Tutoiál č. 3

Metoda vlastních čísel a zobecněných vektorů pro systémy LDR s konstantními koeficienty.
Weyrova metoda

0.1 Řešení systémů LDR pomocí zobecněných vektorů – Weyrova metoda

V minulém tutoriálu jsme se zabývali soustavou lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty.

$$x' = Ax, \tag{1}$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a tento vektor je vektorem hledaného řešení, zavisejícího na (nezávislé) proměnné t, tj. $x = x(t)$. Za předpokladu, že řešení soustavy (1) má tvar

$$x = v \exp(\lambda t), \tag{2}$$

kde λ je vhodné reálné nebo komplexní číslo a v je vhodný (reálný či komplexní) konstantní vektor jsme odvodili:

$$(Av) \exp(\lambda t) - (\lambda v) \exp(\lambda t) = (A - \lambda E) v \exp(\lambda t) = o, \tag{3}$$

ve kterém je E čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je již zmíněný nulový vektor. Po vykrátcení výrazem $\exp(\lambda t)$ jsme dostali vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \tag{4}$$

Z teorie lineárních soustav vyplývá, že soustava (4) bude mít nenulové řešení v pouze tehdy, když bude její matice singulární. Musí tedy být

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{5}$$

Rovnice (5) je polynomiální rovnicí (stupně n) vzhledem k λ. Obecně má rovnice (5) celkem n kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát kolik je jeho násobnost. V minulém tutoriálu jsme řešili případ reálných a navzájem různých kořenů charakteristické rovnice a případ komplexních nenásobných vlastních čísel. Abychom mohli uvedenou metodu použít na každý systém s konstantními koeficienty musíme vyřešit i případ násobných vlastních čísel. Bylo ukázáno, že v případě nenásobných kořenů jsme našli ke každému kořeni jedno reálné řešení, která jsou lineárně nezávislá. Komplexní kořeny lze uspořádat do dvojic komplexně sdružených kořenů a této dvojici se přiřadí také dvojice lineárně nezávislých reálných řešení. V případech, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice (3) násobné je konstrukce fundamentálního systému komplikovanější. Ke každému násobnému vlastnímu číslu λ musíme nalézt přesně tolik lineárně nezávislých řešení, jaká je jeho násobnost. Mezi těmito řešeními jsou řešení v předpokládaném tvaru, tj. řešení ve tvaru (2). Může se ovšem stát, počet vlastních vektorů k násobnému vlastnímu číslu (geometrická násobnost) je menší než jeho násobnost jako kořenu charakteristické rovnice (algebraická násobnost). Postup jak tuto komplikaci řešit popíšeme obecně a budeme je ilustrovat pro reálné kořeny. Pro násobné komplexní kořeny postupujeme podobně jako v případě nenásobných komplexních čísel dostaneme i v tomto případě dvojice komplexně sdružených vektorů a tedy dvojice reálných vektorů, které jsou reálnými a imaginárními částmi komplexních řešení. Uveďme nyní postup, vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy (1).

0.1.1 Zobecněné vlastní vektory

Vektor v nazýváme **zobecněným vlastním vektorem hodnosti** r, odpovídající vlastnímu číslu λ, jestliže platí

$$(A - \lambda E)^r v = o \tag{6}$$

a

$$(A - \lambda E)^{r-1} v \neq o. \tag{7}$$

Je-li dán zobecněný vlastní vektor v hodnosti r, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak k němu definujeme odpovídající **řetězec zobecněných vlastních vektorů**

$$v_1, v_2, \dots, v_r \tag{8}$$

délky r takto:

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} v_r & = & v, & & & \\ v_{r-1} & = & (A-\lambda E)v_r & = & (A-\lambda E)v, \\ v_{r-2} & = & (A-\lambda E)v_{r-1} & = & (A-\lambda E)^2 v, \\ \dots & & & & \\ v_1 & = & (A-\lambda E)v_2 & = & (A-\lambda E)^{r-1} v. \end{array} \right. \tag{9}$$

Poznamenejme, že z uvedené podmínky (6) okamžitě vyplývá, že vektor v_1 v řetězci (8) je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ, neboť dle (7) a (9) je $v_1 \neq o$ a dle (6) je $(A - \lambda E)v_1 = o$.

Jednomu vlastnímu číslu může odpovídat několik různých řetězců, které mohou mít různé délky. Bez důkazu uveďme následující poznatky o zobecněných vlastních vektorech (příslušné důkazy k těmto a k dalším poznatkům jsou obsaženy v některých učebnicích algebry).

Věta 0.1. *Všechny vektory řetězce (8) jsou lineárně nezávislé. Odpovídá-li jednomu vlastnímu číslu několik zobecněných vlastních vektorů, které nejsou lineárně závislé, pak je množina vektorů tvořená všemi příslušnými řetězci lineárně nezávislou množinou. Součet délek všech lineárně nezávislých řetězců odpovídajících danému vlastnímu číslu je roven jeho násobnosti. Zobecněné vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

0.1.2 Metoda vlastních vektorů - konstrukce fundamentálního systému

Poznatky uvedené ve Větě 0.1 jsou teoretickým základem garantujícím správnost a úplnost níže uvedeného postupu konstrukce fundamentálního systému řešení soustavy (1). Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice A, vektor v je zobecněným vlastním vektorem hodnosti s a (8) je odpovídající řetězec vlastních vektorů. Jak bylo uvedeno výše, platí

$$(A - \lambda E)v_1 = o. \tag{10}$$

Jinými slovy, v_1 je vlastní vektor matice A, příslušející vlastnímu číslu λ. Proto je vektor

$$y_1 := v_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{11}$$

řešením soustavy (1). Definujme vektor

$$y_2 := (v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{12}$$

a ukažme, že je řešením soustavy (1). Skutečně, pomocí vztahů (9) (ze kterých mj. vyplývá $(A-\lambda E)v_2 = v_1$, tj. $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$) a (10) (tj. $\lambda v_1 = Av_1$) dostáváme

$$\begin{aligned} y_2' = \left[(v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t}\right]' = v_1\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda(v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} = \left[(\lambda v_1 t) + \lambda v_2 + v_1\right]\mathrm{e}^{\lambda t} = \\ t\left(\lambda v_1 \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + (\lambda v_2 + v_1)\mathrm{e}^{\lambda t} = t\left(A v_1 \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + A v_2 \mathrm{e}^{\lambda t} = \\ A\left(v_1 t + v_2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = A y_2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení, že vektor y_2 je řešením soustavy (1) prověřeno. Definujme další vektor

$$y_3 := \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

a také ukažme, že je řešením soustavy (1). Dostáváme (kromě výše uvedených vztahů použijeme ještě $Av_3 = \lambda v_3 + v_2$)

$$\begin{aligned} y_3' = \left[\left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\right]' = \left(v_1 t + v_2\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + \\ \lambda\left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = \left(\lambda v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + \left(\lambda v_2 + v_1\right)t + \left(\lambda v_3 + v_2\right)\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = \end{aligned}$$

$$\frac{t^2}{2}\left(\lambda v_1 \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + t(\lambda v_2 + v_1)\mathrm{e}^{\lambda t} + (\lambda v_3 + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} =$$
$$\frac{t^2}{2}\left(A v_1 \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + tAv_2 \mathrm{e}^{\lambda t} + Av_3 \mathrm{e}^{\lambda t} =$$
$$A\left(v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t} = Ay_3.$$

Podobným způsobem konstruujeme další vektory až po vektor

$$y_r := \left(v_1 \cdot \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + v_2 \cdot \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \cdots + v_{r-1}t + v_r\right)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Protože jsou vektory řetězce (8) dle Věty 0.1 lineárně nezávislé a

$$y_1(0) = v_1, y_2(0) = v_2, \ldots, y_r(0) = v_r,$$

jsou vektory

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_r(t) \tag{13}$$

také lineárně nezávislé. Získali jsme tedy s lineárně nezávislých řešení (13) soustavy (1).

Věta 0.2. *Množina všech vektorů (konstruovaných výše uvedeným způsobem) odpovídajících všem vlastním číslům a všem jim odpovídajícím řetězcům zobecněných vlastních vektorů tvoří* **fundamentální systém** *soustavy* (**??**).

Stranou jsme prozatím nechali otázku kolik zobecněných vlastních vektorů odpovídá násobnému vlastnímu číslu λ. Odpověď na ni vyplývá z teorie algebraických lineárních systémů a je obsažena v následující větě. Označme hodnost matice

$$A - \lambda E \tag{14}$$

písmenem h a její nulitu písmenem ν, kde $\nu = n - h$.

Věta 0.3. *Počet zobecněných vlastních vektorů odpovídajících násobnému vlastnímu číslu λ je roven nulitě ν matice (14).*

Ilustrujme popsaný postup několika příklady.

Příklad 1. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' &=& x_1 &+& x_2 &-& x_3, \\ x_2' &=& -x_1 &+& x_2 &-& x_3, \\ x_3' &=& &-& x_2 &+& 2x_3. \end{array} \tag{15}$$

Řešení: Soustava (15) je speciálním případem soustavy (**??**) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} v_{11} & & & + & v_{13} & = & 0, \\ & & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (15) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o. \tag{16}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (16) má hodnost $h = 2$ a nulitu $\nu = 3 - 2 = 1$. Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ tedy bude odpovídat jeden zobecněný vlastní vektor hodnosti $r = 2$. Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcl} & & v_{22} & - & v_{23} & = & 0, \\ v_{21} & & & + & v_{23} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (-1, 1, 1)^T$. Jedno z řešení soustavy (15) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Vytvořme řetězec zobecněných vlastních vektorů, odpovídajících uvažovanému vlastnímu číslu. Hledejme nenulový vektor

$$v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T,$$

splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = v_2.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádek jsou lineárně závislé. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & v_{32} & - & v_{33} & = & -1, \\ -v_{31} & & & - & v_{33} & = & 1 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-2, 0, 1)^T$. Další řešení soustavy (15) odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (v_2 t + v_3) \cdot \mathrm{e}^t = \left((-1, 1, 1)^T t + (-2, 0, 1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t.$$

Všechna tři řešení soustavy (15) tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$\begin{aligned} x(t) = C_1(-1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t + \\ C_3 \left((-1, 1, 1)^T t + (-2, 0, 1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t = \\ C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_3 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

0.1.3 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla věnována řešení lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Pomocí kořenů charakteristické rovnice byly sestaveny vlastní vektory a byl zkonstruován fundamentální systém řešení. Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní a násobné či nenásobné. V případě násobných kořenů se některá řešení lišila od původně předpokládaného tvaru. Vždy však jedno z řešení tento tvar mělo.

0.1.4 Řešené příklady

Příklad 2. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' &=& x_1 &-& x_2 &+& x_3, \\ x_2' &=& -x_1 &-& x_2 &+& x_3, \\ x_3' &=& x_1 &+& x_2 &+& x_3. \end{array} \tag{17}$$

Řešení: Soustava (17) je speciálním případem soustavy (1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (17) opět využít Větu **??**.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11} & - & 2v_{12} & + & v_{13} & = & 0, \\ v_{11} & + & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{21} & - & v_{22} & + & v_{23} & = & 0, \\ & - & 2v_{22} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3v_{31} & - & v_{32} & + & v_{33} & = & 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} & + & v_{33} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (17) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^t,\ \ (1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \text{a} \quad (-1,-2,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_2(1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3(-1,-2,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \\ C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & -\ C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & - & C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & & & - & 2C_3\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & C_1\mathrm{e}^t & + & C_2\mathrm{e}^{2t} & + & C_3\mathrm{e}^{-2t}. \end{array} \tag{18}$$

Příklad 3. Nalezněte řešení soustavy rovnic (17) splňující podmínku

$$x(0) = (1,0,-1)^T. \tag{19}$$

Řešení: Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 2. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1, C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} -C_1 & + & C_2 & - & C_3 & = & 1, \\ C_1 & & & - & 2C_3 & = & 0, \\ C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -1. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (18) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (19):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \quad \frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

Příklad 4. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Řešení: Soustava (14) je speciálním případem soustavy (1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno: $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$ a je trojnásobné.

Hledejme odpovídající vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T.$$

Bude jím libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o. \tag{21}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (21) má hodnost $h = 1$ a nulitu $\nu = 3 - 1 = 2$. Vlastnímu číslu tedy budou odpovídat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Jsou jimi například vektory $v_1^{1*} = (-1, 0, 1)^T$ a $v_1^{2*} = (0, 1, -1)^T$. Jeden z vlastních vektorů však musí být zobecněným vlastním vektorem hodnosti 2. Bude to takový vektor, pro který existuje netriviální řešení v_2 jedné ze soustav

$$(A - \lambda E)v_2 \;\; = \;\; v_1^{i*}, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Snadno ověříme, že každá soustava (22) má pouze triviální řešení $v_2 = (0, 0, 0)$. Výběr vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ tedy neumožňuje najít nenulový vektor v_2, přestože dle teoretických poznatků takový vektor musí (je-li pravá strana vhodně zvolena) existovat.

Pokusme se vybrat pravou stranu v soustavě (22) tak, aby nenulový vektor v_2 existoval. Libovolná lineární kombinace

$$\alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2*}$$

je opět vlastním vektorem (který je pro $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nenulový). Jinými slovy - tato lineární kombinace je obecným řešením soustavy (21). Pokusme se určit parametry α a β tak, aby soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \quad = \quad \alpha v_1^{1*} + \beta v_1^2 \tag{23}$$

měla nenulové řešení. Aplikací Frobeniovy věty (hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené) ihned dospíváme k požadavku $\alpha = \beta/2$. Volme například $\beta = 2$, $\alpha = 1$ a místo původní dvojice vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ definujme novou dvojici

$$v_1^1 = v_1^{1*}, \quad v_1^2 = v_1^{1*} + 2v_1^{2*} = (-1, 2, -1)^T.$$

Soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \quad = \quad v_1^1 \tag{24}$$

má netriviální řešení $v_2 = (-1, 1, -1)$. Fundamentální systém řešení soustavy (14) je tvořen trojicí vektorů

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] \cdot \mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1(t) & = & -(C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_2(t) & = & (2C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & + & 2C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_3(t) & = & (C_1 - C_2 - C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t.
\end{array}
$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

0.2 Řešený příklad pomocí programu MAPLE

Uvedený postup je realizován pomocí matematického programu MAPLE v klasickém sešitě.

```
> with(linalg);
> assume(a,real);assume(t,real);
```

[*BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian*]

```
> MA := matrix([[4*a-12, -3*a+12, -a+6, 6*a], [-2*a+10, 3*a-6,
```

```
6*a], [-2*a, -3*a, -a, 6]]);
```

$$MA := \begin{bmatrix} 4\,a\sim - 12 & -3\,a\sim + 12 & -a\sim + 6 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim + 10 & 3\,a\sim - 6 & -a\sim + 2 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim + 6 & -3\,a\sim + 12 & 5\,a\sim - 12 & 6\,a\sim \\ -2\,a\sim & -3\,a\sim & -a\sim & 6 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvectors(MA);
```

$$[6 + 6\,I\,a\sim, 1, \{[-I, -I, -I, 1]\}], [6 - 6\,I\,a\sim, 1, \{[I, I, I, 1]\}],$$
$$[-18 + 6\,a\sim, 2, \{[-1, 1, -1, 0]\}]$$

```
> r1:=evalm(exp((-18+6*a)*t)*vector([-1, 1, -1,
0]));Mchar:=evalm(MA-(-
18+6*a)*matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])):v2:
=linsolve(Mchar,vector([-1, 1, -1, 0])):r2:=evalm((t*vector([-
1, 1, -1, 0])+v2)*exp((-18+6*a)*t));
```

$$r1 := [-\mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, \mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, -\mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)}, 0]$$

$$r2 := \left[\mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} \left(-t\sim + \_t_1 + \frac{1}{2}\right), \mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} \left(t\sim - \_t_1 - \frac{1}{3}\right), \mathbf{e}^{((-18+6\,a\sim)\,t\sim)} (-t\sim + \_t_1), 0 \right]$$

```
> komplvektor:=evalm(exp((6+6*I*a)*t)*vector([-I, -I, -I, 1]));
```

$$komplvektor := [-I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, -I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, -I\,\mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}, \mathbf{e}^{((6+6\,I\,a\sim)\,t\sim)}]$$

```
> r3:=map(x->Re(x), komplvektor);r4:=map(x->Im(x),
komplvektor);
```

$$r3 := [\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim a\sim)]$$

$$r4 := [-\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim a\sim), -\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim a\sim), -\mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \cos(6\,t\sim a\sim), \mathbf{e}^{(6\,t\sim)} \sin(6\,t\sim a\sim)]$$

```
>
>
```