1 Tutoriál č. 6

Metoda charakteristik pro lineární parciální diferenciální rovnice 1.řádu

Metoda charakteristik pro lineární parciální diferenciální rovnice 2.řádu

Fourierova metoda pro vlnovou rovnici

1.1 Lineární parciální diferenciální rovnice 1.řádu

1.1.1 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu

Definice 1.1. Lineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$a(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = c(x,y)\cdot z(x,y) + d(x,y), \tag{1.1}$$

kde a, b, c, d jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G.

Jestliže $c(x,y) \equiv 0, d(x,y) \equiv 0$, potom se rovnice (1.1) nazývá homogenní.

Charakteristický systém.

Uvažujeme nyní lineární parciální homogenní rovnicí

$$a(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{1.2}$$

kde a, b jsou funkce proměnných x, y takové, že obě nejsou současně nulové. Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$x'(t) = a(x(t), y(t)), \quad y'(t) = b(x(t), y(t)). \tag{1.3}$$

nazýváme charakteristickým systémem rovnice (1.2).

Důvodem je, že pro libovolné řešení $z(x, y)$ rovnice (1.2) a libovolné partikulárním řešení soustavy (1.3) ve tvaru $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ platí, že z nich složená funkce má nulovou derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}z(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}x' + \frac{\partial z}{\partial y}y' = \frac{\partial z}{\partial x}a + \frac{\partial z}{\partial y}b = 0,$$

tedy je derivovaná funkce konstantní:

$$u(\varphi(t), \psi(t)) \equiv \text{const}.$$

Tato vlastnost je typická a znamená, že charakteristika nemůže být součástí Cauchyho počáteční úlohy pro homogenní LPDR 1. řádu.

Příklad 1.2. Najděte charakteristiky rovnice

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristický systém (1.3). V našem případě je $a = 2x, b = 1$. Hledáme řešení systému

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x, \\ y'(t) & = & 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \exp(2t)C_1 \\ y & = & t + C_2 \end{array}$$

Z druhé rovnice vyjádříme t a dosadíme do první a úpravou konstant dostaneme

$$x = \exp(2y)\exp(C_2)C_1 \Leftrightarrow x\exp(-2y) = K,$$

Řešením zadaného systému je soustava křivek $x\exp(-2y) = K$, které tvoří hledané charakteristiky. $\square$

Za předpokladu $a^2 + b^2 \neq 0$ je možné uvedený systém charakteristik určit i jiným postupem.
Za předpokladu $a^2 + b^2 \neq 0$ lze systémem (1.3) vyloučením dt převést do kanonickém tvaru

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a(x(t), y(t)) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= b(x(t), y(t)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}. \tag{1.4}$$

První integrály, existence řešení, obecné řešení

Definice 1.3. Funkci $z(x, y)$ nazveme *prvním integrálem* systému (1.4) v oblasti D, jestliže $z(x, y)$ je konstantní podél každého řešení systému (1.4), které celé leží v D a jestliže $z(x, y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v D.

Příklad 1.4. Najděte první integrál systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Řešení. První integrál nalezneme dvěma způsoby

1. Integrací druhé rovnice dostaneme $y(t) = t + C$ a dosazením do první rovnice obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4(t + C), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int 4(t + C)\mathrm{d}t = 2(t + C)^2 + D.$$

   Do tohoto řešení dosadíme za $t = y - C$ z druhé rovnice a dostaneme

$$x = 2y^2 + D \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y^2 = D.$$

2. Uvedený systém zapíšeme v kanonickém tvaru a řešíme jednu diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{4y} = \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}x = \int 4y\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad x = 2y^2 + D.$$

Prvním integrálem je proto funkce $z = x - 2y^2$, ale také každá funkce $z = f(x - 2y^2)$, kde f je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. $\square$

Věta 1.5. *Funkce $z = z(x, y)$ se spojitými parciálními derivacemi je řešením lineární homogenní rovnice (1.2) právě tehdy, když je prvním integrálem soustavy (1.4).*

Příklad 1.6. Najděte řešení rovnice

$$4y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Tato rovnice má charakteristický systém řešený v předchozím příkladě 1.6. Proto podle věty je řešením

$$z(x,y) = f(x - 2y^2),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce.

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(f(x-2y^2)\right)}{\partial x} = f'(x-2y^2), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(f(x-2y^2)\right)}{\partial y} = f'(x-2y^2)(-4y).$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$4y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4yf'(x-2y^2) + f'(x-2y^2)(-4y) = 0.$$

□

Věta 1.7. O jednoznačnosti řešení.
Nechť mají funkce $a(x,y), b(x,y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti D, nechť dále existuje křivka Θ zadaná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in (\alpha, \beta)$ taková, že její průmět do roviny Oxy leží v D. Nechť dále pro $t \in (\alpha,\beta)$ platí nerovnost

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t),\psi(t)) & b(\varphi(t),\psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.5}$$

Potom existuje podoblast $D_1 \subset D$ obsahující křivku Θ taková, že řešení $z = z(x, y)$ parciální rovnice (1.2), které splňuje podmínku

$$z(\varphi(t), \psi(t)) = \chi(t), \qquad \textit{pro všechna} \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{1.6}$$

je jednoznačně určené v D_1.

Věta má pouze lokální charakter. Zaručuje nám jednoznačnost v některém okolí křivky Θ.

Příklad 1.8. Najděte řešení Cauchyho počáteční úlohy spolu s maximální definičním oborem

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \text{ kde } z(0, y) = y^2$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou soustavu v kanonickém tvaru, která je lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Řešením lze určit bez složitějších výpočtů:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{x+y} \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = y + x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \exp(x)C - x - 1.$$

Tedy obecné řešení dané rovnice je ve tvaru

$$z(x, y) = f((x + y + 1)\exp(-x)),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Tu určíme dosazením počáteční podmínky:

$$z(0, y) = f(y + 1) = y^2 \Rightarrow f(t) = (t-1)^2.$$

Řešení počáteční úlohy je tedy funkce:

$$z(x,y) = \big((x+y+1)\exp(-x) - 1\big)^2.$$

Toto řešení prochází zadanou křivkou, kterou můžeme parametricky zapsat $x = 0,\ y = t,\ z = t^2$. Pro determinant z věty 1.5 platí:

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t),\psi(t)) & b(\varphi(t),\psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

tedy je toto řešení určeno jednoznačně v celé rovině xy. □

Lineární parciální rovnice homogenní s více proměnnými

Pokud pracujeme s funkcemi více proměnných, postupujeme analogicky. Dále se omezíme na rovnice kde je řešením funkce 3 proměnných, tedy na rovnice tvaru

$$a(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + c(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

Charakteristický systém je tvořen 3 rovnicemi o 4 neznámých $(x, y, x.z, t)$. Jeho vyřešením dostaneme opět 3 rovnice o 4 neznámých a eliminováním neznámé t získáme 2 rovnice o 3 neznámých. Ty můžeme geometricky interpretovat jako dvojici funkcí dvou proměnných o 2 neznámých:

$$f_1(x,y,z) = C_1 \qquad f_2(x,y,z) = C_2. \tag{1.8}$$

Analogicky definovaný první integrál má obecně tvar

$$u(x, y, z) = F(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)),$$

kde funkce F je libovolná spojitě diferencovatelná funkce dvou proměnných. Výše uvedené rovnice lze také získat řešením charakteristického systému v kanonickém tvaru (za předpokladu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{c(x, y, z)},$$

který je tvořen soustavou dvou diferenciálních rovnic.

Jestliže řešením rovnice (1.7) má spojité první parciální derivace je rovno prvnímu integrálu . Aby bylo toto řešení obecným řešením rovnice (1.7) musí být rovnice lineárně nezávislé. Podobně se postupuje i ve vyšších dimenzích. Uvedeme nyní ilustrativní příklad pro funkci tří proměnných tj. pro funkci $u(x, y, z)$.

Příklad 1.9. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou soustavu, kterou zapíšeme v obou tvarech

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= x-y. \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{x-y}$$

Při řešení využijeme obou těchto tvarů. Z prvního tvaru získáme rovnost

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) - y(t) + z(t) = C_1.$$

Z kanonického tvaru uvažujme první rovnici, která je rovnicí se separovanými proměnnými:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int x\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - y^2 = C_2.$$

Protože jsou obě rovnice lineárně nezávislé je obecné řešení zadané rovnice funkce

$$u = F(x-y+z, x^2-y^2),$$

kde funkce $u = F(t,s)$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Skutečnost, že takto definovaná funkce je řešením zadané rovnice ověříme přímým výpočtem.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2) + F'_s(x-y+z, x^2-y^2)2x \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2)(-1) + F'_s(x-y+z, x^2-y^2)(-2y) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} &= F'_t(x-y+z, x^2-y^2)
\end{aligned}
$$

Při dosazování do zadané funkce vynecháme pro větší přehlednost argumenty funkcí F'_t a F'_s.

$$
y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial z} = y(F'_t + 2xF'_s) + x(-F'_t - 2yF'_s) + (x-y)F'_s = 0.
$$

□

Kvazilineární parciální diferenciální rovnice

Řešení homogenní lineární parciální diferenciální rovnice ve třech proměnných může být chápáno jako pomocná úloha při řešení kvazilineární rovnice.

Definice 1.10. Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$
a(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = c(x,y,z), \tag{1.9}
$$

kde a, b, c jsou funkce proměnných x, y, z definované na otevřené množině G.

Předpokládejme, že funkce $z(x, y)$ je řešením rovnice (1.9) a funkce U má spojité parciální derivace a platí $U(x, y, z(x, y)) = 0$. Odtud dostáváme rovnice:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

První rovnici vynásobíme funkcí $a(x, z, y)$ a druhou funkcí $b(x, y, z)$ a sečteme je. (Argumenty funkcí jsou pro přehlednost vynechány.)

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + a\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + b\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\underbrace{\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{= \, c \text{ dle } (1.9)} = 0,$$

Tedy funkce $U(x, y, z)$ je řešením rovnice:

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{1.10}$$

Uvedená skutečnost platí i naopak:

Věta 1.11. *Nechť funkce $U = U(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná v $D \subset \mathbb{R}^3$ a splňuje rovnici (1.10). Jestliže navíc $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$, potom existuje funkce $z = z(x, y)$, která je řešením rovnice $U(x, y, z(x, y)) = 0$, tato má spojité parciální derivace a a je z řešením rovnice (1.9).*

Příklad 1.12. Najděte řešení rovnice

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = (x-y).$$

Řešení. Hledáme funkci U, která bude splňovat rovnici (1.10). Takže má platit

$$y\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{\partial U}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Toto je rovnice řešená v předchozím příkladu. Proto

$$U(x,y,z) = F(x-y+z, x^2-y^2),$$

kde funkce $u = F(t,s)$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Z požadovaného předpokladu o parciální derivaci $u'_z = F'_t(x-y+z, x^2-y^2) \neq 0$ plyne, že rovnice $F(s,t) = 0$ implicitně zadává funkci $s = f(t)$, takovou, že platí $F(f(t),t) = 0$ a tedy řešení rovnice $F(x-y+z, x^2-y^2) = 0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$x - y + z = f(x^2-y^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad z = y - x + f(x^2-y^2),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Správnost řešení opět ověříme dosazením do zadané rovnice:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial z}{\partial x} &=& -1 + f'(x^2-y^2)2x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &=& 1 + f'(x^2-y^2)(-2y) \end{array}\right\} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = -y + 2xyf'(x^2-y^2) + x - 2xyf'(x^2-y^2) = x - y.$$

$\square$

Věta 1.13. *Nechť funkce a, b, c mají spojité parciální derivace v oblasti $D \in \mathbb{R}^3$. Jestliže křivka Θ s parametrickým vyjádřením*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

leží v oblasti D, její průmět do roviny $0xy$ označíme τ a ještě platí, že pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je

$$\begin{vmatrix} a\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) & b\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje v rovině $0xy$ oblast G obsahující křivku τ taková, že řešení $z = z(x, y)$ rovnice (1.9) je v G jednoznačné.

Věta má opět pouze lokální charakter.

Příklad 1.14. Najděte řešení rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + z,$$

které je určeno křivkou $x = t$, $y = t$, $z = t^3$.

Řešení. Abychom určili obecné řešení, sestavíme charakteristickou soustavu v kanonickém tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2y+z}.$$

První rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\ln x = \ln y + c \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{y} = C_1.$$

Do třetího části kanonického tvaru charakteristického systému dosadíme $y = \frac{x^2}{C}$ a tato spolu s první části kanonického systému tvoří lineární diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{\frac{x^4}{C_1}+z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z' = \frac{z}{x} + \frac{x^3}{C_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = xC_2 + \frac{x^4}{3C_1}.$$

Dosazením za konstantu C_1 a vyjádřením konstanty C_2 určíme druhý první integrál

$$z = xC_2 + \frac{x^2y}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3z}{x} - xy = 3C_2 = \widetilde{C_2}.$$

Oba integrály jsou lineárně nezávislé, proto dostáváme obecné řešení $U(x,y,z)$ rovnice

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2z\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ve tvaru

$$U(x,y,z) = F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z}{x} - xy\right),$$

kde F je libovolná funkce dvou proměnných se spojitými parciálními derivacemi. Také v tomto případě lze z implicitního tvaru řešení zadané kvazilineární rovnice určit jeho tvar explicitní:

$$F\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z}{x} - xy\right) = 0 \Rightarrow \frac{3z}{x} - xy = f\left(\frac{x^2}{y}\right) \Rightarrow z = \frac{x}{3}\left(xy + f\left(\frac{x^2}{y}\right)\right),$$

kde $f(t)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Nyní určíme zatím neznámou funkci $f(t)$ dosazením počáteční podmínky $x = t$, $y = t$, $z = t^3$:

$$t^3 = \frac{t}{3}\left(t^2 + f(t)\right) \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2t^2.$$

Celkově je řešením počátečního problému funkce

$$z(x,y) = \frac{x}{3}\left(xy + 2\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right)$$

Protože determinant z věty 1.13

$$\begin{vmatrix} a\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right) & b\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 2t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t \neq 0.$$

je pro $y \neq 0$ nenulový a podle předchozí věty 1.13 je toto řešení jediné. □

Obvykle se charakteristiky rovnice (1.10) nazývají i charakteristikami rovnice (1.9). Potom platí následující věta.

Věta 1.15. *Nechť je plocha*

$$z = f(x, y) \tag{1.11}$$

tvořena charakteristikami rovnice (1.9) *a nechť funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace. Potom je $f(x, y)$ řešením rovnice* (1.9)*. Obráceně - jestliže funkce $f(x, y)$ je řešením rovnice* (1.9)*, potom každá charakteristika, která má s $f(x, y)$ aspoň jeden společný bod, leží celá na ploše* (1.11)*.*

Pfaffova rovnice.

Závěrem uvedeme ještě jeden typ parciální diferenciální rovnice.

Definice 1.16. Pfaffovou rovnicí nazveme výraz

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0, \tag{1.12}$$

kde P, Q, R jsou funkce proměnných x, y, z definované v oblati D.

Pro $R \neq 0$ v D lze rovnici (1.12) upravit na tvar

$$\mathrm{d}z = -\frac{P}{R}\mathrm{d}x - \frac{Q}{R}\mathrm{d}y, \tag{1.13}$$

tedy hledáme funkci $z(x, y)$, jejíž totální diferenciál vyhovuje rovnici (1.13), což v případě, že na pravé straně rovnice jsou proměnné x, y vede na exaktní rovnici.

Věta 1.17. *Je-li rovnice (1.12) řešitelná v D a jestliže mají funkce P, Q, R spojité parciální derivace, potom v D platí*

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{1.14}$$

Podmínce (1.14) se říká podmínka řešitelnosti a nebo podmínka integrability Pfaffovy rovnice.

Věta 1.18. *Jestliže mají v D funkce P, Q, R spojité parciální derivace a v každém bodě D je splněna podmínka (1.14), potom v D existují funkce $\mu = \mu(x, y, z) \neq 0$ a $F(x, y, z)$ takové, že platí*

$$\mathrm{d}F = \mu(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z), \ \textit{neboli}\ \frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \mu R.$$

Potom každým bodem D prochází právě jedno řešení rovnice (1.12).

Věta má pouze lokální platnost. Funkce μ se nazývá *integrační faktor*.

Příklad 1.19. Mějme rovnici

$$y^2 \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + xy^2 z\mathrm{d}z = 0.$$

Podmínka řešitelnosti (1.14) má tvar

$$-2xy^3 z + xy^2 z + xy^2 z(2y - 1) = 0.$$

v tomto případě lze integrační faktor „uhádnout“. Jestliže vezmeme $\mu = \dfrac{1}{xy^2}$, potom pro $x > 0, y > 0$ máme

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0.$$

Levá strana je úplným diferenciálem funkce

$$F = \ln x - \frac{1}{y} + \frac{z^2}{2}.$$

1.2 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Řada technických problémů, zvláště v elektrotechnice, se dá popsat pomocí parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Proto se jimi teď budeme věnovat samostatně.

Příklad 1.20. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu se často používají při popisu fyzikálních a technických dějů a procesů. Následují některé parciální rovnice, které se používají v elektrotechnice a příbuzných oborech.

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole)},$$

$$\triangle u = f \quad \text{Poissonova rovnice (elektrostatické pole s volnými náboji)},$$

$$\triangle u = a^2 u \quad \text{Helmholzova rovnice (stacionární vlnová rovnice)},$$

$$\triangle u = a\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{difůzní rovnice },$$

$$\triangle u = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -J,\ v = v\,(|\operatorname{grad} u|) \ \text{rovinné stacionární magnetické pole},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{rovnice pro kmity struny,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{rovnice vedení tepla.}$$

Hlavní pozornost budeme věnovat lineárním parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu. Pomocí charakteristik provedeme klasifikaci lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu na rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické a ukážeme transformace, které zajišťují, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu můžeme lokální transformací převést na kanonický tvar. Tento je často řešitelný a tak lze řešit původní rovnici.

1.2.1 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické

Definice 1.21. Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\right) = 0.$$

Definice 1.22. Lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y)u = f(x,y). \tag{1.15}$$

Funkce a, b, c, d, e, g, f jsou spojité v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž aspoň jedna z funkcí a, b, c je nenulová v každém bodě $(x, y) \in \Omega$.

Řešením (1.15) v oblasti Ω rozumíme každou funkci $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, která v Ω identicky splňuje (1.15).

Počátečními podmínkami rozumíme předepsání funkční hodnoty řešení na nějaké křivce spolu s hodnotou derivace řešení ve směru různém od tečného směru křivky, to jest $u(x, y) = h(x, y)$ a $u'_{\vec{s}} = s(x, y)$ pro $[x, y] \in l = \{[x(t), y(t)], t \in I\}$. Podobně jako u rovnic prvního řádu nemohou být tyto křivky charakteristikami,

jimiž rozumíme řešení charakteristické rovnice:

$$a\left(y'\right)^2 - by' + c = 0. \tag{1.16}$$

Vzhledem k derivaci $y'(x)$ se jedná o rovnici kvadratickou a podle znaménka diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ této kvadratické rovnice klasifikujeme lineární parciální diferenciální rovnice a provádíme transformace do kanonick0ho tvaru.

Řekneme, lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu je:

- hyperbolického typu, jestliže $D > 0$, má charakteristická rovnice řešení ve tvaru dvou jedno parametrických soustav křivek určených implicitně rovnicemi

$$\varphi(x, y) = C_1 \qquad \psi(x, y) = C_2,$$

které vyhovuji charakteristické rovnici (1.16). Dále předpokládejme, že k substituci zadané rovnicemi

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad\qquad \eta = \psi(x, y),$$

existuje ve studované oblasti inverzní transformace a můžeme tedy definovat novou funkci $U(\xi, \eta)$ vztahem

$$u(x, y) = U(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Po substituci obdržíme pro funkci $U(\xi, \eta)$ diferenciální rovnici, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$U''_{\xi\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta),$$

který je jednodušší, neboť obsahuje pouze jednu parciální derivaci druhého řádu.

- parabolického typu, jestliže $D = 0$, potom existuje jedna jedno parametrická soustava křivek určené implicitně rovnicemi

$$\varphi(x, y) = C,$$

které vyhovuji charakteristické rovnici (1.16). V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad\qquad \eta = y$$

danou parciální diferenciální rovnici do kanonického tvaru:

$$U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta).$$

- eliptického typu, jestliže $D < 0$, potom charakteristická rovnice (1.16) má řešení v implicitním tvaru

$$\varphi(x,y) \pm ij\psi(x,y) = K.$$

V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad\qquad \eta = \psi(x,y)$$

danou parciální diferenciální rovnici do kanonického tvaru:

$$U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta).$$

V dalším se soustředíme na typ hyperbolický a parabolický, neboť eliptický typ byl řešen v rámci počítačového cvičení. Postup je nazýván D'Alambertova metoda řešení.

1.2.2 D'Alambertova metoda

1. Převedeme rovnici na kanonický tvar
2. Nalezneme obecné řešení LPDR (obvykle závisí na 2 libovolných funkcích dvou proměnných).
3. Aplikací počátečních podmínek určíme konkrétní partikulární řešení

Toto jsou nejednoduché matematické úlohy, které nemusí mít řešení.

Příklad 1.23. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$xu''_{xx} - (2x+y)u''_{xy} + 2yu''_{yy} - \frac{2x+y}{2x-y}(u'_x - 2u'_y) = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(x,1) = 5x^2$, $u'_y(x,1) = 2x(x+2)$

Řešení. Budeme postupovat podle D'Alambertovy metody.

1. Jedná se o rovnici hyperbolického typu a kanonická rovnice má tvar

$$0 = x\big(y'\big)^2 + (2x+y)y' + 2y = (xy'+y)(y'+2).$$

Rovnice je součinem rovnic $xy' + y = 0$, $y' + 2 = 0$, pro které určíme řešení a následné substituce:

$$xy = C_1 \qquad y + 2x = C_2 \qquad \Rightarrow \qquad \xi = xy \qquad \eta = y + 2x.$$

Vypočteme potřebné parciální derivace s využitím vzorce pro derivaci složené funkce více proměnných (např. $u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x$):

$$u'_x = u'_\xi y + u'_\eta 2 \qquad u'_y = u'_\xi x + u'_\eta.$$

Při stanovení derivací vyšších řádů postupujeme analogicky, proto podrobněji určíme derivaci u které je možné očekávat chybu nejčastěji

$$u''_{xy} = \frac{\partial u'_\xi}{\partial y} y + u'_\xi + \frac{\partial u'_\eta}{\partial y} 2 = (u''_{\xi\xi} x + u''_{\xi\eta}) y + u'_\xi + (u''_{\eta\xi} x + u''_{\eta\eta}) 2 = u''_{\xi\xi} xy + u''_{\xi\eta}(2x + y) + u''_{\eta\eta} 2 + u'_\xi.$$

Dále dostaneme

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} y^2 + u''_{\xi\eta} 4y + u''_{\eta\eta} 4 \qquad u''_{yy} = u''_{\xi\xi} x^2 + u''_{\xi\eta} 2x + u''_{\eta\eta}.$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravách dostaneme $-u''_{\xi\eta}(y - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow u''_{\xi\eta} = 0$.

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x, y) = \varphi(xy) + \psi(2x + y).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$5x^2 = u(x, 1) = \varphi(x) + \psi(2x + 1) \qquad 2x^2 + 4x = u'_y(x, 1) = \varphi'(x)x + \psi'(2x + 1)$$

Od derivace první rovnice odečteme dvojnásobek druhé rovnice:

$$10x - 4x^2 - 8x = \varphi'(x)(1 - 2x) \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2.$$

Dosazením za $\varphi(x) = x^2$ do první rovnice obdržíme $5x^2 - x^2 = \psi(2x+1) \Rightarrow 4x^2 = \psi(2x+1)$ a substitucí $t = 2x + 1 \Leftrightarrow (t-1) = 2x$ dostáváme $\psi(t) = (t-1)^2$.

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x, y) = (xy)^2 + (2x + y - 1)^2.$$

$\square$

Příklad 1.24. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(2x, x) = x^2 + 1$, $u'_y(2x, x) = 0$.

Řešení. V tomto případě se jedná o parabolický typ

1. Charakteristická rovnice
$$0 = \left(y'\right)^2 - 2y' + 1 = \left(y' - 1\right)^2$$
má za řešení jednoparametrický systém křivek $y - x = C$. Substituce má tvar:
$$\xi = y - x \qquad \eta = y.$$

Vypočteme potřebné parciální derivace

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \qquad u''_{xy} = -u''_{\xi\xi} - u''_{\xi\eta} \qquad u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$$

Po dosazení do původní rovnice a úpravách dostaneme $u''_{\eta\eta} = 0$.

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \eta\psi(\xi)$ a po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x, y) = \varphi(y - x) + y\psi(y - x).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$\begin{aligned}1 + x^2 &= u(2x, x) = \varphi(x - 2x) + x\psi(x - 2x) = \varphi(-x) + x\psi(-x),\\ 0 &= \varphi'(x - 2x) + \psi(x - 2x) + x\psi'(x - 2x) = \varphi'(-x) + \psi(-x) + x\psi'(-x).\end{aligned}$$

Nyní první rovnici derivujeme a sečteme se druhou rovnicí:

$$2x = -\varphi'(-x) + \psi(-x) - x\psi('-x) + \varphi'(-x) + \psi(-x) + x\psi'(-x) = 2\psi(-x) \Rightarrow \psi(x) = -x.$$

Do první rovnice dosadíme $\psi(x) = -x$ a dopočítáme $\varphi(x) = 1$.

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x, y) = 1 + y(x - y).$$

□

1.2.3 D'Alembertův vzorec pro vlnovou rovnici

Hledejme nyní řešení pro rovnici kmitu struny je možno zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.17}$$

Průběh pohybu struny bude jednoznačně určen, pokud budeme znát pohyb koncových bodů a počáteční polohu a rychlost každého bodu. Matematicky to znamená, že potřebujeme znát ještě okrajové a počáteční podmínky.

$$u(0,t) = \mu_1(t), \tag{1.18}$$
$$u(l,t) = \mu_2(t), \tag{1.19}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.20}$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{1.21}$$

$\mu_1, \mu_2, \varphi, \psi$ jsou zadané funkce.

Užitím D'Alambertovy metody využijeme pouze počáteční podmínky zadané funkcemi φ, ψ. Tato rovnice je hyperbolického typu a substitucí $\xi = x + at$, $\zeta = x - at$ převedeme na kanonický tvar

$$U''_{\xi\zeta} = 0.$$

Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$U(\xi,\zeta) = f_1(\xi) + f_2(\zeta), \tag{1.22}$$

kde f_1, f_2 jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce jedné proměnné. Zpětným dosazením původních proměnných dostáváme obecné řešení původní parciální diferenciální rovnice ve tvaru

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{1.23}$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \psi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.24}$$

Tento vztah se nazývá d'Alembertův vzorec.

1.2.4 Řešené příklady

Příklad 1.25. Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a její řešení.

Řešení. Máme $A = 1, B = 8, C = 15$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Rovnice je hyperbolického typu. Rovnici přířadíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - 5x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 30\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 25\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Po dosazení dostaneme
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$
Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Zvolme
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = v.$$
Potom
$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$
a proto je $v = f(\eta)$, kde f je libovolná funkce. Takže máme
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$
$$U = \int f(\eta)\mathrm{d}\eta = F(\eta) + G(\xi),$$
kde F, G jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru
$$u = F(y - 5x) + G(y - 3x).$$

$\square$

Příklad 1.26. Převeďte na kanonický tvar rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení. Určíme diskriminant kvadratické rovnice

$$B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Rovnice je eliptického typu. Pro kořeny její charakteristické rovnice platí:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 12 = -1 \pm 2j.$$

Nejdříve řešíme diferecnciální rovnici v komplexním oboru:

$$y' = -1 \pm 2j \Rightarrow y = x \pm 2xj + C \Leftrightarrow y - x - 2jx = C$$

Podle předchozího postupu volíme transformaci:

$$\xi = y - x, \quad \eta = -2x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{\xi\xi} + 4u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{\xi\xi}.$$

Po dosazení dostaneme

$$0 = u''_{\xi\xi} + 4u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta} + 2(-u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta}) + 5u''_{\xi\xi} = 4u''_{\xi\xi} + 4u''_{\eta\eta} \Leftrightarrow u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$$

□

1.3 Fourierova metoda separace proměnných

Okrajová úloha pro rovnici struny je úloha nalezení řešení $u = u(x,t)$ definovanou pro $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, která zde má spojité parciální derivace prvního řádu, splňuje podmínky (1.18) - (1.21) a v oblasti $0 < x < l$, $t > 0$ má spojité parciální derivace druhého řádu a splňuje zde rovnici (1.17).

Poznamenejme, že počáteční úloha pro rovnici struny má nejvýše jedno řešení.

Při řešení některých parciálních diferenciálních rovnic se používá i metoda separace proměnných (Fourierova metoda, metoda separace proměnných). Základní myšlenkou této metody je, že řešení předpokládáme ve tvaru součinu dvou (respektive tří) funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné nezávislé proměnné. Pokud se nám podaří tímto způsobem separovat jednotlivé proměnné v Laplaceově rovnici, rozpadne se původní parciální rovnice na několik obyčejných diferenciálních rovnic. Umíme-li najít jejich obecná řešení, budeme umět i vyřešit původní Laplaceovu rovnici.

1.3.1 Vzorce odvozené Fourierovou metodou pro vlnovou rovnici

Předpokládejme, že vlnová rovnice je zadána ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

kde a je nenulová konstanta. Jsou-li dány počáteční podmínky

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

a okrajové podmínky

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \tag{1.25}$$

potom lze najít řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{l} \right) \sin\frac{k\pi x}{l}\,, \tag{1.26}$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

Odvození těchto vzorců je podrobně uvedeno níže v příkladu v učebním textu.

1.3.2 Řešené příklady

Příklad 1.27. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u\big|_{t=0} = x^2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Řešení. Protože ze zadání příkladu vyplývá $\psi = 0$ dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right),$$

kde $\varphi = x^2$. Proto

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+t)^2 + (x-t)^2\right).$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = x^2 + t^2.$$

□

Příklad 1.28. Najděte profil struny, kmity které jsou popisovány rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro hodnotu času $t = \pi/2$ za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1.$$

Řešení. Dosazením do vztahu (1.24) dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) + \sin(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \mathrm{d}z\right).$$

Odtud máme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + \frac{1}{2} \cdot z|_{x-t}^{x+t}.$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + t.$$

$\square$

Příklad 1.29. Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar paraboly

$$u = \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)\right)$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (1.25).

Řešení. Využijeme rozklad do řady (1.26). Máme

$$\varphi := \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l - x)\right), \quad \text{a} \quad \psi(x) = 0.$$

Najdeme koeficienty ve vzorci (1.26).

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x = \frac{8h}{l^3} \int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ b_k =& 0. \end{aligned}$$

Abychom vypočetli koeficienty a_k, použijeme dvakrát metodu per partes. Nejprve označme

$$u_1 = lx - x^2, \quad \mathrm{d}u_1 = (l - 2x)\mathrm{d}x,$$

$$v_1 = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_1 = \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} a_k = &- \frac{8h}{l^3}(lx - x^2)\frac{l}{k\pi} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ &+ \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l - 2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ =& \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l - 2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dále označíme

$$\begin{aligned} u_2 &= l - 2x, \quad \mathrm{d}u_2 = -2\mathrm{d}x, \\ v_2 &= \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_2 = \cos \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pokračujeme ve výpočtu:

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l - 2x) \sin \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ &+ \frac{16h}{k^2\pi^2 l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ =& - \frac{16h}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \end{aligned}$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

Dosazením a_k a b_k do vztahu (1.26) dostaneme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1-(-1)^k] \cos\frac{k\pi at}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\,.$$

Je-li $k = 2n$, pak platí

$$1-(-1)^k = 0$$

a v případě, že $k = 2n+1$ máme

$$1-(-1)^k = 2.$$

Proto můžeme poslední vyjádření funkce $u(x,t)$ zjednodušit:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,.$$

$\square$