1 Tutoriál č. 2 Systémy obyčejných lineárních diferenciálních rovnic

Opakování lineární algebry a lineárních diferenciálních rovnic n=tého řádu

Základní pojmy a struktura řešení systému LDR

Vztah mezi lineární rovnicí n-tého řádu a systémem n rovnic prvního řádu

Řešení pomocí vlastních vektorů

1.1 Opakování

Maticí A typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schema objektů pro něž je definováno sčítání a násobení (čísla, funkce,...)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součet dvou matic stejného typu je matice téhož typu, jejíž prvky jsou součty odpovídajících prvků sčítaných matic: **Násobek** matice **konstantou** získáme tak, že každý prvek matice touto konstantou vynásobíme. **Součin** matic **A** a **B** získáme o něco složitějším způsobem. Prvek, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci výsledné matice, dostaneme jako součet součinů odpovídajících prvků i-tého řádku matice **A** s j-tým sloupcem matice **B**.

Příklad 1.

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - y \\ 4x + 2z \\ -3x + y + 5z \end{pmatrix}.$$

Lineární vektory jsou závislé, jestliže existuje jejich nulová lineární kombinace s alespoň jedním nenulovým koeficientem. V opačném případě jsou **vektory jsou nezávislé**

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ lineárně závislé nebo nezávislé.
a) $\mathbf{u} = (3, 2, 1), \mathbf{v} = (2, 2, 2), \mathbf{w} = (13, 12, 11)$
b) $\mathbf{u} = (1, 2, 3), \mathbf{v} = (0, 1, 1), \mathbf{w} = (-1, 0, 3)$

Řešení. a) Pozorný student „vidí“ $\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3, 2, 1) + 5(2, 2, 2) - (13, 12, 11) = (0, 0, 0)$.

b)V tomto případě můžeme ze souřadnic vektorů vytvořit čtvercovou matici a je-li její determinant nenulový jsou vektory nezávislé:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 3 = 4 \neq 0.$$

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jsou tedy lineárně nezávislé. □

1.1.1 Opakování o lineární rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty

Pro lineární diferenciální rovnici homogenní n-tého řádu $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, určíme řešení pomocí kořenů charakteristické rovnice, kterou odvodíme dosazením řešení ve tvaru $y = e^{\lambda t}$, kde λ je reálné nebo komplexní číslo. Potom λ vyhovuje **charakteristické rovnici**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{1.1}$$

V následující větě si připomeneme, jakým způsobem se konstruuje obecné řešení původní rovnice pro všechny možné případy kořenů charakteristické rovnice (1.1).

Věta 1.1.
a) *Každému k-násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice* (1.1) *odpovídá k partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru*

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t},\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

b) *Každé dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ charakteristické rovnice* (1.1) *odpovídá $2s$ partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru tvaru*

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & \dots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t; \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & \dots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array}$$

c) *Součet násobností všech kořenů je roven stupni charakteristické rovnice n; proto je počet všech výše uvedených partikulárních řešení n.* **Obecné řešení** *původní diferenciální rovnice je lineární kombinací těchto partikulárních řešení s* **libovolnými** *koeficienty.*

Příklad 3. Řešme diferenciální rovnici $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y''' + 6y' - 4y = 0$.

Řešení. Určíme kořeny charakteristické rovnice:

$$\lambda^5 - 2\,\lambda^4 - \lambda^3 + 6\,\lambda - 4 = 0,$$

kterými jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1,\ \lambda_{3,4} = -1 \pm i$. Obecné řešení diferenciální rovnice je

$$y = c_1 \mathrm{e}^{2t} + (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}(c_4 \cos t + c_5 \sin t),$$

kde $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_5$ jsou libovolné konstanty. □

K určení partikulárního řešení nehomogenní rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{1.2}$$

můžeme opět využít *metodu variace konstant*. Tento postup je poměrně technicky náročný. Celý postup lze ovšem popsat pomocí jediného vzorce, využijeme-li váhovou funkci $\Phi(t,s)$, která je pro rovnici s jednotkovým koeficientem u nejvyšší derivace definována jako řešení homogenní rovnice (1.2) splňující počáteční podmínky $y(s) = y'(s) = \cdots = y^{(n-2)}(s) = 0, \quad y^{(n-1)}(s) = 1$. Potom lze ukázat, že partikulární řešení $Y(t)$ počáteční úlohy (1.2), splňující počáteční podmínku $y(t_0) = 0$ je následujícího tvaru

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, \Phi(t,s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.3}$$

V praxi se často používá tzv. metoda neurčitých koeficientů. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro funkce $f(x)$, je ve **speciálním tvaru**. Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice. Porovnáním obou stran rovnice tyto koeficienty dopočítáme.

K pravé straně, kdy funkce f je ve tvaru

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

kde a, b jsou reálná čísla a P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m, má partikulární řešení Y rovnice (1.2) tvar:

$$Y = e^{ax}x^k(R_{\max\{m,n\}}(x)\cos bx + S_{\max\{m,n\}}(x)\sin bx),$$

kde číslo $a + bj$ je k-násobný kořen charakteristické rovnice a $R_{\max\{m,n\}}$ a $S_{\max\{m,n\}}$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{m, n\}$.

Příklad 4. Nalezněte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = \sin 2t.$$

Řešení. Partikulární řešení nalezneme všemi uvedenými metodami, protože se jedná o rovnici se speciální pravou stranou.

1. Vyřešíme lineární systém s derivacemi neznámých funkcí, který získáme dosazením $Y(t) = c_1(t)\cos t +$ $+ c_2(t)\sin t$ do dané rovnice a první rovnice je volenou podmínkou:

$$\left.\begin{array}{rl} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t & = 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t & = \sin 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1' = -\sin t\ \sin 2t \\ c_2' = \cos t\ \sin 2t \end{array}$$

Následně určíme integrací funkce $c_1(t)$ a $c_2(t)$:

$$c_1(t) = \int -2\sin^2 t \cos t \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \sin t = u \\ \cos t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int -2u^2 \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}u^3 = -\frac{2}{3}\sin^3 t,$$

$$c_2(t) = \int 2\sin t \cos^2 t \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \cos t = u \\ -\sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int -2u^2 \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}u^3 = -\frac{2}{3}\cos^3 t.$$

Dosazením vypočtených funkcí získáme partikulární řešení:

$$Y(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t \cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t \sin t = -\frac{\sin 2t}{3}.$$

2. Nejprve určíme váhovou funkci $\Phi(t,s)$. Tou je homogenní řešení $y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ splňující počáteční podmínky $y_h(s) = 0$, $y_h'(s) = 1$. Z nich určíme konstanty c_1, c_2:

$$\left. \begin{array}{rl} c_1 \cos s + c_2 \sin s & = 0, \\ -c_1 \sin s + c_2 \cos s & = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} c_1 = -\sin t \\ c_2 = \cos t. \end{array}$$

Dostáváme váhovou funkci $\Phi(t,s) = \Phi(t-s) = -\sin s \cos t + \cos s \sin t = \sin(t-s)$ a integrací (za t_0 volíme $t_0 = 0$) získáme partikulární řešení:

$$Y(t) = \int_0^t \sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s = [\sin 2s \cos(t-s)]_0^t - \int_0^t 2\cos 2s \cos(t-s)\mathrm{d}s =$$
$$\sin 2t + [2\cos 2s \sin(t-s)]_0^t + \int_0^t 4\sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s \Rightarrow$$
$$-3\int_0^t \sin 2s \sin(t-s)\mathrm{d}s = \sin 2t - 2\sin(t)] \Rightarrow Y(t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{\sin 2t}{3}.$$

3. Předpovíme tvar partikulárního řešení$Y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ vypočteme derivace:

$$Y'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \qquad Y''(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t.$$

Tyto derivace dosadíme do původní rovnice:

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = -3A\cos 2t - 3B\sin 2t = \sin 2t.$$

a porovnáním koeficientů u stejných výrazů určíme neznámé konstanty $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{3}$:

Partikulární řešení je $Y(t) = -\dfrac{\sin 2t}{3}$

□

I na uvedeném příkladě je patrné, že různé použité metody hledání partikulárního řešení mohou dávat různé tvary tohoto řešení, neboť toto není určeno jednoznačně.

1.2 Základní pojmy

Budeme se zabývat řešením soustavy n obyčejných diferenciálních rovnice prvního řádu tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}(t)x_n & + & f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}(t)x_n & + & f_2(t) \\ & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}(t)x_n & + & f_n(t). \end{array} \tag{1.4}$$

Tuto soustavu můžeme přepsat jako

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

neboli zkráceně

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{1.5}$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Následující zápisy soustavy diferenciálních rovnic jsou ekvivalentní

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' &= 4x_1 - 3x_2 + \mathrm{e}^{2t} \end{aligned} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

Definice 1.2. Sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots\ x_n(t))^T$ je **řešením** systému diferenciálních rovnic (1.4) na intervalu I, jestliže všechny jeho složky jsou na I diferencovatelné a rovnice (1.4) jsou splněny pro každé $t \in I$.

Příklad 6. Ověřte, že vektory $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{7t} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{7t} \end{pmatrix}$ jsou na intervalu $(-\infty, \infty)$ řešeními soustavy

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Řešení. Výpočet provedeme pouze pro $\mathbf{x}_1$. Dosadíme vektor $\mathbf{x}_1$ do zadané soustavy rovnic za $\mathbf{x}$ a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:

$$L = \mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^{-t})' \\ (-\mathrm{e}^{-t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} + 3(-\mathrm{e}^{-t}) \\ 5\mathrm{e}^{-t} + 4(-\mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = L.$$

□

Stejně jako u jediné diferenciální rovnice, i u systémů diferenciálních rovnic často řešíme tzv. **počáteční úlohu**, která spočívá v tom, že hledáme řešení zadaného systému, které vyhovuje určité počáteční podmínce:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.6}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je nějaký bod (často, ale nikoli vždy, to bývá 0) a $\mathbf{x}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$.

Věta 1.3 (O existenci a jednoznačnosti řešení)**.**
Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{A}(t)$ a vektoru $\mathbf{f}(t)$ funkce spojité na intervalu I, který obsahuje bod t_0, pak existuje jediné řešení počátečního problému (1.6) na intervalu I.

1.2.1 Struktura řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Budeme předpokládat, že prvky matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{f}$ v soustavě (1.5) jsou spojité funkce na nějakém intervalu I.

Nejprve se zaměříme na **homogenní systémy**. To jsou systémy, kde $\mathbf{f}(t) = \mathbf{o}$, tj. ze soustavy (1.5) zbude pouze

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{1.7}$$

Věta 1.4 (Princip superpozice)**.** *Nechť* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *jsou řešení systémů*

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i + \mathbf{f}_i,$$

pro $i = 1, \dots, k$. *Potom je libovolná lineární kombinace*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I*.*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k.$$

Přímým důsledkem je následující věta, která jinými slovy ukazuje, že množina všech řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

Věta 1.5.
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$*,* $k \in \mathbb{N}$*, jsou řešení homogenního systému* (1.7) *na intervalu* I*. Pak je také libovolná lineární kombinace*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I*.*

Věta 1.6 (Kritérium pro lineární nezávislost řešení)**.**
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *jsou řešení homogenního systému* (1.7) *na intervalu* I*,*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá, právě když je Wronskián

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.8}$$

pro každé $t \in I$*.*

Dá se ukázat, že pro libovolné $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektory řešení soustavy (1.7) je Wronskián stále nulový nebo stále nenulový. Stačí tedy, že je Wronskián nenulový v jediném bodě $t_0 \in I$,z čehož plyne, že je nenulový na celém intervalu I.

Příklad 7. Ověříme, že vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix},$$

které jsou řešeními systému $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, jsou lineárně nezávislé. Stačí vypočíst Wronskián (v prvním kroku jsme od 3. řádku odečetli 2 a přičetli 1. řádek):

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ \mathrm{e}^t & 2\sin(t) & 2\cos(t) \\ \mathrm{e}^t & \sin(t) + \cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ \mathrm{e}^t & 2\sin(t) & 2\cos(t) \\ 0 & -2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^t \begin{vmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) & \cos(t) + 3\sin(t) \\ -2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} =$$

$$- 2e^t(\sin^2(t) - 3\sin t\cos t + \cos^2 t + 3\sin t\cos t) = -2e^t \neq 0.$$

Wronskián je nenulový pro všechna reálná t, a proto jsou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineárně nezávislé.

Definice 1.7 (Fundamentální množina řešení).
Jakákoli n-tice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislých řešení homogenního systému (1.7) na intervalu I se nazývá **fundamentální množina řešení** na tomto intervalu.

Věta 1.8. *Fundamentální množina řešení homogenního systému (1.7) na intervalu I vždy existuje.*

Definice 1.9 (Obecné řešení homogenního systému).
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je fundamentální množina řešení homogenního systému (1.7) na nějakém intervalu I. Obecné řešení systému na tomto intervalu se definuje jako

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n, \tag{1.9}$$

kde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou libovolné konstanty.

Dá se ukázat, že každé řešení systému (1.7) lze zapsat ve tvaru (1.9), tj. ke každému řešení $\mathbf{x}$ najdeme konstanty $c_1, \ldots, c_n$ tak, aby platilo (1.9).

Trojice řešení z předchozího příkladu je fundamentální množina řešení a obecné řešení může mít tvar:

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin(t) - 3\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} \cos(t) + 3\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix},$$

Věta 1.10. *Nechť* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *jsou řešení homogenního systému* (1.7) *na intervalu* I *a nechť* $\mathbf{x}_p$ *je libovolné řešení nehomogenního systému* (1.5) *na tomtéž intervalu. Pak*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_p,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *jsou libovolné konstanty, je také řešením nehomogenního systému* (1.5) *na intervalu* I.

Definice 1.11 (Obecné řešení nehomogenního systému)**.**
Nechť $\mathbf{x}_p$ je jedno dané řešení nehomogenního systému (1.5) na nějakém intervalu I a nechť

$$\mathbf{x}_c = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

je obecné řešení odpovídajícího homogenního systému (1.7) na tomtéž intervalu. **Obecné řešení** nehomogenního systému na intervalu I se definuje jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p. \tag{1.10}$$

Obecné řešení $\mathbf{x}$ nehomogenního systému (1.5) je tedy rovno součtu obecného řešení $\mathbf{x}_c$ přidruženého homogenního systému (1.7) a některého partikulárního řešení $\mathbf{x}_p$ nehomogenního systému (1.5).

Definice 1.12 (Fundamentální matice)**.**
Nechť

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

je fundamentální množina řešení homogenního systému (1.7) na intervalu I. Matice

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **fundamentální matice** systému na tomto intervalu.

Pro fundamentální matici platí:

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t). \tag{1.11}$$

1.3 Vztah mezi lineární rovnice n-tého řádu a systém n lineárních diferenciálních rovnic

Ukážeme si, jak lze libovolnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu převést na lineární systém. Tato možnost převedení je velice významná, neboť umožňuje použít veškerou vyloženou teorii taktéž k rovnicím n-tého řádu.

Uvažujme lineární obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \tag{1.12}$$

kde koeficienty $a_{n-1}(t), \ldots, a_1(t), a_0(t)$ a nehomogénní člen $b^*(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Budeme rovnici (1.12) transformovat na systém rovnic. Nechť jsou $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nové závislé funkce, definované jako

$$y_1 = u,\ y_2 = u',\ y_3 = u'', \ldots, y_n = u^{(n-1)}.$$

Tímto předpisem byl definován vektor $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Pak je lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu (1.12) ekvivalentní systému

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \tag{1.13}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

a

$$b(t) = (0, 0, \ldots, 0, b^*(t))^T.$$

Podobně se ukáže, že počáteční problém

$$\begin{aligned} &u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \\ &u(t_0) = u_1,\ u'(t_0) = u_2, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_n \end{aligned} \tag{1.14}$$

je ekvivalentní počáteční úloze

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.15}$$

kde

$$y_0 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T.$$

Naopak lze pro každou složku řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic nalézt diferenciální rovnici nejvýše n-tého řádu takovou, že je tato složka obecným řešením nalezené diferenciální rovnice. Postup lze popsat slovy:

- Vybereme si rovnici na jejíž levé straně je první derivace hledané složky řešení a tuto derivujeme. Do pravé strany derivované rovnice dosadíme pravé strany odpovídajících derivací v původním systému. Získáme tak rovnici na jejíž levé straně stojí druhá derivace hledané složky řešení a na pravé straně lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Tento postup ještě $n-1$ krát opakujeme a získáme tak systém rovnic na jejichž jedné straně stojí pouze derivace vybrané složky řešení a na druhé lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Takto získaný systém, který je vzhledem nederivovaným složkám řešení systémem lineárních (algebraických) rovnic vyřešíme a toto řešení má pro zvolenou složku řešení tvar hledané lineární diferenciální rovnice nejvýše n řádu.

Tato skutečnost ukazuje na ekvivalenci řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a řešení diferenciální rovnice nejvýše n-tého řádu. Tento postup nazýváme eliminační metodou řešení systému n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Obvykle postupujeme tak, že z jedné rovnice určíme jednu neznámou jako funkci ostatních neznámých a dosadíme ji do zbývajících rovnic. Obdržíme tak systém $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých. V tomto sytému jsou ovšem i derivace vyšších řádů. Postup dále opakujeme. Uvedený postup je možné s výhodou použít na systém dvou lineárních diferenciálních rovnic o dvou neznámých.

Příklad 8. Nalezněte obecné řešení nehomogenního systému

$$\begin{array}{rlrcl} x_1'(t) = & 2x_1(t)- & x_2(t) & + & 1-2t+e^t \\ x_2'(t) = & 4x_1(t)- & 3x_2(t) & - & 4t+e^t. \end{array}$$

Řešení: Z první rovnice určíme funkci $x_2(t)$

$$x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 1 - 2t + e^t \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t \tag{1.16}$$

a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$-x_1''(t) + 2x_1'(t) - 2 + e^t = 4x_1(t) - 3(-x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^{-t}) - 4t + e^t$$

$$x_1''(t) + x_1'(t) - 2x_1(t) = 1 - 2t + 3e^t.$$

Nejdříve stanovíme obecné řešení rovnice homogenní pomocí charakteristické rovnice:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

a obecné řešení homogenní rovnice je $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$. Partikulární řešení pomocí principu superpozice předpovíme ve tvaru:

$$X_1(t) = A + Bt + Cte^t \Rightarrow X_1'(t) = B + Ce^t(t+1) \Rightarrow X_1''(t) = Ce^t(t+2).$$

Dosadíme do rovnice a z rovnosti určíme zatím neznámé konstanty:

$$\begin{aligned} Ce^t(t+2) + B + Ce^t(t+1) - 2+ &= 1 - 2t - 3e^t \\ B - 2A - 2Bt + 3Ce^t &= 1 - 2t + 3e^t. \end{aligned}$$

Konstanty $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ dosadíme do předpovězeného tvaru partikulárního řešení a dostáváme obecné řešení:

$$x_1(t) = C_1 e^t + c_2 e^{-2t} + t(e^t + 1).$$

Toto řešení dosadíme do (9) a získáme i druhou složku řešení původního systému:

$$x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t =$$

$$-(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} + e^t(t+1)+1) + 2(C_1e^t + C_2e^{-2t} + t(e^t+1)) + 1 - 2t + e^t = C_1e^t + 4C_2e^{-2t} + te^t.$$

Obě složky tvoří řešení systému a můžeme je zapsat pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} t(e^t+1) \\ te^t \end{pmatrix}.$$

Příklad 9. Nalezněte obecné řešení homogenního systému

$$\begin{array}{rrrr} x_1'(t) = & x_1(t)- & x_2(t)+ & x_3(t) \\ x_2'(t) = & -x_1(t)- & x_2(t)+ & x_3(t) \\ x_3'(t) = & x_1(t)+ & x_2(t)+ & x_3(t) \end{array}.$$

Řešení: Z první rovnice určíme funkci $x_3(t)$

$$x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = x_1'(t) - x_1(t) + x_2(t)$$

a dosadíme ji do druhé a třetí rovnice:

$$\begin{array}{rl} x_2'(t) = & x_1'(t) - 2x_1(t) \\ x_1''(t) - x_1'(t) + x_2'(t) = & x_1'(t) + 2x_2(t) \end{array}.$$

Odečtením první rovnice ke druhé získáme vyjádření proměnné $x_2(t)$:

$$x_1''(t) - x_1'(t) - 2x_1(t) = 2x_2(t).$$

Dosazením tohoto vyjádření do rovnice dostáváme rovnici pouze pro proměnnou $x_1(t)$

$$x_1''' - x_1'' - 2x_1' = 2(x_1' - 2x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1''' - x_1'' - 4x_1' + 4x_1 = 0. \tag{1.17}$$

S využitím kořenů charakteristické rovnice:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

dostáváme obecné řešení rovnice pro proměnnou $x_1(t)$

$$x_1(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{2t} + C_3 \mathrm{e}^{-2t}.$$

Všechny složky tvoří řešení systému a můžeme je zapsat pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.$$

Poznámka 1.13. Uvedený postup snižuje počet operací ve srovnání s robustním postupem, kdybychom derivovali postupně derivovali dvakrát první rovnici a za derivace na pravé straně bychom dosazovali pravé strany původních rovnic. Po té bychom rovnici 1.17 získali jako řešení systému lineárních rovnic, ketré by měly na pravé straně derivace proměnné $x_1(t)$.

1.4 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty - řešení pomocí vlastních vektorů

V předchozím jsme ukázali, že pro jednu složku řešení systému lineárních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty je možné nalézt lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s kontaktními koeficienty takovou, že řešení této rovnice je složkou řešení původního systému. V případě systému s málo proměnnými (2-3) je možné tzv. eliminační metodou bez větších problémů nalézt řešení. Pro rozsáhlejší systémy uvedeme postup, pomocí kterého lze řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty pomocí konstrukce tzv. vlastních vektorů. Metoda umožňuje nalézt n-tici lineárně nezávislých řešení soustavy. Lineární kombinace těchto řešení dá obecné řešení soustavy. Při použití metody budeme pracovat s charakteristickou rovnicí a s jejími kořeny. Cílem je sestavit obecné řešení v závislosti na tom, jaké tyto kořeny jsou (reálné, komplexní, násobné).

1.4.1 Idea řešení

Zabývejme se soustavou lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty ve tvaru

$$x' = Ax, \tag{1.18}$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektorem hledaného řešení s nezávisle proměnnou t, tj. $x = x(t)$. Předpokládejme, že řešení soustavy (1.18) má tvar

$$x = v\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{1.19}$$

kde λ je vhodné číslo a v je vhodný konstantní vektor. Uvažujme pouze tzv. netriviální řešení $x(t) \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$. Po dosazení tvaru (1.19) do soustavy (1.18) dostáváme

$$\lambda v\mathrm{e}^{\lambda t} = Av\mathrm{e}^{\lambda t}$$

což lze postupnými úpravami převést na rovnici s jedním výrazem $\mathrm{e}^{\lambda t}$:

$$(Av)\mathrm{e}^{\lambda t} - (\lambda v)\mathrm{e}^{\lambda t} = (A - \lambda E)v\mathrm{e}^{\lambda t} = o \tag{1.20}$$

Kde E je čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je nulový vektor. Ve vektorovém vztahu (1.20) lze krátit výrazem $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Dostáváme vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \tag{1.21}$$

Tento vztah (1.21) nezávisí na proměnné t a je vztahem mezi konstantní maticí A, neznámým (konstantním) vektorem v a hledaným číslem λ. Soustava (1.21) je lineární algebraickou soustavou rovnic vzhledem ke složkám vektoru v. Aby soustava (1.21) měla nenulové řešení v, musí být její matice singulární, tedy platí

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{1.22}$$

Rovnice (1.22) má na levé straně polynom proměnné λ a je stupně n. Takto definovaný polynom

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) \tag{1.23}$$

nazýváme **charakteristickým polynomem** a samotnou rovnici (1.22) nazýváme **charakteristickou rovnicí**. Kořeny **charakteristické rovnice** nazýváme **vlastní čísla** matice A. Je-li $\lambda = \widetilde{\lambda}$ vlastním číslem matice A a vektor $v = \widetilde{v}$ je řešením soustavy (1.21), tj. soustavy

$$(A - \widetilde{\lambda}E)\widetilde{v} = o,$$

nazýváme vektor $\widetilde{v}$ **vlastním vektorem** matice A (který přísluší vlastnímu číslu $\widetilde{\lambda}$). Pro každou dvojici vlastního čísla a odpovídajícího vlastního vektoru $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{v}$ je vektorová funkce

$$x = \widetilde{v}\exp(\widetilde{\lambda}t)$$

jedním z řešení soustavy (1.18). Ze základní věty algebry plyne, že takovýchto vlastních čísel je n, což odpovídá počtu hledaných lineárně nezávislých řešení, potřebných pro fundamentální řešení.

1.4.2 Případ reálných nenásobných kořenů charakteristické rovnice

V případě, že má charakteristická rovnice (1.22) n navzájem různých vlastních čísel, která jsou reálná

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \tag{1.24}$$

a vektory

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \tag{1.25}$$

jsou jim odpovídající vlastní vektory, je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (1.18) jednoduchá. Snadno lze prověřit, že tato soustava vlastních vektorů je lineárně nezávislá. Pak z obecné teorie lineárních soustav okamžitě vyplývá tento výsledek:

Věta 1.14 (případ nenásobných vlastních čísel)**.** *Má-li matice A celkem n navzájem různých vlastních čísel (1.24), kterým odpovídají vlastní vektory (1.25), potom n vektorových funkcí*

$$v_1 \exp(\lambda_1 t), v_2 \exp(\lambda_2 t), \ldots, v_n \exp(\lambda_n t) \tag{1.26}$$

tvoří **fundamentální systém řešení** *soustavy rovnic (1.18). Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru:*

$$x(t) = C_1 v_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 v_2 \exp(\lambda_2 t) + \cdots + C_n v_n \exp(\lambda_n t), \tag{1.27}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

Příklad 10. Metodou popsanou výše určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & 2x_1 & - & 2x_2, \\ x_2' & = & -3x_1 & + & 3x_2. \end{array} \tag{1.28}$$

Řešení. Soustava (1.28) je speciálním případem soustavy (1.18) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Tato jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 5$. Můžeme tedy Větu 1.14. Hledáme proto vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. Prvním vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Oba řádky jsou lineárně závislé a pro souřadnice vlastního vektoru platí

$$v_{11} - v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (1, 1)^T$. Řešení soustavy (1.28) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (1, 1)^T.$$

Podobně u druhého vlastního čísla $\lambda_2 = 5$ pro vlastní vektor $v_21 = (v_{21}, v_{22})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$ platí:

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Tato soustava se redukuje na závislost

$$-3v_{21} - 2v_{22} = 0$$

a jedno její nenulové řešení je například

$$x_2(t) = (2, -3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (1.28) je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$(1, 1)^T \quad \text{a} \quad (2, -3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(1, 1)^T + C_2(2, -3)^T \cdot \mathrm{e}^{5t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{5t}$$

□

1.4.3 Případ komplexních nenásobných vlastních čísel

Nechť má charakteristická rovnice (1.22) komplexní kořen

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot i,$$

kde i je komplexní jednotka. Potom je kořenem charakteristické rovnice i číslo komplexně sdružené s kořenem λ:

$$\overline{\lambda} = \alpha - \beta \cdot i.$$

Analogicky vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ v je komplexně sdružený s vektorem odpovídajícímu komplexně sdruženému s původním vlastním číslem tedy platí

$$(A - \lambda E)v = o \Leftrightarrow (A - \overline{\lambda} E)\overline{v} = o. \tag{1.29}$$

To tedy znamená, že je-li vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (1.18), pak je také vektor

$$\overline{x}(t) = \overline{v} \exp(\overline{\lambda} t)$$

řešením této soustavy. místo této dvojice komplexně sdružených funkcí budeme v reálném oboru pracovat s jejich lineárními kombinacemi, které budou reálné

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t)+\overline{x}(t)\right), \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) &= \frac{1}{2i}\left(x(t)-\overline{x}(t)\right). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Tato dvě reálná řešení $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$ jsou **lineárně nezávislá**.

Věta 1.15 (komplexní nenásobná vlastní čísla)**.** *Je-li komplexní číslo $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ vlastním číslem matice A a je-li v odpovídající vlastní vektor, pak má soustava (1.21) dvě lineárně nezávislá a reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ daná vztahy*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re}\left[v \exp(\lambda t)\right], \\ x_2(t) &= \operatorname{Im}\left[v \exp(\lambda t)\right]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Příklad 11. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Řešení. Soustava (1.32) je speciálním případem soustavy (1.18) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme vlastní čísla matice A z charakteristické rovnice

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

Hledaná vlastní čísla jsou komplexní: $\lambda_1 = 2+i$ a $\lambda_2 = 2-i$, což dvojice komplexně sdružených vlastních čísel. Proto využijeme Větu 1.15.

Určeme nyní vlastní vektory, odpovídající prvnímu vlastnímu číslu. Vlastní vektor $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 2 + i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot v_1 = o..$$

První řádek je i-násobkem druhého, proto se soustava redukuje na jediný vztah

$$-iv_{11} + v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení můžeme volit např. $v_1 = (1, i)^T$. Řešení soustavy (1.32) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{(2+i)t} = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}(\cos t + i \sin t) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (1.30) nebo (1.31) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení, tj. reálný fundamentální systém $y_1(t)$, $y_1(t)$ soustavy (1.32):

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t)+\overline{x}(t)) = \mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},\\
x_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}(x(t)-\overline{x}(t)) = \mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Obecné řešení $x(t)$ soustavy (1.32) je dáno lineární kombinaci

$$
x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\cdot\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}
$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. □

V následujícím příkladě si ukážeme, že při hledání řešení systému, který nemá násobná vlastní čísla, budeme obě věty kombinovat. Postup již nebudeme detailně rozepisovat.

Příklad 12. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -2x_1 + 5x_2, - 5x_3\\
x_2' &= - x_2 + 2x_3,\\
x_3' &= x_1 - 3x_2 + 4x_3.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

Řešení. Soustava (1.33) je speciálním případem soustavy (1.18) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určíme vlastní čísla matice A z charakteristické rovnice

$$0 = \det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & -5 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)[\lambda^2 + 1] = 0.$$

Hledané kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$ jsou tři nenásobná a různá vlastní čísla. Jedno reálné a dvě komplexně sdružená. Proto při hledání obecného řešení soustavy (1.35) využijeme v případě kořene $\lambda_1 = 1$ Větu 1.14 a v případě komplexně sdružených kořenů $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$ využijeme Větu 1.15.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, je-li první proměnná nulová a druhá rovna třetí. Jedno takové nenulové řešení je například $v_1 = (0, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (1.33) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (0, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda E)v = \begin{pmatrix} -2-i & 5 & -5 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o..$$

Přičteme-li k prvnímu řádku třetí řádek vynásobený číslem $2 + i$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1-3i & 4+2i \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Dále přičtěme k prvnímu řádku -(2+i) násobek druhého řádku a získáme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Nyní snadno určíme jedno nenulové řešení. Je jím například vektor $v_2 = (1-3i, 2, 1+i)^T$. Řešení soustavy (1.33) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1-3i, 2, 1+i)^T \cdot (\cos t + i \sin t) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t + i(\sin t - 3\cos t) \\ 2\cos + 2i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (1.30) nebo (1.31) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení $x_2(t)$, $x_3(t)$ soustavy (1.33), odpovídajících komplexnímu řešení $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Re} x(t) &= \frac{1}{2}(x(t) + \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ y_3(t) &= \operatorname{Im} x_2(t) &= \frac{1}{2i}(x(t) - \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení soustavy (1.33) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos t+3\sin t\\2\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sin t-3\cos t\\2\sin t\\\sin t+\cos t\end{pmatrix}.$$

Její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t+3\sin t\\2\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\sin t-3\cos t\\2\sin t\\\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. □

Shrnutí

Tento tutoriál byl věnován řešení lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Ukázali jsme metodu eliminační, která spočívá v převodu tohoto systému na jednu rovnici, ale n-tého řádu. Dále jsme pomocí kořenů charakteristické rovnice a vlastních vektorů zkonstruovli fundamentální systém řešení, jestliže matice neobsahovala násobné vlastní čísla. Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní.

1.4.4 Řešené příklady

Příklad 13. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Řešení. Soustava (1.34) je speciálním případem soustavy (1.18) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (1.34) opět využít Větu 1.14.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11} & - & 2v_{12} & + & v_{13} & = & 0, \\ v_{11} & + & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (1.34) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{21} & - & v_{22} & + & v_{23} & = & 0, \\ & - & 2v_{22} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (1.34) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3v_{31} & - & v_{32} & + & v_{33} & = & 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} & + & v_{33} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (1.34) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (1.34) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t, \;\; (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \text{a} \quad (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_2(1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3(-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t} =$$

$$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{2t} - C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) &= C_1\mathrm{e}^{t} - 2C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

□

Příklad 14. Nalezněte řešení soustavy rovnic (1.34) splňující podmínku

$$x(0) = (1, 0, -1)^T. \tag{1.36}$$

Řešení. Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 13. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1, C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapíšeme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} -C_1 & + & C_2 & - & C_3 & = & 1, \\ C_1 & & & - & 2C_3 & = & 0, \\ C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -1. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}\,.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (1.35) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (1.36):

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1(t) & = & & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & + & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & - & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & + & \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & - & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} & - & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}. \end{array}$$

$\square$