Tutoriál č. 5

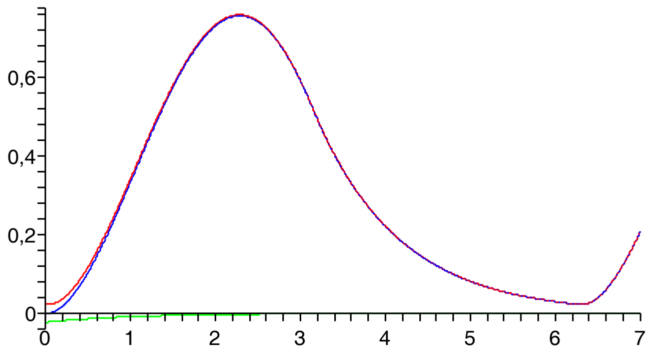
Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Planární autonomní diferenciální systém

Úvod do parciálních diferenciálních rovnic

0.1 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

V předmětu BMA2 jsme pomocí Laplaceovy transformace řešili jednoduchou diferenciální rovnici s periodickou pravou stranou $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$ spolu s nulovými počátečními podmínkami $y(0) = 0$. Ukázali jsme, že je možné řešení rovnice vyjádřit ve tvaru součtu periodického řešení a funkce, která má pro větší t velmi malé hodnoty, tedy řešení splývá s periodickým řešením viz obrázek Tato situace se opakuje



Obrázek 1: periodické řešení řešení blížící se 0 řešení počáteční

i pro jiné počáteční podmínky a tím je periodické řešení výjimečné.

Obecně studujeme chování řešení systému diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{1}$$

který může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů, jejichž jedno chování je popsáno konkrétním řešením $\mathbf{y}$ systému (**??**). To závisí na hodnotách stavových proměnných v počátečním okamžiku t_0 kdy stavové proměnné systému nabývají hodnotu $\mathbf{y}(t_0)$. Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty $\mathbf{y}_0$ stavových proměnných $\mathbf{y}$ se budou v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $v(t_0)$ o méně než δ, budou se vypočtené hodnoty $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ stavových proměnných v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $v(t)$ $\forall t \in \langle t_0, t_1\rangle$ o méně než ε.

Z praktických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně veliké i pro libovolně veliké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích $t_0, \mathbf{y}_0$, ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Analogicky při sestavování matematického modelu nějakého fyzikální systému S zanedbáváme působení poruch, které nejsme schopni do modelu zahrnout. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému (**??**) a budeme předpokládat, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ má **triviální řešení**, které budeme značit $\mathbf{o}$.

Toto omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení $\mathbf{o}$ nezmenšuje obecnost dalších úvah: Vyšetřujme řešení $\mathbf{u}$ systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \tag{2}$$

definované na nějakém intervalu I. Proveďme v systému (**??**) substituci

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}\,. \tag{3}$$

Jelikož funkce $\mathbf{u}$ je řešením systému (**??**), platí $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t)) \quad \forall t \in I$, a tedy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \mathbf{u}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y} + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u}) \tag{4}$$

Označíme-li $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y} + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{u})$, dostaneme z (**??**) systém $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\quad \mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ s triviálním řešením $\mathbf{o}$. Jeho stabilita se pak transformací (**??**) přenáší na řešení $\mathbf{u}$ systému (**??**).

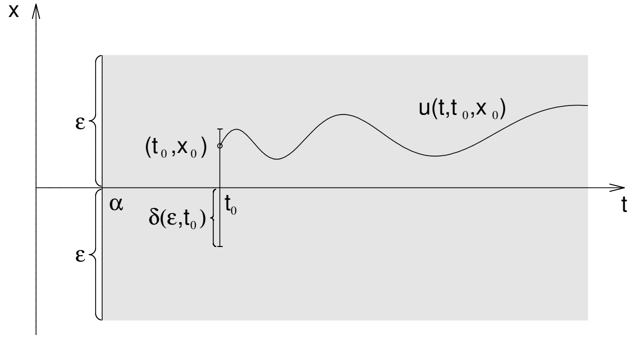
Dále předpokládejme,že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}\ \forall t > \alpha$ pro každý bod $(t_0, \mathbf{y}_0)$ $(t_0 \in I = (\alpha, \infty))$ je Cauchyova úloha daná počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ a systémem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{5}$$

jednoznačně řešitelná.

Definice 0.1. Řekneme, že triviální řešení $\mathbf{o}$ systému (**??**) je **stabilní** (viz obrázek **??**), jestliže ke každému $t_0 > \alpha$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny počáteční hodnoty $\mathbf{y}_0 \in H$, $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ a pro všechna $t \geq t_0$ platí, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ Cauchyovy úlohy (**??**) splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon\,. \tag{6}$$



Obrázek 2: Stabilní systém

Příklad 0.2. Ukažte, že triviální řešení rovnice

$$y' = ky$$

je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení. Funkce $f(t, y) = ky$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné y pro všechna $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty, I = (-\infty, \infty), H = \mathbb{R}, G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha

$$y' = ky\,, \quad y(t_0) = y_0$$

má řešení $u(t, t_0, y_0) = y_0 \mathrm{e}^{k(t-t_0)}$, $t \in I$.

$$\text{Tedy} \quad |u(t, t_0, y_0)| = |\,y_0| \cdot \mathrm{e}^{k(t-t_0)} \leq |\,y_0| \quad \text{pro všechna } k \leq 0,\ t \geq t_0\,.$$

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle (**??**) platit

$$|u(t, t_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |\,x_0| < \delta\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Poznámka 0.3. V úvodním motivačním příkladu jsme měli homogenní rovnici tohoto typu s konstantou $k = -1$, což dokazuje stabilitu tam zmíněného periodického řešení.

Příklad 0.4. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 6y_2 \\ y_2' &= y_1 - 4y_2 \end{aligned} \tag{7}$$

je stabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (**??**) s počáteční podmínkou $y_1(t_0) = c_1, y_2(t_0) = c_2$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{y}_0 = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} (-3\,e^{-t+t_0} + 4)\,c_1 + (-6 + 6\,e^{-t+t_0})\,c_2 \\ (2 - 2\,e^{-t+t_0})\,c_1 + (4\,e^{-t+t_0} - 3)\,c_2 \end{bmatrix}.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| &= |\left(-3\,e^{-t+t_0} + 4\right) c_1 + \left(-6 + 6\,e^{-t+t_0}\right) c_2| + |\left(2 - 2\,e^{-t+t_0}\right) c_1 + \left(4\,e^{-t+t_0} - 3\right) c_2| \leq \\ &\leq |c_1| + |c_2| + |c_1| + |c_2| = 2\,(|c_1| + |c_2|) = 2\|\mathbf{y}_0\|\,. \end{aligned}$$

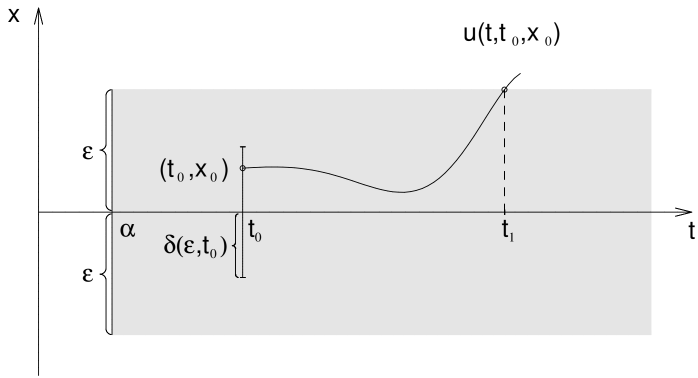
Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| \leq 2\|\mathbf{y}_0\| < 2\delta = \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Triviální řešení, které není stabilní, nazveme **nestabilním**.

Volně můžeme říci, že triviální řešení systému (**??**) je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod $\mathbf{y}_0$ tak, že řešení $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε, neboli existuje $t_1 > t_0$ tak, že $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| > \varepsilon$ pro $t > t_1$ (viz obrázek **??**).



Obrázek 3: Triviální řešení není stabilní.

Příklad 0.5. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 6y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 5y_2 \end{aligned} \tag{8}$$

je nestabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (**??**) s počáteční podmínkou $y_1(t_0) = c_1, y_2(t_0) = c_2$ má řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} (4\,e^{t-t_0} - 3\,e^{2\,t-2\,t_0})\,c_1 + (6\,e^{2\,t-2\,t_0} - 6\,e^{t-t_0})\,c_2 \\ (-2\,e^{2\,t-2\,t_0} + 2\,e^{t-t_0})\,c_1 + (-3\,e^{t-t_0} + 4\,e^{2\,t-2\,t_0})\,c_2 \end{bmatrix}$$

Zvolme $\varepsilon = 1$, $t_0 = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme volit $\mathbf{y}_0 = \left(\frac{\delta}{2}\,,\,\frac{\delta}{2}\right)^T$, $t_1 > -\ln\delta$ a dostaneme odhad

$$\|\mathbf{u}(t_1, t_0, \mathbf{y}_0)\| = \|\mathbf{u}(t_1, 0, \mathbf{y}_0)\| = \left\|\begin{bmatrix} \delta(3e^{2t_1} - 2e^{t_1}) \\ \delta(2e^{2t_1} - e^{t_1}) \end{bmatrix}\right\| = \delta e^{2t_1} \left\|\begin{bmatrix} (3 - 2e^{-t_1}) \\ (2 - e^{-t_1}) \end{bmatrix}\right\| =$$
$$\delta \mathrm{e}^{2t_1} \cdot \|(1,1)\| = 2\delta \mathrm{e}^{t_1} = 2\delta \mathrm{e}^{t_1} > \delta \mathrm{e}^{-\ln\delta} = 2\delta \cdot \tfrac{2}{\delta} = 2 > \varepsilon\,.$$

Triviální řešení systému (**??**) je nestabilní. □

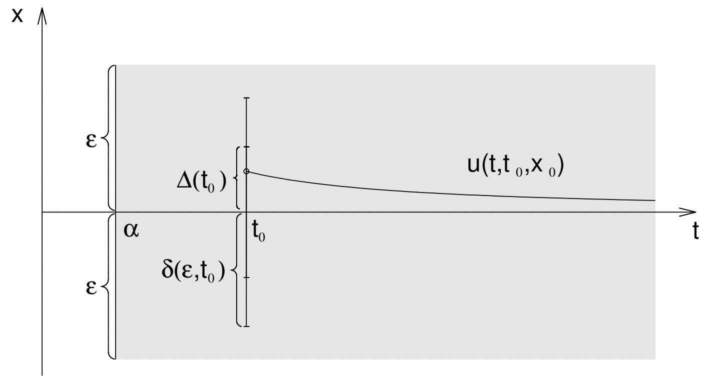
Definice 0.6. Řekneme, že triviální řešení systému $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ je **asymptoticky stabilní** (viz obrázek **??**), jestliže

i) je stabilní

ii) existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{y}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$ a každé $t_0 > \alpha$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\| = 0\,.$$

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.



Obrázek 4: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,, \tag{9}$$

kde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Pak libovolné řešení $\mathbf{u}(t)$ systému (**??**) je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, právě když triviální řešení homogenního systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:

I) Všechna řešení jsou stabilní.

II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní.

Při vyšetřování stability nehomogenního systému (**??**) se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \tag{10}$$

Věta 0.7. *Triviální řešení systému (**??**) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \leq K\,, \quad t \in I\,,$$

*kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (**??**).*

(Tedy každé řešení systému je ohraničené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém (**??**) stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničná pro $t \to \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničenosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 0.8. *Triviální řešení systému (**??**) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \to 0 \quad \textit{pro } t \to \infty \,,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ *je fundamentální matice řešení systému (**??**).*

*(Tedy všechna řešení systému (**??**) konvergují pro* $t \to \infty$ *k nule.)*

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \,, \tag{11}$$

kde $\mathbf{A}$ je konstatní reálná čtvercová matice typu (n, n).

V tomto případě je systém (**??**) speciálním případem autonomního systému $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Tedy stabilita triviálního řešení systému (**??**) je ekvivalentní s jeho stejnoměrnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému (**??**) je ekvivalentní se stejnoměrnou asymptotickou stabilitou.

Věta 0.9. *Nechť je dán systém (**??**). Jestliže všechna charakteristická čísla matice* $\mathbf{A}$ *mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice* $\mathbf{A}$ *s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka 0.10. O stabilitě lineárního systému (**??**) nelze rozhodnout pomocí věty **??** v případě, že žádné charakteristické číslo matice $\mathbf{A}$ nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí. V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. nestability, uvedené ve větě **??** jsou tedy postačující, nikoli nutné. Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující. Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$ mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému (**??**) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\,,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\,, \quad n \geq 1,\ a_0 > 0,\ a_n \neq 0 \tag{12}$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu (**??**) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (**??**) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (**??**) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j, $j = 0, \dots, n$, kladné.

Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1 + 3j, 1 - 3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 0.11. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 2z + 3$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0\,.$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský.

Příklad 0.12. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 100z^4 + 580z^3 + 1281z^2 + 2206z + 4010$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 4010,\ a_1 = 2206,\ a_2 = 1281,\ a_3 = 580,\ a_4 = 100$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = 2206 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 \\ 580 & 1281 \end{vmatrix} = 1633862194 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 & 0 \\ 580 & 1281 & 2 \\ 0 & 100 & 580 \end{vmatrix} = -19659372000 < 0$$

Podmínky Hurwitzova kritéria nejsou splněny, takže polynom není hurwitzovský.

Příklad 0.13. Zjistěte pro jaká α je polynom

$$f(z) = z^4 + 8z^3 + 27z^2 + \alpha z + 50$$

hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 50,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = 27,\ a_3 = 8,\ a_4 = 1$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = \alpha > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 50 \\ 8 & 27 \end{vmatrix} = 27\alpha - 400 > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{400}{27} \doteq 14.81481481$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 50 & 0 \\ 8 & 27 & \alpha \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2216\alpha - \alpha^2 - 3200 = -(\alpha - 16)(\alpha - 200) > 0$$

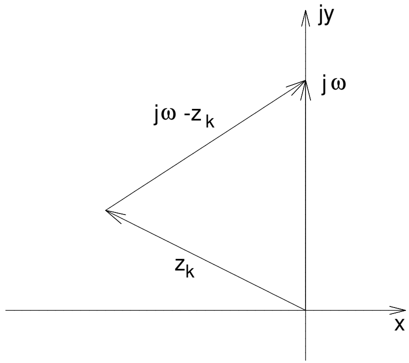
Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny pro $\alpha \in (16, 200)$, pro něž je polynom hurwitzovský.

Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom,který nemá kořeny ležící na imaginární ose, zapsán ve tvaru:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)\,. \tag{14}$$

Uvažujme pohyb bodu $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ po imaginární ose zdola nahoru. Z obrázku je zřejmé, že pro $\operatorname{Re} z_k < 0$ se argument rozdílu $z - z_k = j\omega - z_k$ (úhel, který svírá vektor s kladným směrem osy x) zvětší o hodnotu $+\pi$, neboť se mění z hodnoty $-\pi/2$ do hodnoty $3\pi/2$. Naopak pro bod $\operatorname{Re} z_k > 0$ tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor otočí o úhel π ve směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ se zmenší o hodnotu $-\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.



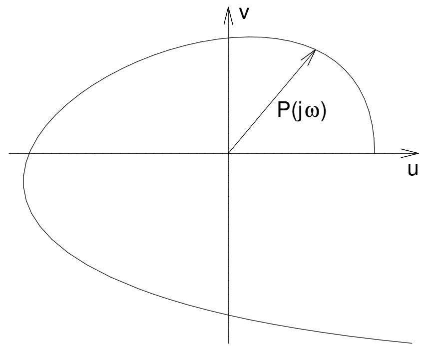
Po dosazení $z = j\omega$ do (**??**) dostáváme

$$P(j\omega) = a_n(j\omega)^n + \cdots + a_i(j\omega)^+ \cdots + a_0 = u(\omega) + j\, v(\omega)\,,$$

kde jsou polynomy $u(\omega)$ a $v(j\omega)$ definovány:

$$u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots \qquad v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \cdots\,.$$

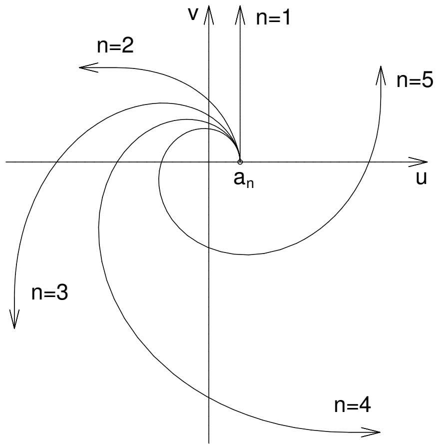
$P(j\omega)$ je komplexní funkcí reálné proměnné ω. Tak jsou v komplexní rovině definovány křivky. Tedy **hodograf** vektorové funkce $w = P(j\omega)$ skalárního argumentu ω nazýváme Michajlovova křivka. Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ a platí $\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi$, kde $P(z)$ má m značí počet kořenů s kladnou reálnou částí a $n-m$ kořenů se zápornou reálnou částí. elikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u, což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovovu křivku pouze pro $\omega \in \langle 0, \infty)$, přičemž úhel který proběhne argument křivky $w = P(j\omega)$ na intervalu $\omega \in \langle 0, \infty)$ je poloviční jako na intervalu $\omega \in (-\infty, \infty)$.



Protože víme, že řešení systému (**??**) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části,lze vyslovit následující kritérium stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom (**??**) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Úhel φ obvykle stanovíme z orientačního průběhu křivky, který stanovíme pomocí průsečíků této křivky se souřadnými osami u, v v rovině uv a stanovíme tak kolika kvadranty křivka prochází. To předpokládá nalezení kořenů polynomů $u(\omega)$, $v(\omega)$. To jsou ovšem polynomy, které po vhodné substituci $\omega^2 = t$ přejdou v polynomy s polovičním stupněm jako polynom původní. Na obrázku **??** jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.



Obrázek 5: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 0.14. Michajlovovým kritériem rozhodněte zda je zadaný polynom Hurwitzovský:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Řešení. Po dosazeni $x = j\omega$ do daného platí:

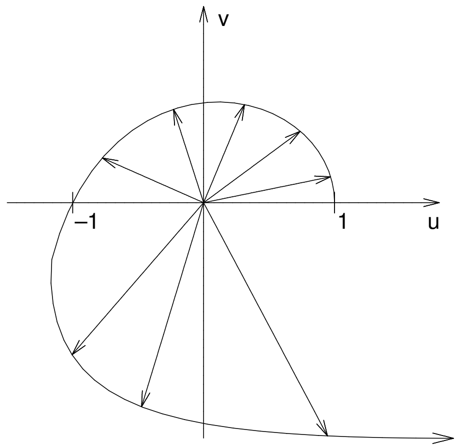
$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1\,, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega)\,. \end{aligned}$$

Pro kladné ω mají polynomy $u(\omega$ a $v(\omega)$ kořeny:

$$\begin{aligned} u(\omega) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \;&\Rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\,, \omega_2 = \sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ v(\omega) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 2\omega(1-\omega)(1+\omega) = 0 \;&\Rightarrow\; \omega_3 = 0\,, \omega_4 = 1\,. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω, a to vzestupně vzhledem k ω:

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	$+$
v	0	$+$	0	$-$	$-$



Obrázek 6: Michajlovova křivka k příkladu **??**

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \to \infty$. Jelikož $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní. $\square$

Příklad 0.15. Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \,. \end{aligned}$$

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici z matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -\lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Tento polynom je studován v předchozím příkladu, kde bylo ukázáno, že polynom je Hurwitzovký, dostáváme závěr, že zadaný systém je asymptoticky stabilní. $\square$

0.2 Rovinný autonomní diferenciální systém

Budeme diskutovat kvalitativní chování řešení systému rovnic

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

s reálnou konstantní maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

v okolí bodu $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Připomeňme terminologii zavedenou v **??**. Rovina $x_1 x_2$ je nazývána **fázovou rovinou.** Grafické znázornění ukazující kolmou projekci řešení do fázové roviny nazýváme **fázovým obrazem řešení** systému rovnic. Fázový obraz množiny všech řešení systému (**??**) nazýváme **fázovým obrazem systému.** Systém (**??**) může být zapsán (položíme-li $x_1 = x$, $x_2 = y$) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y \tag{17}$$

a jeho fázový obraz bude diskutován v okolí rovnovážného bodu $(x, y) = (0, 0)$. Zapišme odpovídající charakteristickou rovnici

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj. rovnici

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{18}$$

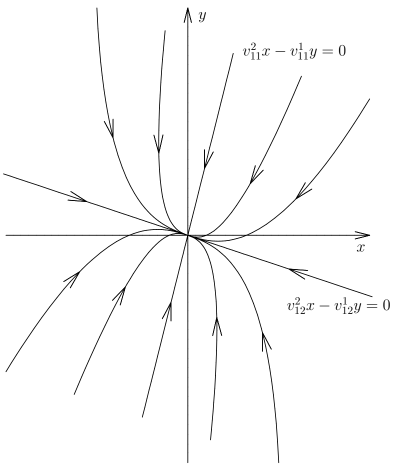
Přípustné tvary obecného řešení rovinného systému

- Případ reálných a různých kořenů $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Případ reálných a stejných kořenů $\lambda_1 = \lambda_2$
- Případ komplexních kořenů $\lambda_{1,2} = p \pm q \cdot i$

Fázové obrazy v závislosti na kořenech charakteristické rovnice

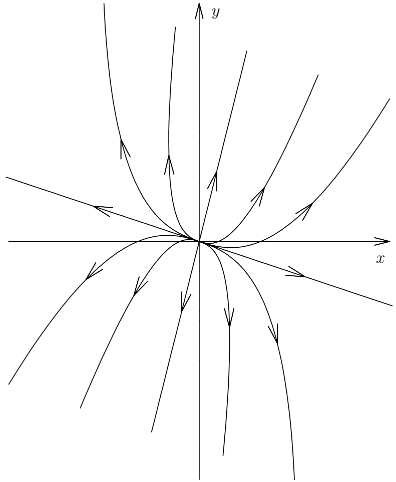
Nejdříve se zabývejme různými reálnými kořeny charakteristické rovnice a situaci popíšeme pouze pomocí obrázků s fázovým obrazem systémů

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 0$



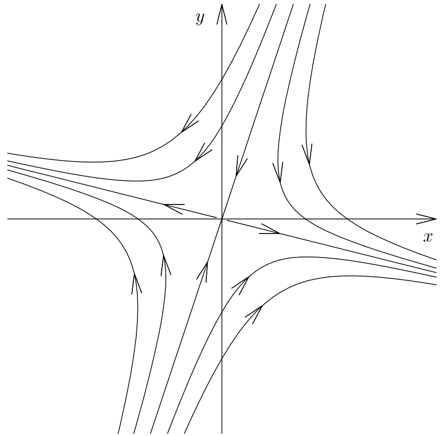
Stabilní uzel

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



Nestabilní uzel

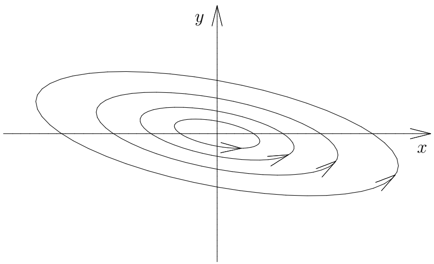
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



Sedlový bod

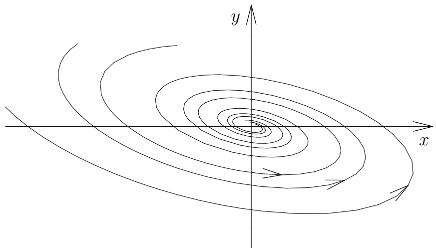
Dále se zabývejme komplexními kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Podobně jako u reálných kořenů budou reálné části kořenů komplexních rozhodovat o stabilitě a nestabilitě jednotlivých případů.

$\alpha = 0$ to jest $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$



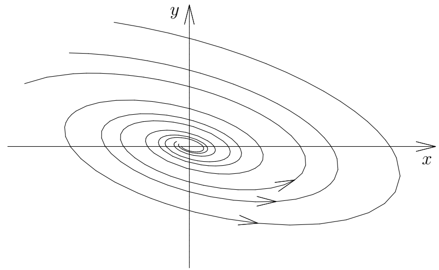
Střed

$\alpha < 0$



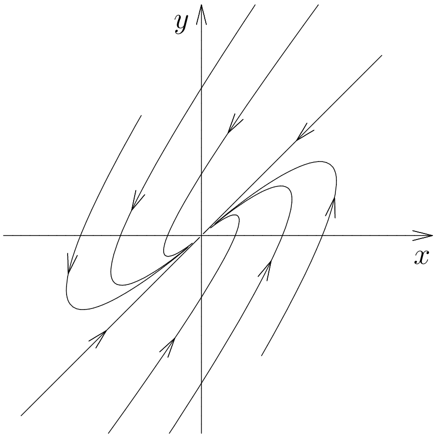
Stabilní ohnisko

$0 < \alpha$

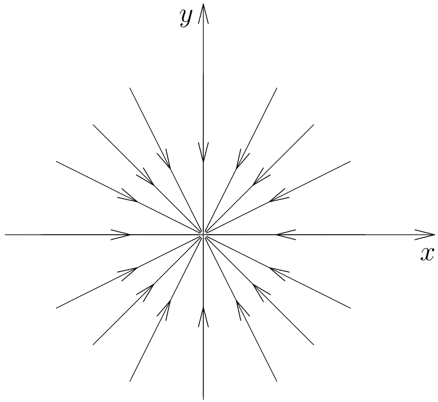


Nestabilní ohnisko

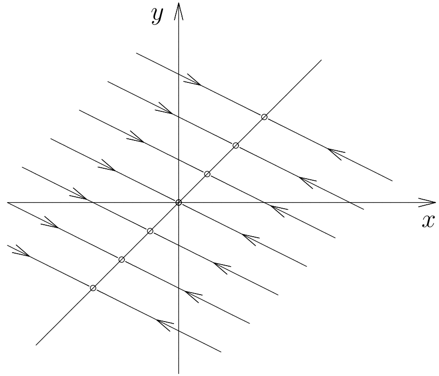
Dále zbývají případy násobných kořenů. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnici druhého řádu je tato možnost pouze pro kořeny reálné. O stabilitě nebo nestabilitě rozhoduje to zda jsou kořeny kladné nebo záporné. Navíc je potřeba uvážit algebraickou a geometrickou násobnost , proto nastávají možnosti s nevlastním uzlem nebo uzlem dikritickým. Poslední možností je jeden kořen nulový. Pro tyto možnosti ukážeme pouze obrázky stabilních variant.



Nevlastní uzel



Dikritický uzel



Nulový a záporný kořen

0.2.1 Řešené příklady

Příklad 1. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$
\begin{aligned}
x' &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y,\\
y' &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním nevlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě je $\lambda_1 = -2 < \lambda_2 = -1$. Obecné řešení systému (**??**) je:

$$
\begin{aligned}
x &= C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\
y &= C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad 2. Charakterizujte bod bod $(0,0)$ systému

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \\
y' &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním vlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 1$. Obecné řešení systému (**??**) je

$$
\begin{aligned}
x &= C_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 \mathrm{e}^{t}, \\
y &= C_1 \mathrm{e}^{2t} - C_2 \mathrm{e}^{t}.
\end{aligned}
$$

□

Příklad 3. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x \end{aligned} \tag{21}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je sedlovým bodem. V tomto případě je $\lambda_1 = 1 > 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Obecné řešení systému(**??**) je:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= C_1 \mathrm{e}^t - C_2 \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

□

Příklad 4. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= \quad y, \\ y' &= -x. \end{aligned} \tag{22}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je středem. V tomto případě $\lambda_{1,2} = \pm i$. Obecné řešení systému (**??**) je

$$\begin{aligned} x &= \quad C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned}$$

Fázovým portrétem řešení jsou kružnice, neboť platí $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 > 0$. □

Příklad 5. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \tag{23}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním ohniskem. Kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení systému (**??**) je

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \mathrm{e}^t(-C_2 \cos t + C_1 \sin t). \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 6. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= x + 5y, \\ y' &= -x - 3y. \end{aligned} \tag{24}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním ohniskem, protože $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Obecné řešení systému (**??**) je

$$\begin{aligned} x &= \phantom{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}((-2C_1 + C_2) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t). \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 7. Charakterizujte bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{25}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je dikritickým stabilním nevlastním uzlem. V tomto případě máme $\lambda_{1,2} = -1$. Obecné řešení systému (**??**) je:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= \alpha_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 8. Charakterizujte rovnovážný bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= x. \end{aligned} \tag{26}$$

Řešení. V tomto případě je $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Jde o stabilní bod. Obecné řešení systému (**??**) má tvar

$$\begin{aligned} x &= \phantom{C_1 -{}} C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= C_1 - C_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 9. Charakterizujte rovnovážný bod $(0,0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= \ \ 3x + y, \\ y' &= -x + y. \end{aligned} \tag{27}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním nevlastním uzlem, neboť $\lambda_{1,2} = 2$. Obecné řešení systému (**??**) je

$$\begin{aligned} x &= (\ \ C_1 + C_2 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}, \\ y &= (-C_1 \qquad\quad - C_2 t)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. $\square$

0.3 Parciální diferenciální rovnice

Definice 0.16. Parciální diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou funkci více proměnných a její parciální derivace.

Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem dané rovnice.

Řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která je definovaná v zadané oblasti, včetně svých parciálních derivací, až do řádu rovnice včetně, a vyhovuje dané rovnici v zadané oblasti.

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice k-tého řádu ve které je hledaná funkce u funkcí n nezávislých proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj. $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, je

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0. \tag{28}$$

Příklad 0.17. Hledejme funkci u, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{29}$$

Máme tedy parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = 2x + y$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

v každém bodě roviny Oxy. Obecněji je možné ukázat, že pro libovolnou diferencovatelnou funkci f jedné proměnné je funkce

$$u(x, y) = f(2x + y),$$

také řešením uvedené rovnice. Všimněme si, že tato řešení jsou z geometrického hlediska plochami v prostoru (x, y, z). Lehce si také ověříme, že řešením bude i každá funkce

$$u(x, y, z) = f(2x + y) + g(z),$$

kde g je libovolná funkce proměnné z.

Z uvedeného příkladu plyne jeden podstatný rozdíl mezi parciálními rovnicemi a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Ze zápisu obyčejné diferenciální rovnice, například $y' = x + y$, okamžitě poznáme, že hledaná funkce y závisí pouze na x. Ze zápisu parciální rovnice (**??**) nepoznáme na kolika proměnných závisí řešení. Víme, že hledaná funkce u závisí na proměnných x, y, ale nevíme, zda se jedná o všechny nezávislé proměnné na kterých řešení závisí, tedy zda jde o funkci dvou, tří či více proměnných. Dohodněme se proto hned na místě úmluvu, že řešení dané parciální rovnice budeme hledat pouze mezi funkcemi těch proměnných, které se přímo v rovnici vyskytují.

Druhým novým faktorem je, že množina řešení závisí na libovolné neznámé funkci a nikoli na tzv. integračních konstantách.

0.3.1 Základní problémy řešení parciálních diferenciálních rovnic

Podobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic máme i u parciálních rovnic dva základní problémy

1. Najít obecné řešení dané parciální rovnice, tj. najít všechna její řešení.

2. Najít takové řešení dané parciální rovnice, které vyhovuje některým doplňujícím podmínkám.

Nyní se budeme zabývat parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu.

0.3.2 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 0.18. Rovnici

$$f\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{30}$$

nazýváme *parciální diferenciální rovnicí prvního řádu*, kde funkce $f(x, y, u, p, q)$ je definovaná na otevřené množině D proměnných x, y, u, p, q.

Definice 0.19. *Řešením* rovnice (**??**) v oblasti G proměnných x, y nazveme každou takovou funkci u, definovanou a spojitou v G, pro kterou platí:

1. Funkce u má v oblasti G spojité parciální derivace prvního řádu.

2. Pro každé $(x, y) \in G$ platí, že $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \in D$.

3. Funkce $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ splňují rovnici (**??**).

Formulace počáteční úlohy, pojem jejího řešení.

Definice 0.20. Cauchyovou úlohou pro rovnici (**??**) rozumíme dvojici: rovnici

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{31}$$

a počáteční křivku Θ zadanou parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a, b). \tag{32}$$

Funkci $z = h(x, y)$, která má spojité parciální derivace v G, nazveme řešením Cauchyovy úlohy (**??**), (**??**), jestliže funkce h splňuje v G rovnici (**??**) a pro všechna $t \in (a, b)$ křivka $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ leží v G a navíc platí $\chi(t) = h(\varphi(t), \psi(t))$.

O křivce Θ budeme všude dále předpokládat, že je hladká a jednoduchá.

0.3.3 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu

Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0$**.**

Řešením rovnice je libovolná funkce závisející pouze na proměnné y

$$z(x,y) = H(y). \tag{33}$$

Což je rovnici válcové plochy tvořené přímkami rovnoběžnými s x-ovou souřadnicovou osou. Z toho plyne omezení na volbu křivky nemůže být rovnoběžná s osou x u počáteční Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici. Nechť je křivka Θ zadána parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a < t < b.$$

Předpokládejme, že pro funkce $\psi(t), \chi(t)$ platí, že mají spojité derivace v intervalu (a,b) a že funkce $\psi(t)$ má inverzní funkci $\psi^{-1}(t)$. Dosazením křivky Θ do řešení $z = H(y)$ stanovíme, funkci H

$$\chi(t) = H\left(\psi(t)\right). \tag{34}$$

Dosadíme do této rovnice $t = \psi^{-1}(y)$, dostaneme

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = H(y). \tag{35}$$

Řešení je ve tvaru

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = z.$$

Poznámka 0.21. Zcela analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ se řeší rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Rovnice typu $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$**.**

Analogickým postupem lze řešení určit vztahem

$$z = \int f(x,y)dx + H(y). \tag{36}$$

Důkaz existence a jednoznačnosti řešení se provádí stejně jako v předchozím případě.

Poznámka 0.22.

1. Analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se řeší i rovnice $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x,y)$.
2. Obdobně jako u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se může stát, že počáteční úloha s touto nemá řešení a nebo je řešení nekonečně mnoho.

Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y,z)$.

Rovnice zadaného typu obecně řešit neumíme, neboť na toto zadání můžeme nahlížet také tak, že rovnice nebude záviset na proměnné y a tedy řešení se převede na řešení obyčejné diferenciální rovnice $z' = f(x,z)$, což je úloha obecně neřešitelná. Myšlenky, že danou rovnici můžeme nahlížet jako na rovnici obyčejnou, je možné s výhodou použít k řešení rovnic tohoto typu. Celý postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 0.23. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{xy}{z} \tag{37}$$

Řešení. Rovnici budeme řešit jako rovnici $z'(x) = \dfrac{xy}{z}$ s tím, že y je konstanta. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými u které je postup znám z předmětu BMA2. Musíme ovšem zohlednit, že integrační konstantou je obecně výraz (funkce) proměnné y.

$$\int z\,\mathrm{d}z = \int xy\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}z^2 = \frac{x^2}{2}y + f(y).$$

O správnosti výrazu vpravo se můžete ujistit tak, že jeho parciální derivace podle proměnné x je rovna integrandu vlevo. Dále z dané rovnice vyjádříme proměnnou z

$$z^2 = x^2y + 2f(y) \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2y + 2f(y)}$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit dosazením do rovnice.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y + 2f(y)}} = \frac{xy}{z}.$$

□

Podobně jako jsme v předchozím příkladě využili postup řešení rovnice se separovanými proměnnými ukážeme v dalším příkladě analogii pro rovnici Bernoulli-ho.

Příklad 0.24. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial z}{\partial y}z = z + 2xyz^2 \tag{38}$$

Řešení. Rovnice přepsaná na rovnici Bernoulli má tvar

$$yz'(y) = z + 2xyz^2(y),$$

kde proměnná z je závislá na proměnné y. První krok je nalezení obecného řešení rovnice homogenní:

$$yz' = z \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Leftrightarrow z = yK.$$

Dále následuje metoda variace konstanty, tedy předpokládáme řešení ve tvaru $z = yK(y) \Rightarrow z' = K + yK'$ a po dosazení do původní rovnice dostáváme:

$$y(K + yK') = yK + 2xyy^2K^2 \Rightarrow \frac{K'}{K^2} = 2xy \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}K}{K^2} = \int 2xy\,\mathrm{d}y \Rightarrow -\frac{1}{K} = xy^2 + f(x),$$

Kde $f(x)$ je libovolná diferencovatelná funkce. Odtud vypočteme funkci $K = \dfrac{-1}{xy^2 + f(x)}$ a získáme obecné řešení dané rovnice

$$z(x, y) = \frac{-y}{xy^2 + f(x)}.$$

□

0.4 Řešené příklady

Příklad 0.25. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = z(x, y),$$

$$z(0, y) = y^2.$$

Řešení. Jde o stejnou rovnici jako v předchozím příkladu **??**. Řešení proto bude mít tvar

$$z(x,y) = K(y)\mathrm{e}^x.$$

Dosadíme do něj $x = 0$ a dostaneme

$$z(0,y) = y^2 = K(y).$$

Řešením Cauchyovy úlohy je proto funkce

$$z(x,y) = y^2\mathrm{e}^x.$$

□

Příklad 0.26. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = xy + z(x,y) + \alpha,$$

$$z(0,y) = y^3 + 2y,$$

kde α je konstanta.

Řešení. Budeme považovat y za konstantu a a získanou obyčejnou diferenciální rovnici řešíme jako lineární diferenciální rovnici.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z + xy.$$

Nejdříve řešíme homogenní rovnici (o pravé straně předpokládáme že je rovna nule).

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln z = cx + K \Rightarrow z = L\mathrm{e}^{cx},$$

kde $L = \mathrm{e}^K$. Nyní předpokládáme, že $z(x) = \mathrm{e}^x L(x) \Rightarrow z' = \mathrm{e}^x(L + L')$ a po dosazení do rovnice získáme:

$$\mathrm{e}^x(L + L') = \mathrm{e}^x L + xy \Rightarrow L' = xy\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow L = \int xy\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \Rightarrow L = \mathrm{e}^{-x}y(1-x) + f(y).$$

Po dosazení funkce L do předpokládaného tvaru získáme obecné řešení:

$$z(x,y) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}y(1-x) + f(y)) = y(1-x) + \mathrm{e}^x f(y).$$

Nyní najdeme řešení, které vyhovuje naší počáteční podmínce. Dosazením do předchozí rovnice hodnoty $x = 0$ dostaneme

$$y^3 + 2y = y + f(y),$$

a odtud plyne

$$H(y) = y^3 + y.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$z(x,y) = y(1-x) + \mathrm{e}^x(y + y^3).$$

$\square$