha s touto nemá řešení a nebo je řešení nekonečně mnoho.

Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y,z)$.

Rovnice zadaného typu obecně řešit neumíme, neboť na toto zadání můžeme nahlížet také tak, že rovnice nebude záviset na proměnné y a tedy řešení se převede na řešení obyčejné diferenciální rovnice $z' = f(x,z)$, což je úloha obecně neřešitelná. Myšlenky, že danou rovnici můžeme nahlížet jako na rovnici obyčejnou, je možné s výhodou použít k řešení rovnic tohoto typu. Celý postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 7.8. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{xy}{z} \tag{7.10}$$

Řešení. Rovnici budeme řešit jako rovnici $z'(x) = \dfrac{xy}{z}$ s tím, že y je konstanta. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými u které je postup znám z předmětu BMA2. Musíme ovšem zohlednit, že integrační konstantou je obecně výraz (funkce) proměnné y.

$$\int z\,\mathrm{d}z = \int xy\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}z^2 = \frac{x^2}{2}y + f(y).$$

O správnosti výrazu vpravo se můžete ujistit tak, že jeho parciální derivace podle proměnné x je rovna integrandu vlevo. Dále z dané rovnice vyjádříme proměnnou z

$$z^2 = x^2y + 2f(y) \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2y + 2f(y)}$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit dosazením do rovnice.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y + 2f(y)}} = \frac{xy}{z}.$$

□

Podobně jako jsme v předchozím příkladě využili postup řešení rovnice se separovanými proměnnými ukážeme v dalším příkladě analogii pro rovnici Bernoulli-ho.

Příklad 7.9. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial z}{\partial y}z = z + 2xyz^2 \tag{7.11}$$

Řešení. Rovnice přepsaná na rovnici Bernoulli má tvar

$$yz'(y) = z + 2xyz^2(y),$$

kde proměnná z je závislá na proměnné y. První krok je nalezení obecného řešení rovnice homogenní:

$$yz' = z \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Leftrightarrow z = yK.$$

Dále následuje metoda variace konstanty, tedy předpokládáme řešení ve tvaru $z = yK(y) \Rightarrow z' = K + yK'$ a po dosazení do původní rovnice dostáváme:

$$y(K + yK') = yK + 2xyy^2K^2 \Rightarrow \frac{K'}{K^2} = 2xy \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}K}{K^2} = \int 2xy\,\mathrm{d}y \Rightarrow -\frac{1}{K} = xy^2 + f(x),$$

Kde $f(x)$ je libovolná diferencovatelná funkce. Odtud vypočteme funkci $K = \dfrac{-1}{xy^2 + f(x)}$ a získáme obecné řešení dané rovnice

$$z(x, y) = \frac{-y}{xy^2 + f(x)}.$$

□

7.2 Lineární parciální diferenciální rovnice 1.řádu

7.2.1 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu

Definice 7.10. Lineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$a(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = c(x, y) \cdot z(x, y) + d(x, y), \tag{7.12}$$

kde a, b, c, d jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G.

Jestliže $c(x, y) \equiv 0, d(x, y) \equiv 0$, potom se rovnice (7.12) nazývá homogenní.

Charakteristický systém.

Uvažujeme nyní lineární parciální homogenní rovnicí

$$a(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{7.13}$$

kde a, b jsou funkce proměnných x, y takové, že obě nejsou současně nulové. Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$x'(t) = a(x(t), y(t)), \quad y'(t) = b(x(t), y(t)). \tag{7.14}$$

nazýváme charakteristickým systémem rovnice (7.13).

Důvodem je, že pro libovolné řešení $z(x, y)$ rovnice (7.13) a libovolné partikulárním řešení soustavy (7.14) ve tvaru $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ platí, že z nich složená funkce má nulovou derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}z(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}x' + \frac{\partial z}{\partial y}y' = \frac{\partial z}{\partial x}a + \frac{\partial z}{\partial y}b = 0,$$

tedy je derivovaná funkce konstantní:

$$u(\varphi(t), \psi(t)) \equiv \mathrm{const}.$$

Tato vlastnost je typická a znamená, že charakteristika nemůže být součástí Cauchyho počáteční úlohy pro homogenní LPDR 1. řádu.

Příklad 7.11. Najděte charakteristiky rovnice

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristický systém (7.14). V našem případě je $a = 2x, b = 1$. Hledáme řešení systému

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 2x, \\ y'(t) &=& 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& \exp(2t)C_1 \\ y &=& t + C_2 \end{array}$$

Z druhé rovnice vyjádříme t a dosadíme do první a úpravou konstant dostaneme

$$x = \exp(2y)\exp(C_2)C_1 \Leftrightarrow x\exp(-2y) = K,$$

Řešením zadaného systému je soustava křivek $x\exp(-2y) = K$, které tvoří hledané charakteristiky. □

Za předpokladu $a^2 + b^2 \neq 0$ je možné uvedený systém charakteristik určit i jiným postupem. Za předpokladu $a^2 + b^2 \neq 0$ lze systémem (7.14) vyloučením dt převést do kanonickém tvaru

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &=& a(x(t), y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &=& b(x(t), y(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}. \tag{7.15}$$

První integrály, existence řešení, obecné řešení

Definice 7.12. Funkci $z(x,y)$ nazveme *prvním integrálem* systému (7.15) v oblasti D, jestliže $z(x,y)$ je konstantní podél každého řešení systému (7.15), které celé leží v D a jestliže $z(x,y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v D.

Příklad 7.13. Najděte první integrál systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Řešení. První integrál nalezneme dvěma způsoby

1. Integrací druhé rovnice dostaneme $y(t) = t + C$ a dosazením do první rovnice obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4(t+C), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int 4(t+C)\mathrm{d}t = 2(t+C)^2 + D.$$

   Do tohoto řešení dosadíme za $t = y - C$ z druhé rovnice a dostaneme

$$x = 2y^2 + D \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y^2 = D.$$

2. Uvedený systém zapíšeme v kanonickém tvaru a řešíme jednu diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{4y} = \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}x = \int 4y\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad x = 2y^2 + D.$$

Prvním integrálem je proto funkce $z = x - 2y^2$, ale také každá funkce $z = f(x - 2y^2)$, kde f je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. $\square$

Věta 7.14. *Funkce $z = z(x, y)$ se spojitými parciálními derivacemi je řešením lineární homogenní rovnice (7.13) právě tehdy, když je prvním integrálem soustavy (7.15).*

Příklad 7.15. Najděte řešení rovnice

$$4y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Tato rovnice má charakteristický systém řešený v předchozím příkladě 7.15. Proto podle věty je řešením

$$z(x, y) = f(x - 2y^2),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce.

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(f(x - 2y^2)\right)}{\partial x} = f'(x - 2y^2), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(f(x - 2y^2)\right)}{\partial y} = f'(x - 2y^2)(-4y).$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$4y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4yf'(x - 2y^2) + f'(x - 2y^2)(-4y) = 0.$$

$\square$

Věta 7.16. O jednoznačnosti řešení.
Nechť mají funkce $a(x, y), b(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti D, nechť dále existuje křivka Θ zadaná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in (\alpha, \beta)$ taková, že její průmět do roviny Oxy leží v D. Nechť dále pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí nerovnost

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t), \psi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.16}$$

Potom existuje podoblast $D_1 \subset D$ obsahující křivku Θ taková, že řešení $z = z(x, y)$ parciální rovnice (7.13), které splňuje podmínku

$$z(\varphi(t), \psi(t)) = \chi(t), \qquad \text{pro všechna} \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{7.17}$$

je jednoznačně určené v D_1.

Věta má pouze lokální charakter. Zaručuje nám jednoznačnost v některém okolí křivky Θ.

Příklad 7.17. Najděte řešení Cauchyho počáteční úlohy spolu s maximální definičním oborem

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \text{ kde } z(0, y) = y^2$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou soustavu v kanonickém tvaru, která je lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Řešením lze určit bez složitějších výpočtů:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{x + y} \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = y + x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \exp(x)C - x - 1.$$

Tedy obecné řešení dané rovnice je ve tvaru

$$z(x, y) = f\big((x + y + 1)\exp(-x)\big),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Tu určíme dosazením počáteční podmínky:

$$z(0, y) = f(y + 1) = y^2 \Rightarrow f(t) = (t - 1)^2.$$

Řešení počáteční úlohy je tedy funkce:

$$z(x, y) = \big((x + y + 1)\exp(-x) - 1\big)^2.$$

Toto řešení prochází zadanou křivkou, kterou můžeme parametricky zapsat $x = 0,\ y = t,\ z = t^2$. Pro determinant z věty 7.16 platí:

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t), \psi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

tedy je toto řešení určeno jednoznačně v celé rovině xy. □

Lineární parciální rovnice homogenní s více proměnnými

Pokud pracujeme s funkcemi více proměnných, postupujeme analogicky. Dále se omezíme na rovnice kde je řešením funkce 3 proměnných, tedy na rovnice tvaru

$$a(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + c(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0. \tag{7.18}$$

Charakteristický systém je tvořen 3 rovnicemi o 4 neznámých $(x, y, x.z, t)$. Jeho vyřešením dostaneme opět 3 rovnice o 4 neznámých a eliminováním neznámé t získáme 2 rovnice o 3 neznámých. Ty můžeme geometricky interpretovat jako dvojici funkcí dvou proměnných o 2 neznámých:

$$f_1(x, y, z) = C_1 \qquad f_2(x, y, z) = C_2. \tag{7.19}$$

Analogicky definovaný první integrál má obecně tvar

$$u(x, y, z) = F(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)),$$

kde funkce F je libovolná spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných. Výše uvedené rovnice lze také získat řešením charakteristického systému v kanonickém tvaru (za předpokladu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{c(x, y, z)},$$

který je tvořen soustavou dvou diferenciálních rovnic.

Jestliže řešením rovnice (7.18) má spojité první parciální derivace je rovno prvnímu integrálu . Aby bylo toto řešení obecným řešením rovnice (7.18) musí být rovnice lineárně nezávislé. Podobně se postupuje i ve vyšších dimenzích. Uvedeme nyní ilustrativní příklad pro funkci tří proměnných tj. pro funkci $u(x, y, z)$.

Příklad 7.18. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou soustavu, kterou zapíšeme v obou tvarech

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= x - y. \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{x-y}$$

Při řešení využijeme obou těchto tvarů. Z prvního tvaru získáme rovnost

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) - y(t) + z(t) = C_1.$$

Z kanonického tvaru uvažujme první rovnici, která je rovnicí se separovanými proměnnými:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int x\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - y^2 = C_2.$$

Protože jsou obě rovnice lineárně nezávislé je obecné řešení zadané rovnice funkce

$$u = F(x - y + z, x^2 - y^2),$$

kde funkce $u = F(t, s)$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Skutečnost, že takto definovaná funkce je řešením zadané rovnice ověříme přímým výpočtem.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2) + F'_s(x-y+z, x^2-y^2)2x \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2)(-1) + F'_s(x-y+z, x^2-y^2)(-2y) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2)
\end{aligned}
$$

Při dosazování do zadané funkce vynecháme pro větší přehlednost argumenty funkcí F'_t a F'_s.

$$
y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial z} = y(F'_t + 2xF'_s) + x(-F'_t - 2yF'_s) + (x-y)F'_s = 0.
$$

□

Kvazilineární parciální diferenciální rovnice

Řešení homogenní lineární parciální diferenciální rovnice ve třech proměnných může být chápáno jako pomocná úloha při řešení kvazilineární rovnice.

Definice 7.19. Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$
a(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = c(x,y,z), \tag{7.20}
$$

kde a, b, c jsou funkce proměnných x, y, z definované na otevřené množině G.

Předpokládejme, že funkce $z(x, y)$ je řešením rovnice (7.20) a funkce U má spojité parciální derivace a platí $U(x, y, z(x, y)) = 0$. Odtud dostáváme rovnice:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

První rovnici vynásobíme funkcí $a(x, z, y)$ a druhou funkcí $b(x, y, z)$ a sečteme je. (Argumenty funkcí jsou pro přehlednost vynechány.)

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + a\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + b\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\underbrace{\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{=\,c \text{ dle } (7.20)} = 0,$$

Tedy funkce $U(x, y, z)$ je řešením rovnice:

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{7.21}$$

Uvedená skutečnost platí i naopak:

Věta 7.20. *Nechť funkce $U = U(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná v $D \subset \mathbb{R}^3$ a splňuje rovnici (7.21). Jestliže navíc $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$, potom existuje funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice $U(x, y, z(x, y)) = 0$, tato má spojité parciální derivace a a je z řešením rovnice (7.20).*

Příklad 7.21. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=(x-y).$$

Řešení. Hledáme funkci U, která bude splňovat rovnici (7.21). Takže má platit

$$y\frac{\partial U}{\partial x}+x\frac{\partial U}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Toto je rovnice řešená v předchozím příkladu. Proto

$$U(x,y,z)=F(x-y+z,x^2-y^2),$$

kde funkce $u=F(t,s)$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Z požadovaného předpokladu o parciální derivaci $u'_z=F'_t(x-y+z,x^2-y^2)\neq 0$ plyne, že rovnice $F(s,t)=0$ implicitně zadává funkci $s=f(t)$, takovou, že platí $F(f(t),t)=0$ a tedy řešení rovnice $F(x-y+z,x^2-y^2)=0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$x-y+z=f(x^2-y^2)\qquad\Leftrightarrow\qquad z=y-x+f(x^2-y^2),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Správnost řešení opět ověříme dosazením do zadané rovnice:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial z}{\partial x}&=&-1+f'(x^2-y^2)2x\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}&=&1+f'(x^2-y^2)(-2y)\end{array}\right\}\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=-y+2xyf'(x^2-y^2)+x-2xyf'(x^2-y^2)=x-y.$$

□

Věta 7.22. *Nechť funkce a, b, c mají spojité parciální derivace v oblasti $D \in \mathbb{R}^3$. Jestliže křivka Θ s parametrickým vyjádřením*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

leží v oblasti D, její průmět do roviny $0xy$ označíme τ a ještě platí, že pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je

$$\begin{vmatrix} a\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) & b\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje v rovině $0xy$ oblast G obsahující křivku τ taková, že řešení $z = z(x, y)$ rovnice (7.20) je v G jednoznačné.

Věta má opět pouze lokální charakter.

Příklad 7.23. Najděte řešení rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + z,$$

které je určeno křivkou $x = t$, $y = t$, $z = t^3$.

Řešení. Abychom určili obecné řešení, sestavíme charakteristickou soustavu v kanonickém tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2y+z}.$$

První rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\ln x = \ln y + c \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{y} = C_1.$$

Do třetího části kanonického tvaru charakteristického systému dosadíme $y = \frac{x^2}{C}$ a tato spolu s první části kanonického systému tvoří lineární diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{\frac{x^4}{C_1}+z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z' = \frac{z}{x} + \frac{x^3}{C_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = xC_2 + \frac{x^4}{3C_1}.$$

Dosazením za konstantu C_1 a vyjádřením konstanty C_2 určíme druhý první integrál

$$z = xC_2 + \frac{x^2y}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3z}{x} - xy = 3C_2 = \widetilde{C_2}.$$

Oba integrály jsou lineárně nezávislé, proto dostáváme obecné řešení $U(x,y,z)$ rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2z\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ve tvaru

$$U(x, y, z) = F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z}{x} - xy\right),$$

kde F je libovolná funkce dvou proměnných se spojitými parciálními derivacemi. Také v tomto případě lze z implicitního tvaru řešení zadané kvazilineární rovnice určit jeho tvar explicitní:

$$F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z}{x} - xy\right) = 0 \Rightarrow \frac{3z}{x} - xy = f\left(\frac{x^2}{y}\right) \Rightarrow z = \frac{x}{3}\left(xy + f\left(\frac{x^2}{y}\right)\right),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Nyní určíme zatím neznámou funkci $f(t)$ dosazením počáteční podmínky $x = t$, $y = t$, $z = t^3$:

$$t^3 = \frac{t}{3}\left(t^2 + f(t)\right) \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2t^2.$$

Celkově je řešením počátečního problému funkce

$$z(x, y) = \frac{x}{3}\left(xy + 2\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right)$$

Protože determinant z věty 7.22

$$\begin{vmatrix} a\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) & b\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 2t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t \neq 0.$$

je pro $y \neq 0$ nenulový a podle předchozí věty 7.22 je toto řešení jediné. $\square$

Obvykle se charakteristiky rovnice (7.21) nazývají i charakteristikami rovnice (7.20). Potom platí následující věta.

Věta 7.24. *Nechť je plocha*

$$z = f(x, y) \tag{7.22}$$

tvořena charakteristikami rovnice (7.20) a nechť funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace. Potom je $f(x, y)$ řešením rovnice (7.20). Obráceně - jestliže funkce $f(x, y)$ je řešením rovnice (7.20), potom každá charakteristika, která má s $f(x, y)$ aspoň jeden společný bod, leží celá na ploše (7.22).

Pfaffova rovnice.

Závěrem uvedeme ještě jeden typ parciální diferenciální rovnice.

Definice 7.25. Pfaffovou rovnicí nazveme výraz

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0, \tag{7.23}$$

kde P, Q, R jsou funkce proměnných x, y, z definované v oblati D.

Pro $R \neq 0$ v D lze rovnici (7.23) upravit na tvar

$$\mathrm{d}z = -\frac{P}{R}\mathrm{d}x - \frac{Q}{R}\mathrm{d}y, \tag{7.24}$$

tedy hledáme funkci $z(x, y)$, jejíž totální diferenciál vyhovuje rovnici (7.24), což v případě, že na pravé straně rovnice jsou proměnné x, y vede na exaktní rovnici.

Věta 7.26. *Je-li rovnice (7.23) řešitelná v D a jestliže mají funkce P, Q, R spojité parciální derivace, potom v D platí*

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{7.25}$$

Podmínce (7.25) se říká podmínka řešitelnosti a nebo podmínka integrability Pfaffovy rovnice.

Věta 7.27. *Jestliže mají v D funkce P, Q, R spojité parciální derivace a v každém bodě D je splněna podmínka (7.25), potom v D existují funkce $\mu = \mu(x, y, z) \neq 0$ a $F(x, y, z)$ takové, že platí*

$$\mathrm{d}F = \mu(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z), \ \textit{neboli}\ \frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \mu R.$$

Potom každým bodem D prochází právě jedno řešení rovnice (7.23).

Věta má pouze lokální platnost. Funkce μ se nazývá *integrační faktor*.

Příklad 7.28. Mějme rovnici

$$y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + xy^2z\mathrm{d}z = 0.$$

Podmínka řešitelnosti (7.25) má tvar

$$-2xy^3z + xy^2z + xy^2z(2y-1) = 0.$$

v tomto případě lze integrační faktor „uhádnout“. Jestliže vezmeme $\mu = \dfrac{1}{xy^2}$, potom pro $x > 0, y > 0$ máme

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0.$$

Levá strana je úplným diferenciálem funkce

$$F = \ln x - \frac{1}{y} + \frac{z^2}{2}.$$

7.3 Řešené příklady

Příklad 7.29. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = z(x,y),$$

$$z(0, y) = y^2.$$

Řešení. Jde o stejnou rovnici jako v předchozím příkladu 7.9. Řešení proto bude mít tvar

$$z(x, y) = K(y)\mathrm{e}^x.$$

Dosadíme do něj $x = 0$ a dostaneme

$$z(0, y) = y^2 = K(y).$$

Řešením Cauchyovy úlohy je proto funkce

$$z(x, y) = y^2\mathrm{e}^x.$$

□

Příklad 7.30. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = xy + z(x, y) + \alpha,$$

$$z(0, y) = y^3 + 2y,$$

kde α je konstanta.

Řešení. Budeme považovat y za konstantu a a získanou obyčejnou diferenciální rovnici řešíme jako lineární diferenciální rovnici.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z + xy.$$

Nejdříve řešíme homogenní rovnici (o pravé straně předpokládáme že je rovna nule).

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln z = cx + K \Rightarrow z = L\mathrm{e}^{cx},$$

kde $L = \mathrm{e}^K$. Nyní předpokládáme, že $z(x) = \mathrm{e}^x L(x) \Rightarrow z' = \mathrm{e}^x(L + L')$ a po dosazení do rovnice získáme:

$$\mathrm{e}^x(L + L') = \mathrm{e}^x L + xy \Rightarrow L' = xy\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow L = \int xy\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \Rightarrow L = \mathrm{e}^{-x}y(1 - x) + f(y).$$

Po dosazení funkce L do předpokládaného tvaru získáme obecné řešení:

$$z(x, y) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}y(1 - x) + f(y)) = y(1 - x) + \mathrm{e}^x f(y).$$

Nyní najdeme řešení, které vyhovuje naší počáteční podmínce. Dosazením do předchozí rovnice hodnoty $x = 0$ dostaneme

$$y^3 + 2y = y + f(y),$$

a odtud plyne

$$H(y) = y^3 + y.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$z(x, y) = y(1 - x) + \mathrm{e}^x (y + y^3).$$

$\square$

8 Tutoriál č. 6

Metoda charakteristik pro lineární parciální diferenciální rovnice 1.řádu

Metoda charakteristik pro lineární parciální diferenciální rovnice 2.řádu

Fourierova metoda pro vlnovou rovnici

8.1 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Řada technických problémů, zvláště v elektrotechnice, se dá popsat pomocí parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Proto se jimi teď budeme věnovat samostatně.

Příklad 8.1. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu se často používají při popisu fyzikálních a technických dějů a procesů. Následují některé parciální rovnice, které se používají v elektrotechnice a příbuzných oborech.

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole)},$$

$$\triangle u = f \quad \text{Poissonova rovnice (elektrostatické pole s volnými náboji)},$$

$$\triangle u = a^2 u \quad \text{Helmholzova rovnice (stacionární vlnová rovnice)},$$

$$\triangle u = a\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{difůzní rovnice },$$

$$\triangle u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -J,\ v = v\left(|\ \mathrm{grad}\ u|\right)\ \text{rovinné stacionární magnetické pole},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{rovnice pro kmity struny},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{rovnice vedení tepla.}$$

Hlavní pozornost budeme věnovat lineárním parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu. Pomocí charakteristik provedeme klasifikaci lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu na rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické a ukážeme transformace, které zajišťují, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu můžeme lokální transformací převést na kanonický tvar. Tento je často řešitelný a tak lze řešit původní rovnici.

8.1.1 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické

Definice 8.2. Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\right) = 0.$$

Definice 8.3. Lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y)u = f(x,y). \tag{8.1}$$

Funkce a, b, c, d, e, g, f jsou spojité v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž aspoň jedna z funkcí a, b, c je nenulová v každém bodě $(x,y) \in \Omega$.

Řešením (8.1) v oblasti Ω rozumíme každou funkci $u(x,y) \in C^2(\Omega)$, která v Ω identicky splňuje (8.1).

Počátečními podmínkami rozumíme předepsání funkční hodnoty řešení na nějaké křivce spolu s hodnotou derivace řešení ve směru různém od tečného směru křivky, to jest $u(x,y) = h(x,y)$ a $u'_{\vec{s}} = s(x,y)$ pro $[x,y] \in l = \{[x(t), y(t)], t \in I\}$. Podobně jako u rovnic prvního řádu nemohou být tyto křivky charakteristikami,

jimiž rozumíme řešení charakteristické rovnice:

$$a\,(y')^2 - by' + c = 0. \tag{8.2}$$

Vzhledem k derivaci $y'(x)$ se jedná o rovnici kvadratickou a podle znaménka diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ této kvadratické rovnice klasifikujeme lineární parciální diferenciální rovnice a provádíme transformace do kanonick0ho tvaru.

Řekneme, lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu je:

- hyperbolického typu, jestliže $D > 0$, má charakteristická rovnice řešení ve tvaru dvou jedno parametrických soustav křivek určených implicitně rovnicemi

$$\varphi(x,y) = C_1 \qquad\qquad \psi(x,y) = C_2,$$

  které vyhovuji charakteristické rovnici (8.2). Dále předpokládejme, že k substituci zadané rovnicemi

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad\qquad \eta = \psi(x,y),$$

existuje ve studované oblasti inverzní transformace a můžeme tedy definovat novou funkci $U(\xi, \eta)$ vztahem

$$u(x, y) = U(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Po substituci obdržíme pro funkci $U(\xi, \eta)$ diferenciální rovnici, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$U''_{\xi\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}),$$

který je jednodušší, neboť obsahuje pouze jednu parciální derivaci druhého řádu.

- parabolického typu, jestliže $D = 0$, potom existuje jedna jedno parametrická soustava křivek určené implicitně rovnicemi

$$\varphi(x, y) = C,$$

které vyhovuji charakteristické rovnici (8.2). V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad\qquad \eta = y$$

danou parciální diferenciální rovnici do kanonického tvaru:

$$U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}).$$

- eliptického typu, jestliže $D < 0$, potom charakteristická rovnice (8.2) má řešení v implicitním tvaru

$$\varphi(x, y) \pm ij\psi(x, y) = K.$$

V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad\qquad \eta = \psi(x,y)$$

danou parciální diferenciální rovnici do kanonického tvaru:

$$U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}).$$

V dalším se soustředíme na typ hyperbolický a parabolický, neboť eliptický typ byl řešen v rámci počítačového cvičení. Postup je nazýván D'Alambertova metoda řešení.

8.1.2 D'Alambertova metoda

1. Převedeme rovnici na kanonický tvar
2. Nalezneme obecné řešení LPDR (obvykle závisí na 2 libovolných funkcích dvou proměnných).
3. Aplikací počátečních podmínek určíme konkrétní partikulární řešení

Toto jsou nejednoduché matematické úlohy, které nemusí mít řešení.

Příklad 8.4. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$xu''_{xx} - (2x+y)u''_{xy} + 2yu''_{yy} - \frac{2x+y}{2x-y}(u'_x - 2u'_y) = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(x,1) = 5x^2$, $u'_y(x,1) = 2x(x+2)$

Řešení. Budeme postupovat podle D'Alambertovy metody.

1. Jedná se o rovnici hyperbolického typu a kanonická rovnice má tvar

$$0 = x\big(y'\big)^2 + (2x+y)y' + 2y = (xy'+y)(y'+2).$$

Rovnice je součinem rovnic $xy'+y=0$, $y'+2=0$, pro které určíme řešení a následné substituce:

$$xy = C_1 \qquad y+2x = C_2 \qquad \Rightarrow \qquad \xi = xy \qquad \eta = y+2x.$$

Vypočteme potřebné parciální derivace s využitím vzorce pro derivaci složené funkce více proměnných (např. $u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x$):

$$u'_x = u'_\xi y + u'_\eta 2 \qquad u'_y = u'_\xi x + u'_\eta.$$

Při stanovení derivací vyšších řádů postupujeme analogicky, proto podrobněji určíme derivaci u které je možné očekávat chybu nejčastěji

$$u''_{xy} = \frac{\partial u'_\xi}{\partial y}y + u'_\xi + \frac{\partial u'_\eta}{\partial y}2 = (u''_{\xi\xi}x + u''_{\xi\eta})y + u'_\xi + (u''_{\eta\xi}x + u''_{\eta\eta})2 = u''_{\xi\xi}xy + u''_{\xi\eta}(2x+y) + u''_{\eta\eta}2 + u'_\xi.$$

Dále dostaneme

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi}y^2 + u''_{\xi\eta}4y + u''_{\eta\eta}4 \qquad u''_{yy} = u''_{\xi\xi}x^2 + u''_{\xi\eta}2x + u''_{\eta\eta}.$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravách dostaneme $-u''_{\xi\eta}(y-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow u''_{\xi\eta} = 0$.

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x,y) = \varphi(xy) + \psi(2x+y).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$5x^2 = u(x,1) = \varphi(x) + \psi(2x+1) \qquad 2x^2 + 4x = u'_y(x,1) = \varphi'(x)x + \psi'(2x+1)$$

Od derivace první rovnice odečteme dvojnásobek druhé rovnice:

$$10x - 4x^2 - 8x = \varphi'(x)(1-2x) \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2.$$

Dosazením za $\varphi(x) = x^2$ do první rovnice obdržíme $5x^2 - x^2 = \psi(2x+1) \Rightarrow 4x^2 = \psi(2x+1)$ a substitucí $t = 2x+1 \Leftrightarrow (t-1) = 2x$ dostáváme $\psi(t) = (t-1)^2$.

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x,y) = (xy)^2 + (2x+y-1)^2.$$

□

Příklad 8.5. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(2x, x) = x^2 + 1$, $u'_y(2x, x) = 0$.

Řešení. V tomto případě se jedná o parabolický typ

1. Charakteristická rovnice
$$0 = \left(y'\right)^2 - 2y' + 1 = \left(y' - 1\right)^2$$
má za řešení jednoparametrický systém křivek $y - x = C$. Substituce má tvar:
$$\xi = y - x \qquad \eta = y.$$
Vypočteme potřebné parciální derivace
$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \qquad u''_{xy} = -u''_{\xi\xi} - u''_{\xi\eta} \qquad u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$$
Po dosazení do původní rovnice a úpravách dostaneme $u''_{\eta\eta} = 0$.

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \eta\psi(\xi)$ a po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x,y) = \varphi(y-x) + y\psi(y-x).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$\begin{aligned}&1 + x^2 = u(2x,x) = \varphi(x-2x) + x\psi(x-2x) = \varphi(-x) + x\psi(-x),\\ &0 = \varphi'(x-2x) + \psi(x-2x) + x\psi'(x-2x) = \varphi'(-x) + \psi(-x) + x\psi'(-x).\end{aligned}$$

Nyní první rovnici derivujeme a sečteme se druhou rovnicí:

$$2x = -\varphi'(-x) + \psi(-x) - x\psi('-x) + \varphi'(-x) + \psi(-x) + x\psi'(-x) = 2\psi(-x) \Rightarrow \psi(x) = -x.$$

Do první rovnice dosadíme $\psi(x) = -x$ a dopočítáme $\varphi(x) = 1$.

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x,y) = 1 + y(x-y).$$

$\square$

8.1.3 D'Alembertův vzorec pro vlnovou rovnici

Hledejme nyní řešení pro rovnici kmitu struny je možno zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{8.3}$$

Průběh pohybu struny bude jednoznačně určen, pokud budeme znát pohyb koncových bodů a počáteční polohu a rychlost každého bodu. Matematicky to znamená, že potřebujeme znát ještě okrajové a počáteční podmínky.

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), & (8.4)\\ u(l,t) &= \mu_2(t), & (8.5)\\ u(x,0) &= \varphi(x), & (8.6)\\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \psi(x). & (8.7) \end{aligned}$$

$\mu_1, \mu_2, \varphi, \psi$ jsou zadané funkce.

Užitím D'Alambertovy metody využijeme pouze počáteční podmínky zadané funkcemi φ, ψ. Tato rovnice je hyperbolického typu a substitucí $\xi = x + at$, $\zeta = x - at$ převedeme na kanonický tvar

$$U''_{\xi\zeta} = 0.$$

Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$U(\xi,\zeta) = f_1(\xi) + f_2(\zeta), \tag{8.8}$$

kde f_1, f_2 jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce jedné proměnné. Zpětným dosazením původních proměnných dostáváme obecné řešení původní parciální diferenciální rovnice ve tvaru

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{8.9}$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \psi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.10}$$

Tento vztah se nazývá d'Alembertův vzorec.

8.1.4 Řešené příklady

Příklad 8.6. Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a její řešení.

Řešení. Máme $A = 1, B = 8, C = 15$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Rovnice je hyperbolického typu. Rovnici přířadíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - 5x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 30\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 25\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Po dosazení dostaneme
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$
Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Zvolme
$$\frac{\partial U}{\partial\eta} = v.$$
Potom
$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = 0,$$
a proto je $v = f(\eta)$, kde f je libovolná funkce. Takže máme
$$\frac{\partial U}{\partial\eta} = f(\eta),$$
$$U = \int f(\eta)\mathrm{d}\eta = F(\eta) + G(\xi),$$
kde F, G jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru
$$u = F(y - 5x) + G(y - 3x).$$

$\square$

Příklad 8.7. Převeďte na kanonický tvar rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení. Určíme diskriminant kvadratické rovnice

$$B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Rovnice je eliptického typu. Pro kořeny její charakteristické rovnice platí:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 12 = -1 \pm 2j.$$

Nejdříve řešíme diferecnciální rovnici v komplexním oboru:

$$y' = -1 \pm 2j \Rightarrow y = x \pm 2xj + C \Leftrightarrow y - x - 2jx = C$$

Podle předchozího postupu volíme transformaci:

$$\xi = y - x, \quad \eta = -2x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{\xi\xi} + 4u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{\xi\xi}.$$

Po dosazení dostaneme

$$0 = u''_{\xi\xi} + 4u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta} + 2(-u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta}) + 5u''_{\xi\xi} = 4u''_{\xi\xi} + 4u''_{\eta\eta} \Leftrightarrow u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$$

□

8.2 Fourierova metoda separace proměnných

Okrajová úloha pro rovnici struny je úloha nalezení řešení $u = u(x, t)$ definovanou pro $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, která zde má spojité parciální derivace prvního řádu, splňuje podmínky (8.4) - (8.7) a v oblasti $0 < x < l$, $t > 0$ má spojité parciální derivace druhého řádu a splňuje zde rovnici (8.3).

Poznamenejme, že počáteční úloha pro rovnici struny má nejvýše jedno řešení.

Při řešení některých parciálních diferenciálních rovnic se používá i metoda separace proměnných (Fourierova metoda, metoda separace proměnných). Základní myšlenkou této metody je, že řešení předpokládáme ve tvaru součinu dvou (respektive tří) funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné nezávislé proměnné. Pokud se nám podaří tímto způsobem separovat jednotlivé proměnné v Laplaceově rovnici, rozpadne se původní parciální rovnice na několik obyčejných diferenciálních rovnic. Umíme-li najít jejich obecná řešení, budeme umět i vyřešit původní Laplaceovu rovnici.

8.2.1 Vzorce odvozené Fourierovou metodou pro vlnovou rovnici

Předpokládejme, že vlnová rovnice je zadána ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

kde a je nenulová konstanta. Jsou-li dány počáteční podmínky

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x)$$

a okrajové podmínky

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \tag{8.11}$$

potom lze najít řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}\,, \tag{8.12}$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

Odvození těchto vzorců je podrobně uvedeno níže v příkladu v učebním textu.

8.2.2 Řešené příklady

Příklad 8.8. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u\big|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Řešení. Protože ze zadání příkladu vyplývá $\psi = 0$ dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right),$$

kde $\varphi = x^2$. Proto

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+t)^2 + (x-t)^2\right).$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = x^2 + t^2.$$

□

Příklad 8.9. Najděte profil struny, kmity které jsou popisovány rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro hodnotu času $t = \pi/2$ za předpokladu, že

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1.$$

Řešení. Dosazením do vztahu (8.10) dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) + \sin(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \mathrm{d}z\right).$$

Odtud máme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + \frac{1}{2} \cdot z\big|_{x-t}^{x+t}.$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + t.$$

□

Příklad 8.10. Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar paraboly

$$u = \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)\right)$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (8.11).

Řešení. Využijeme rozklad do řady (8.12). Máme

$$\varphi := \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)\right), \quad \text{a} \quad \psi(x) = 0.$$

Najdeme koeficienty ve vzorci (8.12).

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x = \frac{8h}{l^3} \int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ b_k =& 0. \end{aligned}$$

Abychom vypočetli koeficienty a_k, použijeme dvakrát metodu per partes. Nejprve označme

$$u_1 = lx - x^2, \quad \mathrm{d}u_1 = (l - 2x)\mathrm{d}x,$$

$$v_1 = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_1 = \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} a_k =& -\frac{8h}{l^3}(lx-x^2)\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ &+\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ =&\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dále označíme

$$\begin{aligned} u_2 &= l-2x, \quad \mathrm{d}u_2 = -2\mathrm{d}x, \\ v_2 &= \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_2 = \cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pokračujeme ve výpočtu:

$$\begin{aligned} a_k =&\frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ &+\frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ =& -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \end{aligned}$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

Dosazením a_k a b_k do vztahu (8.12) dostaneme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1-(-1)^k] \cos\frac{k\pi a t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\,.$$

Je-li $k = 2n$, pak platí

$$1-(-1)^k = 0$$

a v případě, že $k = 2n+1$ máme

$$1-(-1)^k = 2.$$

Proto můžeme poslední vyjádření funkce $u(x,t)$ zjednodušit:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,.$$

$\square$