Příjmení, jméno, ID 3. 1. 2019 A

....

1. Vektory $\vec{v}_1 = (1,0,1,-1,-1)^T, \vec{v}_2 = (1,-1,1,-1,-1)^T, \vec{v}_3 = (0,2,1,1,0)^T, \vec{v}_4 = (-4,0,2,2,0)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,0,1,-1,-1)^T$,
$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (1,-1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(1,0,1,-1,-1)^T = (0,-1,0,0,0)^T$,
$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (-4,0,2,2,0)^T - \frac{0}{4}(1,0,1,-1,-1)^T - \frac{-2}{1}(0,-1,0,0,0)^T = (0,0,1,1,0)^T$
$\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (-4,0,2,2,0)^T - \frac{-4}{4}(1,0,1,-1,-1)^T - \frac{0}{1}(0,-1,0,0,0)^T - \frac{4}{2}(0,0,1,1,0)^T = (-3,0,1,-1,-1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & a \\ 1 & a & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

$$\Delta_1 = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & a \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} = -2a^2 + 3a - 27 = -2\left(a - \frac{9}{2}\right)(a+3),$$

pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a \in \left(-3, \frac{9}{2}\right)$, pro $a \in R - \left[-3, \frac{9}{2}\right]$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 10bodů

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \text{ je minimální polynom. } P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$$

$$e^{2t} = 2A + B \wedge te^{2t} = A \Rightarrow P(x) = te^{2t}x + (1-2t)e^{2t}, P(A) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-6t & 9t \\ -4t & 1+6t \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $4 \ln x = x$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
největší řešení rovnice $= 8,613169$, nejmenší řešení rovnice $= 1,429611$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

x	-1	0	1	2	3
y	-5	-1	1	1	-1

$$y = -2 + x \quad y = -1 + 3x - x^2 \quad \begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 15 & -5 \\ 5 & 15 & 35 & 5 \\ 15 & 35 & 99 & -9 \end{array}$$

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{\cos(u)}{u+1}\, du$ přesností 10^{-2} 10bodů
$0,6010443853$

7. Zaveďte pojem matice a determinantu. Operace s maticemi. 5bodů

8. Interpolace funkcí. 5bodů

Příjmení, jméno, ID 3. 1. 2019 B

....

1. Vektory $\vec{v}_1 = (0,1,-1,1,-1)^T, \vec{v}_2 = (-1,1,-1,1,-1)^T, \vec{v}_3 = (2,1,1,0,0)^T, \vec{v}_4 = (0,2,2,-4,0)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (0,1,-1,1,-1)^T,$
   $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-1,1,-1,1,-1)^T - \frac{4}{4}(0,1,-1,1,-1)^T = (-1,0,0,0,0)^T,$
   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (0,2,2,-4,0)^T - \frac{0}{4}(0,1,-1,1,-1)^T - \frac{-2}{1}(-1,0,0,0,0)^T = (0,1,1,0,0)^T$
   $\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (0,2,2,-4,0)^T - \frac{-4}{4}(0,1,-1,1,-1)^T - \frac{0}{1}(-1,0,0,0,0)^T - \frac{4}{2}(0,1,1,0,0)^T = (0,1,-1,-3,-1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} -3 & 1 & a \\ 1 & -3 & 2 \\ a & 2 & -4 \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

   $$\Delta_1 = -3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & a \\ 1 & -3 & 2 \\ a & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3a^2 + 4a - 20 = 3\left(a + \frac{10}{3}\right)(a-2),$$

   negativně definitní pro $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ to jest $a \in \left(-\frac{10}{3}, 2\right)$, pro $a \in R \setminus \left[-\frac{10}{3}, 2\right]$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ 10bodů

   $$\chi_A = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 4 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 \text{ je minimální polynom. } P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$$

   $$e^{-2t} = -2A + B \wedge te^{-2t} = A \Rightarrow P(x) = te^{-2t}x + (1+2t)e^{-2t},\ P(A) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-6t & 4t \\ =9t & 1+6t \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $6\ln x = x$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
   největší řešení rovnice $= 16,99888735$, nejmenší řešení rovnice $= 1.22680$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

x	-2	0	1	2	4
y	13	3	1	1	7

   $$y = 6 - x \quad y = 3 - 3x + x^2 \qquad \begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 25 & 25 \\ 5 & 25 & 65 & 5 \\ 25 & 65 & 289 & 169 \end{array}$$

6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u+1}\,\mathrm{d}u$ přesností 10^{-2} 10bodů
   $0,2842269855$

7. Skalární součin, ortogonalizační proces. 5bodů

8. Numerická integrace funkcí 5bodů

Příjmení, jméno, ID 3. 1. 2019 C

....

1. Vektory $\vec{v}_1 = (-1,1,1,0,-1)^T, \vec{v}_2 = (-1,1,1,-1,-1)^T, \vec{v}_3 = (1,0,1,2,0)^T, \vec{v}_4 = (2,-4,2,0,0)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (-1,1,1,0,-1)^T,$
$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-1,1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(-1,1,1,0,-1)^T = (0,0,0,-1,0)^T,$
$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (2,-4,2,0,0)^T - \frac{0}{4}(-1,1,1,0,-1)^T - \frac{-2}{1}(0,0,0,-1,0)^T = (1,0,1,0,0)^T$
$\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (2,-4,2,0,0)^T - \frac{-4}{4}(-1,1,1,0,-1)^T - \frac{0}{1}(0,0,0,-1,0)^T - \frac{4}{2}(1,0,1,0,0)^T = (-1,-3,1,0,-1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 12 & a & 2 \\ a & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

$$\Delta_1 = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 36 - a^2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & a & 2 \\ a & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3a^2 + 4a + 84 = -3\left(a + \frac{14}{3}\right)(a-6),$$

pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a \in \left(-\frac{14}{3}, 6\right)$, pro $a \in R \setminus \left[-\frac{14}{3}, 6\right]$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ 10bodů

$\chi_A = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 12 \\ -4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$

$$e^t = A + B \wedge e^{3t} = 3A + B \Rightarrow P(x) = \frac{e^{3t} - e^t}{2}x + \frac{3e^t - e^{3t}}{2},\ P(A) = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^t - 3\,\mathrm{e}^{3\,t} & 6\,\mathrm{e}^{3\,t} - 6\,\mathrm{e}^t \\ -2\,\mathrm{e}^{3\,t} + 2\,\mathrm{e}^t & -3\,\mathrm{e}^t + 4\,\mathrm{e}^{3\,t} \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $8\ln x = x$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
největší řešení rovnice $= 26,09340$, nejmenší řešení rovnice $= 1,155371$

5. K zadaným bodům

x	-3	0	1	3	4
y	12	-3	-4	0	5

vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

$$y = 3 - x \quad y = -3 - 2x + x^2 \qquad \begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 35 & 10 \\ 5 & 35 & 65 & -20 \\ 35 & 65 & 419 & 184 \end{array}$$

6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan(u)}{u+1}\,\mathrm{d}u$ přesností 10^{-2} 10bodů
$0,3709274393$

7. Definujte vektorový prostor, jeho bázi a dimenzi. 5bodů

8. Numerické metody řešení rovnic. 5bodů